GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XL

NUMĂRUL 1. — SEPTEMVRIE 1934

SUMARUL

1. Lista Membrilor Societăţii „Gazeta Matematică".
2. Membrii decedaţi.
3. Sur le triangle isocèle . . . . . *V. Thébault*
4. Concursul „Gazetei Matematice".
5. Biblioteca „Gazetei Matematice" . . . . . *I. Ionescu*
6. Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice"
7. Note matematice: 1 — 6.
8. Bibliografie.
9. Cereri:
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 2913, 3928, 4134, 4168, 4278, 4322, 4359.
12. Exerciţii: 1 — 4.
13. Probleme propuse: 4415 — 4426.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1934

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică“ având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela „*Gazeta Matematică*“ („Monitorul Oficial“. B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 27, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 30, 36, 40, 49, 52, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 300, 01, 03, 15, 19, 20, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 65, 66, 68, 70, 76, 80, 82, 84, 88, 89, 90, 91, 93, 94, 95, 96, 98, 99, 400, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela „*Gazeta Matematică*“ („Monitorul Oficial“. B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

AVIZ

Se face cunoscut că de la 1 Octomvrie 1934, va apare la începutul fiecărei luni până la 1 Iunie inclusiv un „SUPLIMENT“ al „Gazetei Matematice“ în care se vor propune numai exerciții în legătură directă și treptată cu programul matematicilor din liceele civile și militare.

In acest supliment se va publica numele rezolvitorilor și indicațiuni la exercițiile mai grele.

Costul abonamentului este de 50 lei anual, se plătește la început și se trimete Domnului Lt.-Comandor GR. ZAPAN, Casa „Gazeta Matematică“, Calea Griviței 158. — București 2.

GAZETA MATEMATICA

GAZETA MATEMATICA

FOAE LUNARA

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ŞI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL XL

15 SEPTEMVRIE 1934 — 15 AUGUST 1935

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1934

LISTA MEMBRILOR
SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ”

DELEGAȚIUNEA PENTRU ANUL 1934 *)

COLONEL GH. BUICLIU, I. BUȘILĂ și AL. D. BUNESCU (Cassier)

PERSONALUL REDACȚIUNII

I. IONESCU. Membru delegat pentru schimburi de reviste, primirea lor, cereri, recreațiuni, diverse și reclamațiuni privitoare la tipărire.

G. ȚIȚEICA. Raportor.

GH. ILIESCU. Membru delegat pentru convocările lunare, pentru primirea și repartizarea manuscriselor destinate *Gazetei Matematice*.

Z. CONSTANTINESCU, GH. ILIESCU, B. MĂRĂCINE și D. VASILIU. Membri delegați pentru corecturi și imprimarea revistei.

COLONEL GH. BUICLIU, O. ȚINO și LT.-COMANDOR AV. GR. ZAPAN. Membri delegați pentru aritmetică elementară.

D. BARBILIAN, N. BOTEA, C. IONESCU-BUJOR, LT.-COMANDOR AV. GH. NICULESCU și O. ȚINO. Membri delegați pentru geometrie elementară.

GH. TH. GHEORGHIU, COL. GH. LITEANU, O. ȚINO și GH. VASILIU. Membri delegați pentru trigonometrie.

TH. ANGHELUȚĂ, N. CIORĂNESCU, GH. TH. GHEORGHIU, C. IONESCU-BUJOR, LT.-COMANDOR AV. GH. NICULESCU și M. SARIAN. Membri delegați pentru algebră elementară.

I. CHIȚULESCU și C. ORĂȘANU. Membri delegați pentru geometria descriptivă.

CR. MATEESCU, A. PÂRVU și R. WOINAROSKI. Membri delegați pentru mecanica elementară.

COLONEL GH. BUICLIU și O. ȚINO. Membri delegați pentru geometria analitică.

C. ORĂȘANU și A. PÂRVU. Membri delegați pentru cosmografie.

TH. ANGHELUȚĂ și M. GHERMĂNESCU. Membri delegați pentru probleme și note de matematici superioare.

TH. ANGHELUȚĂ, GH. TH. GHEORGHIU, D. V. IONESCU și P. SERGESCU. Membri delegați pentru probleme propuse de matematici superioare.

O. ȚINO. Membru delegat pentru clasarea problemelor propuse.

C. IONESCU-BUJOR. Membru delegat pentru exerciții.

N. ABRAMESCU, V. ALACI, N. BOTEA, COLONEL GH. LITEANU, MIRON NICULESCU și M. SARIAN. Membri delegați pentru chestiuni de examen.

COLONEL GH. BUICLIU și C. IONESCU-BUJOR. Membri delegați pentru alcătuirea tablei de materii.

LT.-COMANDOR AV. GH. NICULESCU și M. SARIAN. Membri delegați pentru cercetarea prealabilă a soluțiilor primite dela corespondenți.

GH. TH. GHEORGHIU. Membru delegat pentru evidența problemelor publicate.

A. PÂRVU. Bibliotecar.

I. S. ANTONIU, N. BOTEA, COL. GH. BUICLIU, N. CIORĂNESCU, GH. I. DUMITRESCU, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, C. IONESCU-BUJOR, MAIOR I. LINTEȘ, COLONEL GH. LITEANU, LT.-COMANDOR AV. GH. NICULESCU, O. ORĂNESCU, AL. PANTAZI, A. PÂRVU, AL. ROȘU, M. SARIAN, GH. D. SIMIONESCU, O. ȚINO și LT.-COMANDOR AV. GR. ZAPAN. Membri delegați pentru cercetarea și redactarea problemelor rezolvate.

---

*) Societatea este administrată și reprezentată de o delegație alcătuită din doi membri și un cassier. (Art. 14 din Statute).

MEMBRII

1	1922, Mart. 1*	ABASON ERNEST. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. Doctor în Matematici.—Profesor şi Subdirector la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Mateiu Voevod, 25. Bucureşti 4.
2	1907, Iulie 1	ABRAMESCU N. Doctor în Matematici.—Profesor la Universitatea din Cluj.
3	1913, Oct. 7	ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Str. General Foch, 27. Timişoara.
4	1919, Sept. 12	ANGELESCU A. Doctor în Matematici. — Profesor Universitar.— Str. Frumoasă, 12. Bucureşti 2.
5	1922, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici.—Profesor la Universitatea din Cluj. — Str. Iuliu Maniu, 2 Cluj.
6	1934, Febr. 21	ANTONIU CORNELIU. Inginer. — Inginer în Ministerul Lucrărilor Publice. — Str. C. Disescu, 17. Bucureşti.
7	1928, Aug. 29	ANTONIU S. ION. Inginer Electromecanic, Diplomat de Şcoala Politehnică din Bucureşti. Inginer Electrician, Diplomat de Şcoala Superioară de Electricitate din Paris. — Inginer la Societatea de Gaz şi Electricitate din Bucureşti. — Str. Edgar Quinet, 6. Bucureşti 1. Telefon 302/21.
8	1931, Mart. 11	ARGHIRIADE EM. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar.
9	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer. — Str. Porumbaru, 56. Bucureşti 2.
10	1929, Aug. 28	BĂDESCU A. LUCA. Inginer. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Director tehnic al Societăţii Comunale a Tramvaielor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. Olari, 15. Bucureşti 4.
11	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires. Belgrano 975. Republica Argentina.
12	1911, Febr. 20	BANCIU I. Licenţiat în Matematici. — Directorul General al Contabilităţii Generale a Statului şi a Finanţelor Publice. — Str. Lucaci, 95. Bucureşti 3.
13	1927, Mai 11	BARBILIAN DAN. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar. — Str. Carol Davila, 60. Bucureşti.
14	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Academia de Arhitectură. Directorul Societăţii „Uzinele Chimice Române". — Str. Basarabia, 45. Bucureşti 2.
15	1932, Apr. 20	BOTEA NICULAE. Licenţiat în Matematici. — Calea Floreasca, 46. Bucureşti 3.
16	1920, Ian. 10	BRATU GH. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. — Profesor de Astronomie şi de Calcul diferenţial şi integral la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. Directorul Observatorului Astronomic din Cluj. — Str. Brătianu, 29 Cluj.
17	1926, Iunie 28	BRENER M. AVRAM. Inginer.— Bulevardul Dacia, 15. Bucureşti 3.

*) Data admiterii.

18	1910, Iunie 21	BRUCKNER VICTOR. Inginer Inspector General. — Director Superior C. F. R. — Str. Ing. Pandele Ţăruşanu, 7. Bucureşti 2.
19	1920, Aug. 15	BUDEANU I. C. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Parcul Bonaparte. Str. Washington, 32. Bucureşti 3.
20	1910, Apr. 3	BUICLIU GH. Colonel din Artilerie. — Directorul Direcţiei Chimice Militare din Ministerul Apărării Naţionale. — Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 6.
21	1928, Mai 9	BUJOREANU N. Inginer-Şef. — Inspector principal C. F. R. — Str. Justinian, 17. Bucureşti 3.
22	1924, Ian. 30	BUNESCU D. AL. Inginer S. N. P. S. — Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. — Str. Fabrica de Chibrituri 22. Telefon 3-6033. Bucureşti 6.
23	1930, Aug. 31	BUNGESCU ION. Maior de Artilerie.—Absolvent al Şcoalei de Art. A. A. din Franţa (Metz). — Maior în Regt. 1 Art. A. A. — Str. Elena Matei Voevod, 7. Bucureşti 4.
24	1920, Ian. 10	BURADESCU TRAIAN. Inginer-Şef. — Inspector principal tehnic C. F. R. Şef de serviciu în Direcţia Mişcării.—Clădirea Exploatării. Gara de Nord. Bucureşti.
25	1930, Aug. 31	BUŞILĂ ADRIAN. Inginer. — Inginer în Direcţiunea Întreţinerii şi Lucrărilor Noi C. F. R. — Str. Vaselor, 40 B. Bucureşti 4.
26	1910, Oct. 25	BUŞILĂ D. C. Inginer de Poduri şi Şosele. Inginer Electrician. — Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Aleea Modrogan, 1. Bucureşti 3. Telefon 246/61.
27	1921, Mai 4	BUŞILĂ I. Inginer Inspector General.—Inginer în Ministerul Lucrărilor Publice. — Str. Dr. Lueger, 6 bis. Bucureşti 2.
28	1914, Iulie 12	CAMBUREANU V. Inginer Inspector General.— Subdirector General al Casei Muncii C. F. R.—Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti 2.
29	1926, Iunie 28	CAMBUREANU V. D. Inginer.— Inginer la Casa Autonomă a Drumurilor de Stat. — Str. Cobălcescu, 31. Bucureşti.
30	1922, Noem. 4	CAPRIEL I. Inginer-Şef. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti.— Administrator-Delegat al Societăţii „România Carboniferă", al Societăţii „Construcţiunea". — Str. Visarion, 5. Bucureşti 3.
31	1920, Mart. 1	CARAMAN E. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „V. Alexandri" din Galaţi. — Str. Lascar Catargi, 40. Galaţi.
32	1928, Aug. 29	CASSIAN GH. Lt.-Colonel.—Membru în Comisia militară de recepţie la Uzinele Schneider. Franţa.
33	1920, Ian. 10	CAZACU N. C. Inginer-Şef.— Inspector de Mişcare C. F. R.— Str. Sf. Ilie, 2 bis. Galaţi.
34	1914, Dec. 20	CHIRICUŢĂ A. Inginer Inspector General.— Administraţia Comercială a porturilor şi căilor de comunicaţie pe apă.— Bulevardul Elisabeta, 89. Bucureşti 2.
35	1920, Mart. 1	CHIŢULESCU I. IOAN. Inginer-Şef.— Direcţia Specială a Atelierelor C. F. R. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. I. Căpitanu, 44. Bucureşti.
36	1921, Febr. 5	CIOC M. Inginer. — Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti 1.

37	1930, Aug. 31	CIORĂNESCU NICOLAE. Doctor în Matematici din Paris.—Licenţiat în Fizico-Chimice.—Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Pomul Verde, 12. Bucureşti 2.
38	1933, Aug. 31	CONSTANTINESCU GH. Inginer. — Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer la Societatea A. E. G.— Str. Donici, 38. Bucureşti 3.
39	1895, Sept. 15* (fondator	CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General.—Senator. Fost Ministru.— Aleea Vulpache, 7 (Parcul Filipescu) Bucureşti 3.
40	1932, Apr. 20	CONSTANTINESCU ZAHARIA. Inginer diplomat dela Şcoala Politehnică din Bucureşti.—Şeful Serviciului Exploatării din Imprimeria Naţională M. O. — Calea Şerban Vodă, 133. Bucureşti 5.
41	1910, Apr. 3	COSTINESCU DAN. Inginer.—Director General al Fabricii de Hârtie „Letea". — Fabrica de hârtie „Letea". Bacău.
42	1922, Mart. 1	DUMITRESCU ARG. D. Inginer-Şef.—Inspector tehnic C. F. R.—Str. Principele Nicolae, 32. Craiova.
43	1922, Noem. 1	DUMITRESCU I. GH. Licenţiat în Matematici.— Profesor secundar, Bucureşti. — Str. Sf. Elefterie, 52. Bucureşti 4.
44	1918, Ian. 28	FELIX CORNELIU. General de Brigadă în rezervă. — Str. G. D. Palade, 72. Bucureşti 3.
45	1909, Iulie 1	FILIPESCU EM. GH. Inginer.— Director General al Soc. Comunale a Tramvaielor Bucureşti. — Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Vasile Lascăr, 216. Bucureşti 3.
46	1929, Ian. 31	FOCŞENEANU I. MIHAIL. Lt. de Artilerie.—Licenţiat în Matematici.
47	1928 Mai 9	FUNDĂŢEANU C. ION. Inginer-Şef.— Inspector General în Ministerul Industriei şi Comerţului. — Aleea N. Ionescu, 3 (Parcul Delavrancea). Bucureşti 2.
48	1921, Mai 4	GABRIELESCO RAMIRO. Inginer. — Str. Dionisie, 19. Bucureşti 1.
49	1914, Dec. 20	GÂLCĂ I. TOMA. Inginer-Şef.—Str. Luigi Cazzavilan, 8. Bucureşti 2.
50	1906, Mart. 4	GEORGESCU I. N. Inginer Inspector General.— Directorul General al Serviciului de Indiguiri şi Desecări. — Str. G. D. Palade, 35. Bucureşti 3.
51	1921, Febr. 5	GEORGESCU N. N. Inginer .— B-dul Elisabeta, 24. Bucureşti 1.
52	1917, Mai 11	GEORGESCU-ROEGEN N. Licenţiat în Matematici. — Diplomat al Institutului de Statistică din Paris.—B-dul Pache, 83. Bucureşti.
53	1921, Aug. 31	GHERMĂNESCU N. MIHAIL. Doctor în Matematici.—Conferenţiar la Şcoala Politehnică din Timişoara.—Str. Popa Nan, 79. Bucureşti 4.
54	1913, Aug. 30	GHEORGHIU S. I. Inginer-Şef. — Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.—Str. Lahovary, 3. Bucureşti 3.
55	1932, Apr. 20	GHEORGHIU T. GH. Licenţiat în Matematici. — Parcul Ianculului. Str. D, 9. Bucureşti.
56	1913, Aug. 30	GHEORGHIU A. MIRCEA.—Inginer Inspector General. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. Inginer la Administraţia Comercială a Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe Apă. — Serviciul N. F. R. Galaţi.

*) Data fondării revistei „*Gazeta Matematică*". Societatea Gazeta Matematică a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

57	1929, Aug. 28	GHEORGHIU A. ŞERBAN. Doctor în Ştiinţele Matematice.— Statistician.— Subdirector în Ministerul de Finanţe.— Str. Robert de Flers, 3. Bucureşti.
58	1921, Mai 4	GHIMUŞ D. A. Maior.— Inginer Radio. E. S. E. Regimentul Transmisiuni. Telefon 313/37. Bucureşti.
59	1931, Mart. 11	GHIŢESCU VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar titular. Director de liceu. — Calea Moşilor, 234. Bucureşti 4.
60	1910, Iunie 2	GRIGORESCU C. Inginer.— Antreprenor de Lucrări Publice.— Str. Plantelor, 40. Bucureşti 4.
61	1920, Ian. 10	GUTZU VICTOR. Inginer.—Directorul Manufacturei de Tutun Iaşi.— Str. G-ral Lahovary, 60. Bucureşti.
62	1927, Ian. 28	HANGANU D. M. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti şi al Şcoalei superioare de Electricitate din Paris.—Inginer la C. A. M. Asistent la Şc. Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Logofătul Nestor, 2. Bucureşti.
63	1924, Ian. 30	IANCULESCU ROMULUS. Inginer-Şef. — Licenţiat în Matematici. — Gara de Nord. Bucureşti 2.
64	1922, Mai 10	ILIESCU GH. Inginer-Şef. — Directorul Fabricei de Chibrituri-Filaret. — Fabrica de Chibrituri-Filaret. Bucureşti 6.
65	1928, Aug. 29	ILIESCU TRAIAN. Colonel de Artilerie. — Comandantul Reg. 2 Artilerie Antiaeriană Iaşi.
66	1895, Sept. 15 (fondator)	IOACHIMESCU GH. ANDREI. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici.— Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Str. Buzeşti, 76. Bucureşti 2.
67	1926, Iunie 28	IOACHIMESCU A. GH. Inginer.— Directorul Fabricei de Timbre.— Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6.
68	1920, Ian. 10	IOANOVICI AUREL. Inginer. — Antreprenor.— Str. Paris, 28. Bucureşti 3.
69	1933, Febr. 22	IONESCU-BUJOR C. Licenţiat în Matematici.—Profesor.—Str. Maior Popescu Gh., 26. Parcul Ianculuí. Bucureşti.
70	1895, Sept. 15 (fondator)	IONESCU I. Inginer Inspector General.— Membru corespondent al Academiei Române. Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Căluşei, 23. Bucureşti 4.
71	1922, Noem. 1	IONESCU V. D. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris.— Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Cluj.—Str. Iuliu Maniu, 2. Cluj.
72	1932, Apr. 20	IONESCU ZANE D. GH. Inginer diplomat dela Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Inginer în Direcţia Generală M. O. — Str. Popovici, 40. Parcul Delavrancea. Bucureşti 3.
73	1912, Iunie 2	JIJIE ADAM. Căpitan Comandor în rezerva marinei. Licenţiat în ştiinţe. Inginer Electrician. — Concesionarul luminatului electric şi al alimentării cu apă din Sulina. — Sulina.
74	1924, Ian. 30	KAUFMANN N. Inginer. - Şef de Secţie. Direcţiunea Economatului C. F. R. — Str. G-ral Manu, 26. Bucureşti 2.

75	1931, Aug. 28	LAZU CONST. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul Imprimeriei Centrale a M. O. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Sf. Elefterie, 19. Bucureşti 6.
76	1919, Sept. 12	LINTEŞ I. Maior de Artilerie. Inginer aeronautic. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Şef de birou în Ministerul Armamentului. — Str. Epicol, 49. Bucureşti.
77	1921. Mai 4	LITEANU I. GH. Colonel de Artilerie. — Şef de Stat-Major la Inspectoratul General II Armată. Profesor la Şcoala de ofiţeri de aviaţie. — Str. I. L. Carageale, 30 A. Bucureşti 1, Telefon 2.0940.
78	1913, Aug. 30	MALCOCI C. Inginer Inspector General. — Str. Pia Brătianu, 4. Bucureşti 3.
79	1934, Febr. 21	MANAFU VALERIU. Inginer E. C. P.—Şcoala de Geniu, Bucureşti.
80	1926, Iunie 28	MANOILESCU MIHAIL. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Senator.—Mare industriaş.— Str. Musolini, 27. Bucureşti 3.
81	1932, Apr. 20	MĂRĂCINE B. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti.—Directorul Imprimeriei Naţionale. — Cartierul Fabricei de Chibrituri. Str. Ing. Teodoru, 8. Bucureşti 6. Telefon 3.80.70.
82	1921, Febr. 5	MAREŞ T. Inginer-Şef.— Direcţia Generală a Drumurilor.— B-dul Bonaparte, 20 (Alee). Bucureşti.
83	1922, Mai 10	MATEESCU CR. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Subdirector la Soc. „Electrica" Bucureşti. — Str. Sevastopol, 11 C. Bucureşti 2.
84	1929, Ian. 11	MEREUŢĂ V. Inginer. — Subdirector Direcţiunea de Intreţinere C. F. R. — Gara Filaret. Bucureşti 6.
85	1921, Febr. 31	MIHĂILESCU P. TIBERIU. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala Comercială din Ploeşti. — Str. Dionisie Eclesiarhul, 15. Bucureşti 2.
86	1921, Febr. 5	MIHALOPOL C. Inginer Inspector General. — Subdirector General al Administraţiei Comerciale a Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe Apă. — Splaiul Independenţei, 63. Bucureşti.
87	1925, Febr. 11	MIRCEA M. E. Inginer.— Inginer-Şef la Societatea „Concordia".— Buştenari. Jud. Prahova.
88	1929, Aug. 28	MITESCU CAMIL. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul Serviciului Exploatării Fabricilor la Casa Autonomă a Monopolurilor. — Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti.
89	1920, Ian. 10	MITITELU C. CLAUDIU. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Director de Serviciu în Adm. Centrală a Casei Autonome a Monopolurilor. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti 3.
90	1920, Ian. 10	MITITELU C. I. Inginer. — Intreprinzător de Lucrări Publice. — Str. G-ral Manu, 28. Bucureşti.

91	1932, Febr. 21	NEAMȚU PETRE. Inginer. Director S. T. B. Asistent la Școala Politehnică „Regele Carol II" din București. — Str. Roma, 59. București 3.
92	1922, Mart. 1	NEGRETZU I. Inginer de mine. — Exploatări agricole (agricultor). — Str. Șerban-Vodă, 170. Pitești.
93	1928, Aug. 29	NEGURĂ ST. Licențiat în Matematici dela Universitatea din București. — Profesor la liceul „Codreanu" din Bârlad. — Str. Carol, Bârlad.
94	1910, Mai 20	NICHIFOR A. G. Doctor în Științele Matematice. — Profesor la Facultatea de Științe din București și la Școala de Arhitectură București. — Str. Dimitrie Racoviță, 32. București 4.
95	1929, Aug. 28	NICOLAU H. CONSTANTIN. Inginer-industrial. — Directorul tehnic al fabricei de hârtie Letea-Bacău.
96	1922, Noem, 4	NICOLAU T. M. Inginer Inspector General. — Director al Direcțiunei Tehnice din Ministerul Lucrărilor Publice și al Comunicațiilor. Profesor la Școala de Conductori de Lucrări Publice din București. — Str. Lăzureanu, 31 bis. București 6.
97	1923, Iulie 4	NICOLESCU GHEORGHE. Lt. C-dor Av. Inginer. Diplomat al Școalei Politechnice Timișoara și al Școalei Superioare de Aeronautică Paris. — Str. Isvor, 98. București 6.
98	1929, Ian. 31	NICOLESCU MIRON. Fost elev al Școalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Științele Matematice dela Sorbonne. — Profesor Universitar. — Universitatea Cernăuți.
99	1931, Mart. 11	NICULESCU V. ALEX. Licențiat în Matematici. — Profesor secundar la Liceul „Ion Maiorescu", Giurgiu. — Str. Isvor, 98. București 6.
100	1920, Oct. 28	NICULESCU CRISTEA. Inginer-Șef. — Președintele comisiei de control C. F. R. — Str. Arhitect Mincu, 13. București 2.
101	1922, Mart. 1	ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Științe din București. Director al Institutului Superior de Educație Fizică. Director al Școalei de Statistică. — Str. Rozelor, 9. București.
102	1927, Ian. 28	OPRESCU GH. General. — Comandantul Diviziei I. Timișoara.
103	1927, Ian. 28	ORĂNESCU O. Inginer-Șef. Diplomat al Școalei Politehnice din București, Secția Electro-Mecanică. — Inginer mecanic la Navigațiunea Fluvială Română, Galați. — Str. Bolintineanu, 2 bis. Galați.
104	1913, Oct. 7	ORĂȘANU D. CEZAR. Inginer diplomat al Școalei Naționale de Poduri și Șosele. Inginer Cadastral Școala Politehnică. Inginer Hotarnic și Operator Topometru. Licențiat în Matematici. Conferențiar titular la Școala Politehnică „Regele Carol II" din București la cursul de Construcții Generale. Profesor suplinitor la cursul de Topografie și Geodezie. — Str. Sfinții-Voevozi, 9. București.
105	1910, Mai 20	ORĂȘANU GR. Licențiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Gh. Lazăr" din București. — Str. Popa Nan, 19. București.

106	1914, Dec. 20	PANAITESCU Sc. General de Divizie în retragere. — Conferenţiar Universitar. Membru corespondent al Academiei Române.— Str. Călăraşi, 9. Iaşi
107	1929, Ian. 31	PANTAZI ALEXANDRU. Doctor în Matematici. Redactor Statistic. — Profesor la Şcoala de Statistică. Asistent Universitar. Inspector actuar Ministerul de Industrie şi Comerţ. — Str. Al. Lahovary, 9. Bucureşti. Telefon 34305.
108	1932, Aug. 24	PÂRVU AUREL. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat în Matematici. — Str. Justinian, 18. Bucureşti 3. Telefon 225 81.
109	1924, Ian. 30	PAŞCANU S. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele (1919) ; Arhitect Naval diplomat Univ. din Glasgow (1921). B. Sc.; A. I. N. A. — Calea Dorobanţilor, Aleea A, 8. Bucureşti 3.
110	1911, Dec. 17	PATRICIU G. TITUS. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Directorul Liceului „M. Kogălniceanu" din Iaşi. Fost Director General al Învăţământului Primar şi Normal în Ministerul Instrucţiunii. — Str. Rosetti, 8. Iaşi.
111	1920, Oct. 28	PHILIPIDE M. Inginer. — Director General al Societăţii Anonime Române de Navigaţie pe Dunăre S. R. D. — Str. Radu-Vodă, 25. Bucureşti 5.
112	1922, Aug. 31	POPESCU ION. Inginer. — Director la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Popa Savu, 12 A. Bucureşti 2.
113	1928, Mai 9	POPOVICIU TIBERIU. Doctor în Matematici. — Seminarul de Matematici Universitatea Cluj.
114	1931, Mart. 11	POPP N. Lt.-Comandor. Inginer. — Preşedintele Comisiunii militare de recepţie la Uzinele I. A. R. Braşov.
115	1927, Mai 11	POPP TRAIAN. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Seminarul pedagogic universitar şi la Colegiul Naţional „Sf. Sava". — Parcul Delavrancea. Aleea D, 2. Bucureşti 2.
116	1929, Ian. 31	PORTOCALĂ MIHAI. Inginer. — Str. Sfinţilor, 45. Bucureşti 1.
117	1930, Aug. 31	POTOPEANU GHEORGHE. Colonel. — Comandantul Regimentului 2 Artilerie uşoară. — Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 2.
118	1925, Febr. 11	PROTOPOPESCU GRIGORE. Colonel de Artilerie. — Str. Ana Davila, 25. Bucureşti 6.
119	1927, Mai 11	RACLIŞ RODOLPHE. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Licenţiat în Ştiinţele Fizice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris.—Inginer Diplomat de l'École Supérieure d'Electricité de Paris.—Directorul Institutului Matematic Român, Profesor Bucureşti. — Aleea Vulpache, 21 (Parcul Filipescu). Bucureşti 3. Telefon 2244.
120	1910, Aug. 3	RADU E. M. Inginer Inspector General în Direcţiunea Apelor din Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. — Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Armenească, 24. Bucureşti 1.

121	1920, Aug. 15	REVICI TEOFIL. Inginer S. N. P. S. — Inginer-Şef în Direcţia de Poduri C. F. R.—Str. T. Masaryk, 20. Bucureşti.
122	1933, Febr. 22	ROŞU AL. Licenţiat în Matematici. — Controlor financiar — Str. Arcului, 16. Bucureşti 1. Telefon 25337.
123	1914, Dec. 20	ROŞU V. Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic. — Calea Victoriei, 2. Bucureşti.
124	1929, Aug. 28	SĂLĂGEANU AUREL. Inginer. — Director tehnic al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. — Str. Paris, 10. Bucureşti 2.
125	1904, Sept. 1	SALIGNY M. Inginer Inspector General. — Subdirectorul Serviciului Hidraulic. Profesor la Şcoala de Conductori de Lucrări Publice din Bucureşti. — Str. G. Gr. Cantacuzino, 50. Bucureşti 2.
126	1920, Ian. 10	SĂPUNARU S. GH. Inginer de Poduri şi Şosele.—Director General al Societăţii „Clădirea Românească". — Str. Pia Brătianu, 5. (Parcul Ioanid). Bucureşti 3.
127	1929, Aug. 28	SARIAN MIHAI. Inginer.—Inginer la Direcţiunea Atelierelor C. F. R. Griviţa. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.—Str. Columb, 9. Bucureşti 3.
128	1920, Aug. 15	ŞERBĂNESCU GH. VICTOR. Inginer.—Antreprenor de construcţii.— Str. Paleologu, 3. Bucureşti.
129	1928, Aug. 20	SERGESCU BARBU. Inginer dela Şcoala de Mine din Paris. Licenţiat în Matematici. Licenţiat în Drept.—Inginer la Societatea „Steaua Română".—Str. Lahovary, 12. Câmpina.
130	1919, Sept. 12	SERGESCU P. Doctor în Matematici. Licenţiat în Filosofie. — Profesor universitar.—Str. Berde, 3. Cluj.
131	1921, Febr. 5	SFINŢESCU I. CINCINAT. Inginer Inspector General. — Profesor la Academia de Arhitectură. Director General Technic la Municipiul Bucureşti.—Str. Barbu Delavrancea, 43. Bucureşti.
132	1934, Mai 2	SIMIONESCU D. GH. Licenţiat în Matematici. Profesor Liceul militar „Nicolae Filipescu" dela Mănăstirea Dealu. Târgovişte.
133	1910, Aug. 3	SMÂNTÂNESCU AUREL. Inginer Inspector General. — Subdirector General în Direcţia Generală a Drumurilor de Stat. — Str. Sf. Ştefan, 23. Bucureşti 4.
134	1933, Aug. 31	STAMATESCU I. GH. Inginer-Şef. — Inspector Principal în Direcţiunea Tracţiunei C. F. R.—Str. G-ral Lahovary, 87. Bucureşti 3. Telefon 235.75.
135	1933, Iulie 4	STAMATESCU I. Profesor la Liceul Matei Basarab şi Seminarul Pedagogic Universitar.—Str. Toamnei, 47. Bucureşti 3.
136	1920, Ian. 10	STAN D. Inginer.—Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Inginer la Soc. Anonimă Română de telefoane.— Aleea Mântuleasa, 1. Bucureşti 4.
137	1934, Mai 2	STOICA V. DUMITRU. Inginer. — Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti.—Directorul Societăţii de locuinţe eftine Bucureşti.—Str. Veronica Micle, 2. Bucureşti.
138	1927, Mai 11	TĂNĂSESCU A. General. — Inspectorul G-ral Tehnic al Armatei.— Str. Gr. Cantacuzino, 54. Bucureşti 2.

139	1928, Mai 9	TĂNĂSESCU A. TUDOR. Inginer. Licenţiat în Matematici.—Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Şeful Serviciului de Radio-Comunicaţii P. T. T.—Str. Salvator, 37. Bucureşti 6.
140	1900, Noem. 1	TEODOREANU V. Profesor la Liceul Naţional şi Liceul Militar din Iaşi.—Str. Elena Doamna, 39. Iaşi.
141	1934, Mai 2	TEODORESCU C. Inginer. Profesor şi Rector al Şcoalei Politehnice din Timişoara.
142	1911, Mai 18	TEODORESCU V. N. Inginer Inspector General. — Ministru al Industriei şi Comerţului.—Str. Aurel Vlaicu, 22. Bucureşti 3.
143	1929, Aug. 28	TEODORU D. RADU. Inginer-Şef. — Director la Direcţia Generală a exploatării monopolurilor. — Piaţa Lahovary, 1. Bucureşti 3.
144	1910, Mai 20	THIERRIN H. G. Licenţiat în Matematici.—Directorul Institutului „Schewitz-Thierrin".—Str. Scaune, 33. Bucureşti 1.
145	1921, Aug. 31	ŢINO O. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Str. Ştefan O. Iosif. Timişoara.
146	1929, Oct. 30	ŢIŢEICA GABRIELA. Licenţiată în Matematici. Inginer. — Asistentă la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Str. Dionisie, 80. Bucureşti 3.
147	1895, Noem. 1	ŢIŢEICA GH. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Secretar General al Academiei Române. Profesor la Facultatea de Ştiinţe şi la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Profesor agreat la Sorbona. — Str. Dionisie, 80. Bucureşti 3.
148	1919, Sept. 12	ULESCU AL. Inginer.—Directorul Uzinelor I. A. R.—Str. M. Eminescu, 4. Braşov.
149	1914, Dec. 10	VARDALA I. Inginer Inspector General. Diplomat al Şcoalei Centrale de Arte şi Manufacturi din Paris. — Director General al Administraţiei Comerciale a Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe Apă. — B-dul Take Ionescu, 38. Bucureşti 4.
150	1927, Mai 11	VASILACHE I. Inginer-Şef. — Profesor şi Subdirector al Şcoalei Superioare de Arte şi Meserii din Bucureşti. — Str. Polizu, 11. Bucureşti 2.
151	1927, Mai 11	VASILESCU FL. Doctor în Matematici. — Str. Eroului, 19. Bucureşti.
152	1920, Ian. 10	VASILESCU G. I. Inginer-Şef. — Str. I. G. Saita, 10. Bucureşti 1.
153	1923, Mart. 26	VASILESCU GR. Inginer.—Str. Costache Negri, 21. Bucureşti 6.
154	1932, Apr. 20	VASILIU GH. DAN. Inginer Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer la Monitorul Oficial.—B-dul Schitu Măgureanu, 47. Bucureşti 1. Telefon 36332.
155	1933, Febr. 22	VASILIU GH. Inginer.— Diplomat al Şcoalei Politehnice din Leoben. — Cartierul Grant C. F. R., Str. D, 51. Bucureşti 2.
156	1927, Aug. 26	VASILIU M. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Director în Ministerul Industriei şi Comerţului. — Str. Vaselor, 70. Bucureşti 4.
157	1933, Aug. 31	WOINAROSKY R. Licenţiat în Matematici. — Str. Manu Cavafu, 16. Bucureşti 5.

158	1924, Ian. 30	ZAMFIRESCU GRIGORE. Inginer. Diplomat S. N. P. S. Bucureşti 1920 şi E. S. A. Paris 1921.— Proprietarul fabricei de avioane „SET".— Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — B-dul Ferdinand, 168. Bucureşti 4.
159	1920, Sept. 28	ZAPAN GH. Doctor în Filosofie şi Ştiinţe dela Universitatea din Berlin. Licenţiat în Drept dela Universitatea din Iaşi. — Conferenţiar la Institutul Superior de Educaţie Fizică şi Director al Laboratorului de psihologie dela acelaşi Institut. Conferenţiar de psihotehnică la Facultatea de litere şi Filozofie dela Universitatea din Bucureşti. — Institutul de Educaţie Fizică, Str. Maior Ene, 12. Bucureşti 6. Telefon 39705.
160	1921, Mai 4	ZAPAN GRIGORE. Lt.-Comandor aviator. Inginer diplomat al Şcoalei Superioare de Aeronautică şi Construcţii Mecanice din Paris.— Profesor la Şcoala Pregătitoare de Ofiţeri şi la Şcoala de Ofiţeri de Aviaţie. — Casa „Gazeta Matematică". Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2.
161	1925, Aug. 26	ZLATCU ST. C. Inginer-mecanic dela Şcoala Politehnică din Zürich.— Antreprenor.—Parcul Regina Maria, 28. Bucureşti.

†

MEMBRII DECEDAŢI*)

	Data admiterii	Data morţii
1. ALEXANDRESCU T. I.	1928 Mai 9	1930 Sept. 5
2. ALEXANDRINI O.	1895 Noemvrie 15	1905 Sept. 6
3. BALABAN V.	1895 Sept. 15 (fondator)	1895 Sept. 22
4. CRISTESCU V.	1895 Sept. 15 (fondator)	1929 Martie 10
5. DAVIDESCU EM.	1895 Sept. 15 (fondator)	1905 Aug. 28
6. DORDEA TR.	1928 Ianuarie 26	1930 Apr. 30
7. ERBICEANU C.	1898 Septemvrie 15	1904 Apr. 3
8. EVOLCEANU V.	1927 Iannarie 28	1928 Oct. 19
9. LALESCU TR.	1905 Martie 1	1929 Iunie 15
10. MIRCEA N. ŞT.	1909 Iunie 1	1932 Ian. 15
11. MOŢOI I.	1906 Aprilie 1	1929 Ian. 16
12. NĂSTURAŞ D.	1909 Noemvrie 9	1930
13. NICOLAEVICI G.	1909 Iunie 1	1917
14. NICOLESCU N.	1895 Sept. 15 (fondator)	1924 Mai 5
15. ROCO M.	1895 Sept. 15 (fondator)	1931 Ian. 5
16. ROŞU AL.	1910 Iunie 21	1917 Apr. 17
17. SALIGNY A.	1914 Decemvrie 9	1925 Iunie 17
18. TEODOR D. I.	1906 Aprilie 1	1924 Iulie 30
19. TEODORESCU I. S.	1914 Iunie 12	1918 Dec. 22
20. ZOTTU I. G.	1895 Sept. 15 (fondator)	1902 Iulie 8

*) Aci sunt trecuţi numai redactorii şi membrii, cari au stat la *„Gazeta Matematică"* până la sfârşitul vieţii lor, în ordine alfabetică.

SUR LE TRIANGLE ISOCÈLE

1. Lemme. *Si dans un triangle* ABC *on a*

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}, \tag{1}$$

ce triangle est isocèle.

On sait en effet, (a, b, c, p étant les éléments habituels du triangle), que

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ca}}\ ,\ \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\ ;$$

d'où

$$(a+b)^2 \cdot c(p-b) = (a+c)^2 \cdot b(p-c), \tag{2}$$

soit, en développant et après réductions,

$$(c-b) \mid a^2p - bcp + bc(b+c) + 2abc \mid = 0. \tag{3}$$

Mais, comme $p < b+c$, le second facteur est positif et l'égalité (3) n'est réalisée que si $c = b$, autrement dit lorsque le triangle ABC, est isocèle.

Réciproquement, dans un triangle isocèle ABC, (BA = AC), l'égalité (1) est vérifiée, puisque $a+b = a+c$ et $B = C$.

2. Considérons un triangle *quelconque* ABC, (BC$=a$, CA$=b$, AB$=c$), dont les bissectrices intérieures BE, CF des angles B et C se coupent au centre I du cercle inscrit de rayon r. Soient d_b , d_c les distances du sommet A aux parallèles à BE, CF tracées par les sommets C et B.

Ou a ces relations d'aires, en grandeur et en signe,

$$S = ABC = \frac{1}{2}BE \cdot d_b = \frac{1}{2}CF \cdot d_c \tag{4}$$

$$CBAI = \frac{1}{2} \mid a+c \mid r = \frac{1}{2}BI \cdot d_b$$

$$ACBI = \frac{1}{2} \mid a+b \mid r = \frac{1}{2}CI \cdot d_c; \tag{5}$$

d'où on tire

$$\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{BI}{CI} = \frac{(a+c)\,d_c}{(a+b)\,d_b} = \sqrt{\frac{c\,(p-b)}{b\,(p-c)}}\,. \qquad (6)$$

Si l'on suppose que BE = CF, ce qui, en vertu de (4), entraîne $d_b = d_c$ l'expression (6)

$$(a+c)^2\,.\,b\,(p-c) = (a+b)^2\,.\,c\,(p-b)$$

est indentique à (2), ce qui vérifie à nouveau ce théorème :

Tout triangle qui a deux bissectrices intérieures égales est isocèle.

3. On retrouve la relation (3) en égalant les expressions bien connues

$$l_b^2 = \frac{4p\,(p-b)\,ac}{(a+c)^2}\,,\quad l_c^2 = \frac{4p\,(p-c)\,ab}{(a+b)^2}$$

des carrés des longueurs des bissectrices intérieures BE et CF.

Les expressions analogues concernant les bissectrices extérieures BE′, CF′ des angles B et C sont

$$l_{1b}^2 = \frac{4\,(p-a)\,(p-c)\,ac}{(a-c)^2}\,,\quad l_{1c}^2 = \frac{4\,(p-a)\,(p-b)\,ab}{(a-b)^2}\,,$$

et

$$l_b l_{1b} = \frac{4\,ac\,S}{a^2-c^2}\,,\quad l_c l_{1c} = \frac{4\,ab\,S}{a^2-b^2}\,,$$

puis

$$\frac{l_b l_{1b}}{l_c l_{1c}} = \frac{c\,(a^2-b^2)}{b(a^2-c^2)}\,.$$

Ou en déduit que si $l_b = l_c$, ce qui exige $b = c$, $l_{1b} = l_{1c}$. Mais la réciproque n'est pas vraie, car si $l_{1b} = l_{1c}$,

$$(a-b)^2\,.\,c\,(p-c) = (a-c)^2\,.\,b\,(p-b),$$

puis, après réductions

$$(c-b)\,|\,a^2p - bcp - a^2\,(b+c) + 2abc\,| = 0.$$

Cette égalité est vérifiée si $c = b$ et aussi lorsque

$$a^2p - bcp - a^2\,(b+c) + 2abc = 0.$$

Cette dernière relation, qui peut s'écrire

$$a^3 - a^2\,(b+c) + 3abc - bc\,(b+c) = 0$$

caractérise les triangles que l'on a appelés *pseudo-isoscèles.*

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“

Adunarea Generală a Societății *Gazeta Matematică* a hotărît, în şedinţa dela 22 August a. c. ţinerea unui concurs de matematici în cursul anului 1935 între elevii liceelor, civile şi militare, din ţară şi între elevii anului preparator al Şcoalei Politehnice «Regele Carol II».

Concursul va avea loc după Paşte, înainte de reînceperea cursurilor, în Bucureşti, unde se va da examen înscris şi oral, dacă Societatea va dispune de mijloace de a aduce candidaţii; dacă vor lipsi aceste mijloace, concursul se va ţine într'o Duminecă din luna Mai, în diferite centre din ţară, dându-se numai teze.

Deciziunea în această privinţă se va publica în numărul din Februarie 1935.

Fiecare candidat este obligat să se înscrie *la două din materiile clasei sale,* urmând a da la fiecare teză, iar în cazul ţinerii Concursului în Bucureşti, şi oral.

Pentru unitatea pregătirii, se va publica în numărul din Octomvrie al *Gazetei Matematice* un program, conţinând materia pe care candidatul unei anume clase va trebui să pregătească pentru obiectul la care e înscris.

Sub nici un motiv candidatul nu va fi scuzat de nepregătirea unor capitole trecute în programul clasei sale, pentru obiectul ales.

Cererile de înscriere se vor trimite *direct de candidaţi* D-lui Inginer Inspector General ION IONESCU, Bucureşti 4, Str. Căluşei Nr. 23, *în plicuri recomandate sau personal Domniei-Sale,* până cel mai târziu la 31 Decemvrie 1934.

Nu se primesc cereri trimise de părinţi, corespondenţi, profesori sau şcoli.

Cererile vor arăta neapărat, numerotate şi în ordinea arătată aci, următoarele date:

1. Numele şi pronumele scrise clar.

2. Clasa sau anul pregătitor în care urmează candidatul. Pentru cei pregătiţi în particular se va arăta şcoala la care a urmat anul precedent sau în care a depus examenul de fine de an pentru clasa precedentă.

3. Adresa în timpul şcoalei şi în timpul vacanţei Paştilor, pentru a se putea face comunicările şi înştiinţările necesare.

4. Dacă dispune de mijloace de a veni în Bucureşti, dacă are unde fi găzduit şi întreţinut aci în timpul concursului sau dacă unul din aceste mijloace ar urma să fie procurate de Societatea *Gazeta Matematică.*

Dacă are nevoie de bani pentru drum, va indica şi gara de unde va lua trenul pentru a veni la Bucureşti şi gara la care se întoarce după concurs.

5. Cele două materii la care se înscrie.

6. Activitatea sa la *Gazeta Matematică* sau la alte reviste din ţară şi străinătate.

Candidaţii înscrişi la concurs, dacă din diferite motive nu se mai pot prezenta, sunt obligaţi să anunţe din timp.

Părăsirea sălilor de concurs înscris este interzisă înainte de predarea tezelor.

Se atrage atenţiunea că toate condiţiunile, pentru inscriere şi ţinere a concursului, trebuesc respectate cu toată exactitatea inerentă ştiinţelor matematice.

In numărul 6 din Februarie 1935 se va publica modul de ţinere al concursului, localitatea, orele de prezentare şi numele candidaţilor admişi la concurs.

Numărul celor admişi va depinde de sacrificiile materiale ce se vor cere Societăţii *Gazeta Matematică,* pentru transportul, găzduirea şi întreţinerea candidaţilor şi de pregătirea pe care aceştia vor arăta-o în cererile ce vor face.

Candidaţii reuşiţi la concurs vor primi ulterior diplome, recompense, premii sau menţiuni. Primul care va reuşi la concurs, dintre elevii anului preparator de pe lângă Şcoala Politehnică «Regele Carol II» din Bucureşti, va primi premiul «ANGHEL SALIGNY» (de 1000 lei) oferit de un membru al Societăţii noastre, iar primul reuşit dintre toţi candidaţii va primi premiul «LT.-COL. G. TĂNĂSESCU» în cărţi, în conformitate cu înştiinţarea făcută în acest număr la articolul: *Premii şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice".*

Comisiunea examinatoare se va compune din membrii Societăţii *Gazeta Matematică,* care nu vor avea rude printre candidaţii admişi la concurs.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

BIBLIOTECA „GAZETEI MATEMATICE“

Nu va fi aci vorba de *„Biblioteca“* în care *Societatea „Gazeta Matematică“* tipăreşte cărţi de matematici pure şi aplicate, ori cărţi tecnice, şi ale cărei volume apărute sînt arătate pe ultima pagină a copertei fiecărui număr; aci mă voi ocupa de colecţiunea de cărţi şi de reviste pe care o posedă această Societate şi în care se cuprinde schimburile ce se fac cu *Gazeta Matematică,* cărţile ce i se trimit spre anunţare de apariţiune sau pentru recenziuni, cărţile donate Societăţii, - printre care cea mai însemnată donaţiune până azi este cea făcută de Familia lui I. D. RALLET, fost profesor la Facultatea de ştiinţe din Iaşi, constând din 184 volume,—şi din un mic număr de volume cumpărate de Societate, ca de exemplu, acum de curând, interesantele volume *„Instituzioni analitiche“* din 1798 ale celebrei matematiciane MARIA GAETANA AGNESI.

Casa „Gazeta Matematică“ este complet terminată, şi va fi inaugurată în curând, după ce se vor completa instalaţiunile interioare şi se va cumpăra mobilierul necesar. Acolo s'a prevăzut loc suficient pentru instalarea unei Biblioteci, astfel în cât depozitele Revistei şi cărţile Societăţii vor eşi din starea nomadă despre care am vorbit în articolul: *„Localul Societăţii Gazetei Matematice“* pe care l'am publicat în Anul XXXI, pag. 20 — 26. In noul Local s'a prevăzut şi o sală de lectură pentru persoane străine de Societate, în conformitate cu actul de donaţiune al terenului, despre care am vorbit în articolul citat mai sus.

Biblioteca Gazetei Matematice cuprinde azi peste 1000 de volume, broşuri şi extrase, în cea mai mare parte de matematici pure şi aplicate. Această cifră este cam mică pentru o revistă care are 39 de ani de viaţă continuă, — neîntreruptă nici în timpul războiului, — căci ea nu reprezintă decât 25 volume anual în mediu. Faptul acesta însă nu trebuie să surprindă: Scopul vechei *„Redacţiuni“* şi al actualei *„Societăţi“*, care scoate *Gazeta Matematică,* a fost apariţiunea regulată a Revistei şi a sporirii ei în raport cu cerinţele propăşirii ştiinţelor la noi în ţară. Pentru realizarea acestor scopuri s'a depus dezinteresat toată munca, s'au făcut toate sforţările şi s'au folosit toate resursele. Formarea unei *Biblioteci* nici nu a intrat printre scopurile întemeietorilor *Gazetei Matematice,* din cauză că nu avem unde o ţine, cu ce o întreţine şi cum să o facem utilă

cercetărilor în domeniul ştiinţelor matematice. Crearea actualei *Biblioteci* este numai o consecinţă, un rezultat al apariţiunii regulate şi îndelungate a *Gazetei Matematice.* Am spus deja, că foarte rar s'a cumpărat câte o carte. Noul Local al Societăţii dă posibilitatea creierii şi întreţinerii unei *Biblioteci,* şi face să dispară piedicile semnalate mai sus.

Până la amortizarea datoriilor făcute pentru construcţiune şi mobilier, veniturile Localului nu vor putea servi şi pentru mărirea *Bibliotecii.* Mai mult încă, această stare se va prelungi şi mai departe, din cauză că veniturile disponibile vor trebui folosite în prima linie pentru sporirea *Gazetei Matematice,* căci ea nu mai poate face faţă azi cerinţelor de publicare pe care le primeşte. In timpul anului trecut a trebuit să adăogăm 8 pagini în plus, iar dela 1 Octomvrie înainte se va publica un *„Supliment“* de 8 pagini lunar, pentru uzul Şcoalelor secundare. Avem azi articole care aşteaptă tipărirea de 1 an de zile şi probleme rezolvate care aşteaptă câte 2 — 5 ani, până să le vină rândul la publicare.

In aceste condiţiuni sporirea *Bibliotecii Gazetei Matematice* nu se poate face mai intens decât azi, prin cumpărare de cărţi. Singurele isvoare care ar mai putea mări debitul sunt donaţiunile desinteresate benevole. In acest scop apelăm la foştii şi actualii colaboratori, corespondenţi şi cititori ai *Gazetei Matematice,* de a dărui din publicaţiunile matematice pe care le fac, din cărţile pe care le posed în mai multe exemplare, sau din cele ce nu le mai sunt folositoare. Pe cărţile donate se va scri numele donatorului, care se va trece şi în o *Carte,* aparte de cataloagele *Bibliotecii.* Ele vor fi anunţate şi în Revistă sub rubrica *„Sporirea Bibliotecii“,* care va figura la începutul Capitolului *„Diverse“,* după cum se indică şi în numărul de faţă. Cărţile noi primite pentru anunţare şi recenziune se vor menţiona, ca şi până acum, la Capitolul *„Bibliografii“.* Acestea nu se socotesc ca donaţiuni întrucât Societatea face gratuit serviciul de anunţare şi recenzionare.

Biblioteca Societăţii Gazeta Matematică va avea o *„Secţiune retrospectivă“* în care se vor păstra, sub o bună pază, cărţi, manuscrise, cursuri, scrisori, etc., care să poată folosi celor ce cercetează trecutul ştiinţelor matematice şi al învăţământului lor, în genere, sau în special pentru ţara noastră. In acea Secţiune se vor păstra şi corespondenţe, autografe, portrete etc., ale unor matematicieni sau

profesori de matematici; tot acolo se vor ţine aparatele, instrumentele, şi unele relicve, ca de exemplu *Compasul* adus de Regretatul nostru Coleg MAIORUL I. S. TEODORESCU după războiul din Bulgaria, şi *Revolverul* adus de Colegul nostru MAIORUL I. LINTEŞ, dela ocuparea Budapestei de către Armata Română. Pentru acea Secţiune donez şi eu *Placa de ardesie* pe care am învăţat Aritmetica în clasa I primară a Şcoalei din Comuna Creaţa Leşile, Judeţul Ilfov, în Anul 1877 — 78.

Sperăm că acest apel, care urmăreşte crearea unei noi pârghii pentru ridicarea învăţământului matematicilor şi al ştiinţelor în legătură cu ele, va avea urmările dorite şi că rubrica *„Sporirea Bibliotecii"* nu va lipsi din nici unul din numerele *Gazetei Matematice!*

I. IONESCU.

PREMIILE ŞI ALTE DISPOZIŢIUNI ALE FONDURILOR „GAZETEI MATEMATICE"

PENTRU

CURSUL ANULUI 1934 — 1935

(1 Septemvrie 1934 —31 August 1935)

In conformitate cu dispoziţiunile art. 12 din Regulamentul general al administrării fondurilor *Gazetei Matematice,* subsemnaţii membrii ai Comisiunii pentru controlul gestiunii fondurilor şi pentru privigherea la îndeplinirea prevederilor regulamentare ale fiecărui fond, desemnaţi în adunarea generală dela 31 August 1933, aducem la cunoştinţă următoarele:

1. Din venitul anual al fondului «SPIRU C. HARET», potrivit dispoziţiunilor Regulamentului pentru administrarea lui, se cumpără cărţi de matematici pure şi aplicate (literatură matematică, istoria matematicilor, recreaţiuni matematice, etc.) care se donează bibliotecilor şcolare dela şcolile secundare sau corespondenţilor meritoşi, elevi ai acestor şcoli.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică,* Anul XXXVIII, pag. 170.

In loc de cărţi se pot dona aparate sau modele necesare învăţământului matematic.

In baza hotărîrii luate de adunarea generală dela 29 August 1934, cărţile ce se vor procura din venitul fondului pe anul 1934, s'a destinat să se doneze Seminarului Pedagogic din Cluj.

2. Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare, din venitul fondului «GENERAL SC. PANAITESCU», se acordă cele mai bune lucrări de matematică aplicată la studiile militare, publicate în cursul anului.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică*, Anul XXXVIII, pag. 213.

Studiile în manuscris care se aduc la cunoştinţa Societăţii pe orice cale, se iau şi ele în consideraţie la acordarea premiului.

Autorii publicaţiunilor prezentate trebue să fie români, sau să-şi fi făcut cultura matematică în ţară.

Premiul este indivizibil şi se acordă neapărat în fiecare an. In cazul când nu se găseşte nici o lucrare de premiat sau în cazul când autorul lucrării premiate nu voeşte a primi suma fixată, ea se dă uneia din revistele militare în care se publică şi chestiuni de matematică aplicată la ştiinţele militare.

Raportul Comisiunii însărcinate cu acordarea premiului se publică în numărul *Gazetei Matematice* din Octomvrie.

3. Premiul «VASILE CONTA», din fondul constituit de *Gazeta Matematică*, se acordă pentru a recompensa cea mai bună lucrare originală de filozofia matematicilor.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică*, Anul XXXVIII, pag. 246.

Autorul trebue să fie român şi să-şi fi făcut studiile secundare în ţară.

Lucrările trebuesc trimise Societăţii pânăla 1 Iulie ale fiecărui an, iar rezultatul se va publica în numărul din Noemvrie al *Gazetei Matematice*.

Dacă pânăla acea dată nu se prezintă nici o lucrare, se va aştepta data de 1 Iulie a primului an când se va prezenta o asemenea lucrare.

Premiul constă din totalitatea venitului fondului cumulat pânăla data acordării.

4. Premiul bienal «INGINER H. CAPRIEL», pentru lucrări de matematici superioare, pure sau aplicate, se acordă celei mai bune lucrări ce se va prezenta Societăţii, de către studenţii Universităţilor,

elevii şcolilor Politehnice sau elevii şcolilor militare de Aeronautică, Artilerie, Geniu şi Marină din ţară.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică*, Anul XXXVIII, pag. 327.

Subiectul lucrării pentru premiul pe anul 1936 se va anunţa în *Gazeta Matematică*, Anul XL, No. 9 (pe luna Mai).

Lucrările — semnate de autor — trebuesc trimise Societăţii cel mai târziu pânăla 1 Mai 1936, iar rezultatul se va publica în numărul din Decemvrie 1936 al *Gazetei Matematice*.

Premiul constă din venitul fondului «INGINER H. CAPRIEL» şi este indivizibil, iar în cazul când nu se acordă el măreşte fondul.

5. Din venitul fondului «LT.-COLONEL G. A. TĂNĂSESCU» urmează să se dea cărţi de matematici celui clasificat întâiul la concursurile anuale ale *Gazetei Matematice*.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică*, Anul XXXVIII, pag. 171.

In anii când aceste concursuri nu au loc, veniturile măresc fondul.

6. Premiul Inginer «VASILE CRISTESCU», se acordă din venitul fondului «VASILE CRISTESCU», autorului celui mai bun articol referitor la geometria triunghiului sau la trigonometrie, publicat în ultimul volum apărut al *Gazetei Matematice*.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică*, Anul XXXVIII, pag. 125.

Autorul articolului trebue să fie elev de liceu, de şcoală militară, de şcoală politehnică sau student de facultate.

Premiul este indivizibil şi anual, iar în cazul când într'unul sau mai mulţi ani dearândul nu s'au publicat articole putând fi premiate, premiul se cumulează pânăla acordarea lui.

Raportul comisiunii însărcinate cu decernarea premiului se publică în numărul din Iunie al *Gazetei Matematice*.

7. Din venitul fondului «ANGHEL SALIGNY», destinat să servească la înfiinţarea «Bibliotecei tehnice a *Gazetei Matematice*», urmează să se publice lucrări complete de matematici aplicate, sau cu cuprins tehnic în legătură cu aceste ştiinţe.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică* Anul XXXVIII, pag. 289.

Până în prezent delegaţiunea Societăţii n'a primit nici un manuscris care să poată fi publicat din acest fond, în cursul anului 1934 — 1935.

8. In «Biblioteca *Gazetei Matematice*», destinată publicării de cărţi privitoare la matematicile pure (cu caracter didactic sau ştiinţific), la matematicile aplicate, la filozofia sau istoria lor, precum şi la orice fel de lucrare cu caracter matematic, se va publica : Culegere de probleme de aritmetică, Partea I-a de I. IONESCU.

COMISIUNEA PENTRU PREMII :

IOAN BUŞILĂ, (ss) GH. ILIESCU.

NOTE MATEMATICE

1. *Revistele matematice elementare în Argentina.* In cursul acestei veri, D-l B. I. BAIDAFF, membru al *Societăţii „Gazeta Matematică"* din Anul 1924, fost corespondent ieşean al revistei noastre, a împlinit 25 de ani de activitate matematică, remarcabilă pentru ridicarea nivelului matematicilor elementare. Educat la Şcoala *Gazetei Matematice,* după stabilirea D-sale la Buenos Aires a văzut că acolo lipseşte o revistă de matematici în genul revistei noastre şi a înjghebat o asociaţie de Profesori şi Ingineri cu cari a început, în anul 1919, publicarea unei reviste: **„Revista de matematicas y fisicas elementales"** după modelul *Gazetei Matematice, „un copil spiritual"* al ei, după expresiunea D-lui BAIDAFF. Revista a avut şi corespondenţi din România printre cari s'a distins regretatul TRAIAN DORDEA.

Sacrificiile mari ce avea de suportat acea Asociaţie şi indiferenţa lumii ştiinţifice şi a profesorilor din Argentina pentru acea manifestare a făcut ca să se întâmple cu acea revistă acelaşi lucru ca şi cu vechea revistă ieşeană: **„Recreaţii Ştiinţifice"**, adică să înceteze după cinci ani de apariţiune. Insă impulsiunea pe care vechiul corespondent al *Gazetei Matematice* a primit-o dela revista noastră, nu l'a lăsat liniştit, aşa că imediat ce a putut suporta singur sarcinile tipăririi unei reviste noui de matematici, a făcut acest lucru, scoţând în 1928 revista **„Boletin Matematico"**. Această revistă este scrisă de D-sa şi susţinută numai cu sacrificii făcute de D-sa. Pentru ca să dea impresiunea că este susţinută şi de alţii a mers

până acolo încât, în afară de articolele, notele şi problemele publicate sub numele D-sale propriu, publică şi altele sub pseudonime!

Pentru a face accesibilă revista începătorilor în studiul matematicilor a dedublat Buletinul său, publicând din 1930 o parte mai elementară: *„Boletin matematico elemental"*, iar de doi ani încoace un al treilea cu diferite chestiuni şi informaţiuni matematice, un *„Supplemento informativo"*. Toate aceste sunt completate, redactate şi publicate de D-l B. I. BAIDAFF.

Criza care bântuie lumea întreagă se resimte puternic şi în Argentina astfel că sacrificiile ce le face D-sa sunt foarte mari, din cauză că şi mediul ştiinţific din Argentina e mai puţin prielnic ca la noi.

Pentru încurajarea acestor reviste, fiice ale *Gazetei Matematice,* ce trăiesc în o ţară sororă latină, sfătuim pe tinerii dela noi a se abona şi lucra la dânsele după puterile lor. Prin această colaborare, nu numai că îşi vor întări mai mult cunoştinţele matematice, dar se vor deprinde să citească, fără mari sforţări, limba spaniolă care se apropie mult de a noastră. In aceste Buletine vor găsi deseori traduse chestiuni din *Gazeta Matematică* şi din *Revista matematică din Timişoara,* aşa că din compararea textelor se poate căpăta cu înlesnire un mijloc de a controla traducerile. Pe de altă parte, D-l B. I. BAIDAFF primeşte şi soluţiuni sau manuscrise în limba română, D-sa oferindu-se a le traduce în limba spaniolă pentru publicare. Nu strică chiar ca corespondenţii să încerce a da soluţiunile în limba spaniolă, prin imitarea redactării la soluţiunile de probleme analoage. Această operaţiune este azi foarte mult înlesnită prin prima carte de gramatică spaniolă publicată anul acesta în limba română de D-l IMDALECIO GIL Y REFLERO, profesor de limba spaniolă, cu titlul: *„Limba spaniolă. Gramatica. Literatura. Lectura"* şi prin cursuri de limba spaniolă ce se predau la unele din Liceele noastre. Abonamentele pentru revistele de care vorbirăm aci se pot face şi la *Gazeta Matematică.*

Noi exprimăm D-lui B. I. BAIDAFF, cu ocaziunea jubileului său de 25 de ani de activitate matematică, toate urările de sănătate deplină şi cele mai călduroase felicitări pentru frumoasa activitate ce desfăşoară în America de Sud pentru răspândirea culturii ştiinţifice şi pentru legătura pe care o ţine în acest domeniu între cele două ţări surori: Argentina şi România.

ION IONESCU.

2. *Soluțiile întregi ale ecuației.*

$$xx' + yy' = zz'.$$

Pentru cazul când x, y, z, x', y', z' sunt numere de 0 cifre, soluțiile acestei ecuații au fost date de D-l I. IONESCU sub forma unui tabel în *Gazeta Matematică,* Vol. XXXVIII, pag. 128.

Prin nota de față, vreau să informez că aceiași ecuație a fost propusă în problema 760 dată tot de D-l I. IONESCU. Soluția completă a problemei 760 este publicată în Vol. VIII, pag. 190.

La finele soluției problemei 760, în o notă, se dau și soluțiile aceleiași ecuații în sistemele cu baza 9, 8 și 7.

COL. GH. BUICLIU.

3. *O generalizare a problemei 3825.* Proprietatea stabilită în această problemă în soluția dată la pag. 195, Vol. XXXV, se extinde și la poligoane după cum urmează:

Fie $A_1A_2 \ldots A_n$ *un poligon înscris în cercul* O *și* $B_1B_2 \ldots B_n$ *poligonul format de tangentele în* $A_1, A_2, \ldots A_n$. *Un punct* P *de pe cerc se proectează în* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *pe laturile primului poligon și în* $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ *pe laturile celuilalt poligon. Să se arate că avem relațiunea*

$$\overline{P\alpha_1} \cdot \overline{P\alpha_2} \ldots \overline{P\alpha_n} = \overline{P\beta_1} \cdot \overline{P\beta_2} \ldots \overline{P\beta_n}.$$

Pentru a evita o demonstrație legată de figură, voi da demonstrația analitică a acestei proprietăți. Fie

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ecuația cercului O și $(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $(r\cos\theta_i, r\sin\theta_i)$ coordonatele punctelor P și A_i. Ecuația dreptei $A_i A_k$ este

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ r\cos\theta_i & r\sin\theta_i & 1 \\ r\cos\theta_k & r\cos\theta_k & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Distanța $P\alpha_i$ a punctului P la această latură este

$$\overline{P\alpha_i} = \frac{\begin{vmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta & 1 \\ r\cos\theta_i & r\sin\theta_i & 1 \\ r\cos\theta_k & r\sin\theta_k & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{r^2(\sin\theta_i - \sin\theta_k)^2 + r^2(\cos\theta_i - \cos\theta_k)^2}} = \frac{M}{N}.$$

Avem însă relațiunile, ușor de urmărit ;

$$M = r^2[\cos\theta(\sin\theta_i - \sin\theta_k) - \sin\theta(\cos\theta_i - \cos\theta_k) - \sin(\theta_i - \theta_k)]$$

$$= 2r^2 \sin\frac{\theta_i - \theta_k}{2}\left[\cos\theta\cos\frac{\theta_i + \theta_k}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta_i + \theta_k}{2} - \cos\frac{\theta_i - \theta_k}{2}\right]$$

$$= 2r^2 \sin\frac{\theta_i - \theta_k}{2}\left[\cos\left(\theta - \frac{\theta_i + \theta_k}{2}\right) - \cos\frac{\theta_i - \theta_k}{2}\right]$$

$$= -4r^2 \sin\frac{\theta - \theta_i}{2}\sin\frac{\theta - \theta_k}{2}\sin\frac{\theta_i - \theta_k}{2}$$

$$N = 2r^2[1 - \cos(\theta_i - \theta_k)] = 4r^2\sin^2\frac{\theta_i - \theta_k}{2}.$$

Deci

$$\overline{P\alpha_i} = 2r\sin\frac{\theta - \theta_i}{2}\sin\frac{\theta - \theta_k}{2}$$

și

$$(1)\quad \overline{P\alpha_1}\cdot\overline{P\alpha_2}\cdots\overline{P\alpha_n} = (-2r)^n\cdot\sin^2\frac{\theta - \theta_1}{2}\cdot\sin^2\frac{\theta - \theta_2}{2}\cdots\sin^2\frac{\theta - \theta_n}{2}.$$

Ecuația tangentei în A_i la care este

$$x\cos\theta_i + y\sin\theta_i = r$$

iar distanța $\overline{P\beta_i}$ este dată de

$$\overline{P\beta_i} = r\cos\theta\cos\theta_i + r\sin\theta\sin\theta_i - r = -2r\sin^2\frac{\theta - \theta_i}{2}.$$

Deci

$$(2)\quad \overline{P\beta_1}\cdot\overline{P\beta_2}\cdots\overline{P\beta_n} = (-2r)^n\cdot\sin^2\frac{\theta - \theta_1}{2}\cdot\sin\frac{\theta - \theta_2}{2}\cdots\sin^2\frac{\theta - \theta_n}{2}.$$

Relațiile (1) și (2) rezolvă problema.

C. COȘNIȚĂ.

4. *Soluția geometrică a generalizării din Nota precedentă,* nu întâmpină nici o dificultate din cauza figurei. E destul să se demonstreze proprietatea pentru un patrulater ca să apară evidentă și pentru un poligon oarecare.

Fie P_1 proecţia lui P pe diagonala A_1A_3 a patrulaterului $A_1A_2A_3A_4$. Conform problemei 3825 avem, pentru triunghiurile $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$:

$$\overline{P\alpha_1} \cdot \overline{P\alpha_2} \cdot \overline{PP_1} = \overline{P\beta_1} \cdot \overline{P\beta_2} \cdot \overline{P\beta_3}$$

$$\overline{PP_1} \cdot \overline{P\alpha_3} \cdot \overline{P\alpha_4} = \overline{P\beta_1} \cdot \overline{P\beta_3} \cdot \overline{P\beta_4}$$

de unde prin înmulţire

$$\overline{P\alpha_1} \cdot \overline{P\alpha_2} \cdot \overline{P\alpha_3} \cdot \overline{P\alpha_4} \cdot \overline{PP_1}^2 = \overline{P\beta_1} \cdot \overline{P\beta_2} \cdot \overline{P\beta_3} \cdot \overline{P\beta_1} \cdot \overline{P\beta_3} \cdot \overline{P\beta_4}$$

dar se cunoaşte din orice geometrie elementară că distanţa unui punct P de pe un cerc la o coardă A_1A_4 este medie proporţională a distanţelor aceluiaşi punct la tangentele duse în extremităţile coardei. Deci

$$\overline{PP_1}^2 = \overline{P\beta_1} \cdot \overline{P\beta_3}$$

şi proprietatea e demonstrată pentru un patrulater. Se deduce imediat şi la fel pentru pentagon, exagon, etc.

COL. GH. BUICLIU.

5. *Asupra problemei No. 4348.*

Am arătat că forma generală a ecuaţiei din problema cu numărul de mai sus, este.

$$\cos 5nx - \cos 4nx - \cos 3nx + 1 = 0.$$

Vom rezolvi acum o formă ceva mai generală şi anume ecuaţia:

$$\cos 5nx - p\cos 4nx - \cos 3nx + p = 0.$$

Este suficient să observăm că ea se mai poate scrie:

$$\cos 5nx - \cos 4nx - \cos 3nx + 1 + (p-1)(1 - \cos 4nx) = 0$$

ca prin transformări succesive s'o aducem la forma echivalentă:

$$4 \sin nx \sin 2nx \left[2 \sin \frac{n}{2} x \sin \frac{3n}{2} x - 2(p-1) \sin^2 \frac{n}{2} x + (p-1) \right] = 0.$$

Ocupându-ne numai de ecuaţia dintre paranteze, unde pentru uşurinţă vom face $\frac{nx}{2} = y$, obţinem

$$2 \sin y \sin 3y - 2(p-1) \sin^2 y + (p-1) = 0$$

şi care devine, după ce am desvoltat pe $\sin 3y$ şi după ce am făcut înlocuirea $\sin^2 y = z$,

$$8z^2 + 2(p-4)z - (p-1) = 0 \quad Z = \frac{(4-p) \pm \sqrt{p^2+8}}{8}.$$

Pentru $p = 1$, $z' = 0$, $\sin y = 0$ deci şi $\sin 3y = 0$, cu alte cuvinte apar şi factorii cazului particular:

$$\sin \frac{nx}{2} = 0 \; ; \; \sin \frac{3n}{2} x = 0.$$

In afară de mici observaţiuni, problema ce ne-am propus nu a prezentat dificultăţi; ea este deci rezolvabilă şi se discută în raport cu valorile lui p.

LT. C-DOR. GH. N.

6. *Relaţiuni trigonometrice.*

Majoritatea relaţiunilor ce leagă diferite elemente ale unui triunghiu oarecare se stabilesc pornind dela relaţiunile fundamentale

$$(1) \qquad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Vom transforma aceste relaţiuni în altele, cu ajutorul cărora putem stabili alte relaţiuni sau putem găsi soluţiuni mai simple relaţiunilor cunoscute. Iată câteva forme interesante ale rel. (1):

$$\frac{ab}{\operatorname{cosec} C} = \frac{bc}{\operatorname{cosec} A} = \frac{ca}{\operatorname{cosec} B} = 2S.$$

$$\frac{b+c-a}{\cot \frac{1}{2}A} = \frac{c+a-b}{\cot \frac{1}{2}B} = \frac{a+b-c}{\cot \frac{1}{2}C} = 2r.$$

$$\frac{a}{\cot \frac{1}{2}B + \cot \frac{1}{2}C} = \frac{b}{\cot \frac{1}{2}C + \cot \frac{1}{2}A} = \frac{c}{\cot \frac{1}{2}A + \cot \frac{1}{2}B} = r.$$

$$\frac{bc}{h_a} = \frac{ca}{h_b} = \frac{ab}{h_c} = 2R.$$

$$\frac{a^2}{1-\cos 2A} = \frac{b^2}{1-\cos 2B} = \frac{c^2}{1-\cos 2C} = 2R^2.$$

$$\frac{a(p-a)}{1+\cos A} = \frac{b(p-b)}{1+\cos B} = \frac{c(p-c)}{1+\cos C} = \frac{2R}{P}.$$

$$\frac{a^2-b^2}{\cos 2B-\cos 2A} = \frac{b^2-c^2}{\cos 2C-\cos 2B} = \frac{c^2-a^2}{\cos 2A-\cos 2C} = 2R^2.$$

Pentru stabilirea relaţiunilor ne vom folosi mai ales de proprietăţile elementare ale proporţiilor.

N. ZAHARIA
(Constanţa).

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XL. No. 5. Mai 1934. New-York. Adunarea din Martie dela New-York. de J. R. KLINE. Adunarea din Aprilie dela Chicago, de M. H. INGRAHAM. Opera lui POINCARÉ asupra ecuaţiilor diferenţiale, de G. D. BIRKHOFF. EISENHART asupra grupurilor continui, de A. WINTNER. Sumare de comunicări.

Idem. No. 6. Iunie 1934. Grupuri primitive simplu transitive, de MARIE J. WEISS. Asupra sumabilităţii seriilor derivate conjugate de tipul FOURIER-LEBESQUE, de A. H. SMITH. Despre convergeţa în variaţiune, de C. R. ADAMS & J. A. CLARKSON. Tipuri de transformaţiuni de spaţiuri involutoriale asociate cu unele curbe raţionale, curbe cu bază compusă, de A. BLACK. O transformaţiune de linii involutoriale, de J. M. CLARKSON. O reducţiune în număr a postulatelor pentru sistemul LEWIS de strictă implicaţiune, de J. C. C. MCKINSEN. Notă asupra funcţiunii de rezistenţă a lui AIRY, de J. H. A. BRAHTZ. O varietate algebrică de k dimensiuni în spaţiul cu r dimensiuni, de B. C. WONG. Despre lipsa de finitate a numărului-clasă în o semi-simplă algebră, de C. G. LATIMER. Curbe convexe ale lui KASNER, de M. HALPERIN. O transformaţiune de linie involutorială determinată de o congruienţă bilineară de curbe cuartice răsucită eliptic, de V. SNIDER & J. M. CLARKSON. Traiectorii dinamice şi traiectorii de curbură, de E. KASNER. Asupra metodei de sumare slabă a lui NEVANLINNA, de A. F. MOURSUND. Despre matrice de produse directe, de W. E. ROTH. Asupra unei teoreme a lui PALEY, de L. FEJÉR. Notă asupra formei ecuaţiilor diferenţiale parţiale de primul ordin, de A. B. BROWN. Teoria deducţiunii a lui WHITEHEAD şi RUSSEL ca o ştiinţă matematică, de E. J. NELSON. Problema lui WARING pentru puterea a noua, de L. E. DICKSON. O notă de R. L. PEEK. Notă asupra unei integrale singulare, de E. P. NORTHROP. O corecţiune şi o adiţiune de D. L. LEHMER.

Collins. *The* (r, x) *system of coordinates and ist place in analytic geometry and calculus.* Menasha, Wisconsin. 1934.

Autorul arată că luând abscisa x şi raza vectoră r ca sistem de coordonate se poate trata mai simplu multe chestiuni de geometrie analitică. Ecuaţia unei conice este $r = e\ (x + p)$. Se arată care este ecuaţia tangentelor, cum se găsesc arii, etc. Se extinde sistemul la geometria analitică în spaţiu.

I. I.

Mathesis. Tomul XLVIII. No. 7. Iulie 1934. Gembloux. Asupra trisecantei lui DELANGES, de R. GOORMAGHTIGH. Relativ la o chestiune de examen. Asupra cuarticilor tricuspidale, de R. DEAUX. Deslegarea unei probleme cu două curbe pentru ecuaţia semiparabolică de ordinul trei şi de categoria patru, de M. WINANTS.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIV. No. 6. August 1934. Timişoara. Generalizarea noţiunilor de polară şi plan polar, de C. COŞNIŢĂ. O teoremă de calcul vectorial, de T. VESCA.

R. ESTEVE & H. MITAULT. *Eléments de geométrie plane à l'usage des classes de 4-e et 3-e de l'enseignement secondaire.* Tome I. *La droite et le cercle.* Paris 1934.

In o broşură de 114 pagini format 16×10 autorii publică un curs de geometrie elementară care diferă, ca ordine a chestiunilor, de cea clasică. S'a căutat să se facă tot ce e posibil fără postulatul lui EUCLIDE. Iată înşirate aci chestiunile tratate în ordinea lor: Figuri geometrice, egalitate, linie dreaptă, semi-dreaptă, segmente, măsura segmentelor, plan, semi-plan, unghiu, măsura unghiurilor, cerc, arc de cerc, măsura arcelor de aceiaşi rază, măsura arcelor şi măsura unghiurilor, studiul asemănării, propoziţiuni; perpendiculare, unghiuri suplimentare şi complimentare, unghiuri opuse la vârf, simetrie în raport cu o dreaptă şi cu un punct; egalitatea a două linii poligonale convexe, a două linii frânte convexe, a două triunghiuri; triunghiul isoscel, simetria triunghiului isoscel, aplicare la cercetarea noilor cazuri de egalitate ale triunghiurilor; natura unghiurilor unui triunghiu, inegalităţi între laturi, aplicaţiuni; drepte paralele, proprietăţi fundamentale; postulatul lui EUCLIDE şi datele lui imediate, poziţiunea relativă a două cercuri; unghiuri cu laturi paralele sau perpendiculare, construcţiuni; suma unghiurilor unui poligon convex, unghiu înscris, patrulater inscriptibil; trapez, paralelogram, dreptunghiu, romb, patra, paratele echidistante; drepte concurente în triunghiu, linii frânte convexe, poligoane convexe circomscriptibile, despre câteva poligoane convexe regulate; exerciţii, în număr de 160.

Autorii anunţă încă trei broşuri pentru completarea studiului geometrii elementare plane şi în spaţiu.

Volumul de care ne ocuparăm merită să fie studiat de profesorii de matematică căci vor găsi lucruri interesante în el.

I. I.

V. THÉBAULT. *Sur les points de contact du cercle des neuf points d'un triangle avec les cercles tangents aux trois cotés.* (Supliment la *Mathesis*).

CL. SERVAIS. *Sur la géométrie du tétraèdre.* (Extras din *Bulletin de l'Académie royale de Belgique.* Bruxelles 1934. Supliment la *Mathesis*).

CERERI

Răspuns la cererea No. 221.

In 1884 JULIU J. GORONEANU, Inginer, vechiu elev al Şcoalei de Geniu ciyil din Gand, Director al Şcoalei de Meserii din Ploieşti a tradus o carte a lui GH. ARMENGAUD JEUNE, întitulată:

«Maiestrul mecanic sau Călăuza Mecanicei aplicate cu tabele şi calcule», în Ploieşti 1884. Cap. VII din această carte este întitulată: *«Rezistenţa Materialelor».* Autorul zice *putere* în loc de forţă; solicitărilor le zic *tracţiune, compresiune* sau *sfărâmare, flecţiune, torsiune.* Capitolul conţine 27 pagini, de 90×60 cm.

Rămâne dar de cercetat scrierile anterioare lui 1884.

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecei. A. LEFÈVRE. *Nouveau traité géométrique de l'Arpentage* à l'usage des personnes qui se destinent à l'état d'arpenteur, au lever des plans et aux opérations de nivelement. Quatrième édition. Entièrement refondu et augmenté d'un traité de *Géodésie pratique.* Paris 1826.

Donaţiune făcută de D-l MIHAIL VASILIU, inginer.

W. AHRENS. *Briefwechsel zwischen* C. G. JACOBI *und* M. H. JACOBI. Mit zwei Bildnissen. Leipzig 1907.

Donaţiune făcută de D-l I. IONESCU, inginer.

LT.-COL. GH. I. POPESCU. *Apărarea antiaeriană.* Timişoara 1922.

Donaţiune făcută de D-l I. IONESCU, inginer.

PROBLEME REZOLVATE *)

PROBLEMA 2913. *Fie* B_1 , C_1 , A_1 *intersecţiile cercurilor adjuncte* (BC), (CA), (AB) *ale triunghiului* ABC *cu laturile lui,* C_2 , A_2 , B_2 *intersecţiile cercurilor adjuncte* (CB), (AC), (BA) *cu laturile triunghiului.*

Să se demonstreze că cercurile de greutate ale triunghiurilor $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ *sunt în linie dreaptă cu punctul simedian al triunghiului* ABC.

MIRON NICOLESCU.

Soluţie mecanică. Cercul (AC) tangent în A laturei AB, taie pe BC în A_2, astfel ca $BA_2 . BC = BA^2$, $BA_2 = \frac{c^2}{a}$ deci $CA_2 = \frac{a^2 - c^2}{a}$ şi se poate considera A_2 ca centru de greutate al maselor $a^2 - c^2$, c^2 plasate în B şi C. Deasemenea masele $b^2 - a^2$, a^2 plasate în C, A dau punctul B_2 şi $c^2 - b^2$, b^2 în A, B dau pe C_2. Centrul de greutate al acestor puncte, este deci centrul de greutate G_2 al maselor :

$$c^2 + a^2 - b^2 \ , \ a^2 + b^2 - c^2 \ , \ b^2 + c^2 - a^2$$

plasate în A, B, C. Deasemenea G_1 se poate considera, în urma unui raţionament analog, ca centru de greutate al maselor :

$$a^2 + b^2 - c^2 \ , \ b^2 + c^2 - a^2 \ , \ c^2 + a^2 - b^2$$

plasate în vârfuri.

Se obţine deci punctele G_2 , G_1 permutând ciclic în sensul $a-b-c$, masele :

$$b^2 + c^2 - a^2 \ , \ c^2 + a^2 - b^2 \ , \ a^2 + b^2 - c^2$$

plasate în vârfurile triunghiului ABC, sau, ceeace e tot una, al maselor proporţionale cu patratele laturilor opuse, corespunzătoare lui, plasate în vârfurile triunghiului anticomplimentar, al căror centru e punctul simedian al acestui triunghiu.

Proprietatea problemei rezultă în baza teoremei cunoscute [F. G. M. Mécanique probl. 1235] că permutantele unui punct sunt colineare cu complimentarul lui.

N. N. MIHĂILEANU
Student, Bucureşti.

*) Domnii N. N. ALDEA şi H. P. IONESCU-BISS au stabilit alte forme generale ale identităţei din enuntul problemei Nr. 3697. publicat la pag. 511, Anul XXXIX.

COL. G. I. LIT.

PROBLEMA 3928. *Să se rezolve ecuaţiunea*

$$\frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} 2x}{\sin 4x + \cos 4x} = 2.$$

NICOLAE DONCIU.

Soluţie dată de Domnii: D. D. MAVRODIN, SUB-LT. A. EM. BĂDESCU, I. C. BOIAN, MARIUS M. CIOC, VL. I. CRIVĂŢ, ROMEO DUMITRAŞCU, P. I. GHIŞOIU, H. P. IONESCU-BISS, M. MARGULIUS, N. N. MIHĂILEANU, MIRCEA L. A. NEGREA, I. PAREPEANU, CORNELIU POPESCU, ION C. SAVIN, N. N. VELICESCU, TITU G. VELICESCU.

Aplicând identitatea cunoscută

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} a = \frac{2}{\sin 2a}$$

ecuaţia dată devine

$$\frac{2}{\sin 4x\,(\sin 4x + \cos 4x)} = 2$$

sau

$$\sin^2 4x + \sin 4x \cos 4x - 1 = 0.$$

Făcând înlocuirea

$$\sin^2 4x = 1 - \cos^2 4x,$$

obţinem ecuaţia

$$\sin 4x \cos 4x - \cos^2 4x = 0$$

sau

$$\cos 4x\,(\sin 4x - \cos 4x) = 0. \tag{1}$$

Ecuaţia (1) se desface în

$$\cos 4x = 0,$$

care dă

$$4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad \therefore \quad x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$$

şi

$$\sin 4x = \cos 4x \quad \text{sau} \quad \operatorname{tg} 4x = 1$$

care dă

$$4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \therefore \quad x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}.$$

— Alte soluţii s'au primit dela Domnişoara ELEONORA ANTONIU şi dela Domnii: CONSTANTINESCU-BUZĂU, I. N. CRAIU, I. CURCHI, IULIU DEAC, MĂRGĂRIT FAŢE, VICTOR I. IONESCU, C. GH. LUPESCU, EM. MEREUŢĂ, MIRCEA MOŢOC, I. GH. POPA, SUB-LT. F. RADU, I. C. ŞOVA-GRIGORENI, SUB-LT. A. I. STAN, MIHAIL VELEA.

Observare. D-l ŞT. E. OLTEANU a tratat ecuaţia generală asemănătoare enunţului

$$\frac{\operatorname{tg} nx + \operatorname{cotg} nx}{\sin 2nx + \cos 2nx} = 2,$$

indicată şi de D-l SUB-LT. A. EM. BĂDESCU sub forma

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{n}{2} x + \operatorname{cotg} \frac{n}{2} x}{\sin nx + \cos nx} = 2,$$

ce are ca soluţii

$$x = k\frac{2\pi}{n} \pm \frac{\pi}{2n} \text{ şi } x = k\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{4n}.$$

COL. G. I. LITEANU.

PROBLEMA 4134. *Se consideră un cerc de centru* O *în interiorul căruia se trasează un alt cerc de centru* O_1. *Să se găsească un punct* A *pe cercul* O *şi altul* A_1 *pe* O_1 *astfel ca distanţa* AA_1 *să fie minimă. Aceeaşi chestiune când* O_1 *e centrul unei elipse. (Enunţ completat).*

CĂPITAN GH. NICULESCU.

Soluţie dată de D-l MARIUS MARGULIUS (Şc. Politehnică Bucureşti).

Se ştie că distanţa minimă între două curbe, este pe o normală comună. Intrucât orice dreaptă care trece prin O e normală la acelaş cerc vom găsi distanţa minimă între cercul O şi elipsa O_1, pe una din normale duse din O la elipsă. Pentru a găsi picioarele acestor normale vom căuta punctele de intersecţie a hiperbolei lui APPOLONIUS — a punctului O în raport cu elipsa O_1 şi anume vom căuta intersecţiile cu această elipsă. Să rezolvim problema grafic — şi pentru aceasta să construim hiperbola lui APPOLONIUS. Pentru

aceasta să-i găsim centru şi direcţia asimptotelor. Inscriem elipsa O_1 în dreptunghiul BCDE tangent acesteia în vârfurile ei. Din O ducem perpendicularele: OM şi ON pe diagonalele BD şi CE. Fie P (OM, CE) şi Q (ON, DB). Mijlocul ω al dreptei PQ este centrul hiperbolei. Prin acest centru ducem paralele la axele elipsei şi obţinem asimptotele. Hiperbola trecând atât prin punctul O cât şi O_1 al elipsei, puncte ce ştim că se găsesc pe aceiaşi ramură, cunoscând acum şi centrul şi asimptotele, ea se poate construi. Fie I_1, I_2, I_3 şi I_4 intersecţiile hiperbolii cu elipsa O_1. Cu razele OI_1, OI_2, ... descriem 4 cercuri concentrice.

Acela dintre cercuri care va cuprinde pe celelalte trei ca interioare va fi tangent la elipsă în punctul A_1 căutat. Unim OA_1 şi prelungind până întâlneşte cercul O în A, obţinând astfel distanţa AA_1 a minimului absolut.

Soluţie dată de D-l GEORGE ŞT. ROŞCA (Craiova).

Se ştie că un punct, în planul unui cerc, determină pe diametrul ce trece prin el două segmente, din care cel care cuprinde şi centrul reprezintă distanţa cea mai mare dela acel punct la cerc. Aplicând această propoziţiune la problema noastră, deducem că, A_2 fiind un punct oarecare pe cercul O_1, punctul A' (situat pe cercul O) cel mai apropiat de A_2, se va afla pe diametrul lui O ce trece prin A_2. Rămâne să determinăm diametrul lui O pentru care A_2A' este minim. Observăm că:

$$A_2A' = OA' - OA_2 = R - OA_2$$

şi deci A_2A' este minim când OA_2 e maxim, ceeace are loc, conform propoziţiunii enunţate mai sus, când OA_2 trece prin O_1. Atunci punctele A_2 şi A' devin respectiv A_1 şi A din enunţ şi se găsesc pe linia centrelor OO_1 de partea lui O_1.

Notă. Pentru partea I-a a problemei s'au mai primit soluţiuni dela D-nii: MIRCEA MĂNESCU (cl. VI, Lic. Spiru Haret, Buc.) IANCU N. SAGER şi AL. D. STOICA (Lic. Marele Voevod Mihai, Buc.). Toţi aceşti corespondenţi, înţelegând spiritul problemei au căutat să nu utilizeze teoria normalelor la curbe, care nu intră în programul de liceu, dar din toţi n'a răuşit decât D-l G. ROŞCA. Este singurul care s'a servit de alte cunoştinţe pentru a ajunge la concluzie. Restul s'a servit dela început de linia centrelor, încât oricare ar fi fost modul de investigaţie el n'a constituit decât *o verificare*. De aceea soluţia remarcată mai sus poate fi dată ca exemplu de demonstraţie *curată*.

PROBLEMA 4168. *Să se rezolve ecuaţiile :*

$$P_4(x) = x^4 - 2x^3 - 41x^2 + 42x + 360 = 0 \ , \ P'_4(x) = 0,$$

profitând de faptul că se poate pune sub forma $Q_2[R_2(x)]$, *unde* $Q_2(x)$ *şi* $R_2(x)$ *sunt polinoame de gradul al doilea.*

Ce relaţie trebue să existe între coeficienţii unui polinom $P_4(x)$ *pentru a se putea aplica această metodă în rezolvarea ecuaţiei* $P_4(x) = 0$?

Să se arate că dacă o ecuaţie de această formă are o singură rădăcină dublă, aceasta va fi egală cu media aritmetică a celorlalte două.

G. CĂLUGĂREANU.

1°. *Soluţie* dată de D-nii: H. IONESCU-BISS, ST. OLTEANU şi G. ROŞCA.

Să considerăm, în cazul general, ecuaţia

$$(1) \qquad P_4(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

împreună cu

$$Q_2(x) = x^2 + a_1 x + b_1$$

$$R_2(x) = x^2 + a_2 x + b_2 .$$

Conform enunţului, vom avea

$$(2) \quad P_4(x) \equiv Q_2[R_2(x)] = x^4 + 2a_2 x^3 + (a_2^2 + 2b_2 + a_1) x^2 + (2a_2 b_2 + a_1 a_2) x + b_2^2 + a_1 b_2 + b_1.$$

Egalând coeficienţii ecuaţiilor (1) şi (2), obţinem, pentru determinarea necunoscutelor a_1 , a_2 , b_1 , b_2 relaţiile

$$(3) \qquad 2a_2 = A \ , \ 2b_2 + a_1 = B - \frac{A^2}{4} \ , \ 2b_2 + a_1 = \frac{2C}{A} \ ,$$

$$b_2^2 + a_1 b_2 + b_1 = D.$$

Se vede că unul din coeficienţii a sau b poate fi luat în mod arbitrar, iar din a doua şi a treia reiese condiţia de compatibilitate

$$(4) \qquad A^3 - 4AB + 8C = 0.$$

In aceste condiţiuni, rezolvarea ecuaţiei (1) revine la aceea a

ecuației $Q_2(y) = 0$; însemnând cu r' și r'' rădăcinile acesteia, acelea ale ecuației (1) vor fi date de

$$(5) \qquad R_2(x) = r' \ , \ R_2(x) = r''.$$

Se vede că aceste ecuațiuni nu pot avea o rădăcină comună decât dacă $r' = r''$, în care caz ambele rădăcini sunt comune și astfel $P_4 = 0$ va avea două rădăcini duble. E destul deci să presupunem că una din ecuațiile (5) are rădăcinile egale. In acest caz rădăcina dublă va fi $-\frac{a_2}{2}$ și e evident că suma celorlalte este $-a_2$.

Pentru rezolvarea ecuației $P'_4(x) = 0$ e ușor de observat că avem

$$P'_4(x) = 2R_2 R'_2 + a_2 R'_2 = R'_2(x)[2R_2(x) + a_2] = 0.$$

In cazul particular al ecuației din enunț, găsim, luând $b_1 = 0$, rădăcinile -5, -3, 4, 6, iar pentru derivată $\frac{1}{2}$, $\frac{1 \pm \sqrt{85}}{2}$.

2°. *Soluție* dată de D-l MIRCEA-LEONTE A. NEGREA. Să punem ecuația dată sub forma

$$P_4(x) = (x^2 + \alpha x)^2 + \beta(x^2 + \alpha x) + \gamma = 0$$

$$\therefore \quad P_4(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + \beta)x^2 + \alpha\beta x + \gamma = 0,$$

de unde

$$\frac{A}{2\alpha} = \frac{B}{\alpha^2 + \beta} = \frac{C}{\alpha\beta} = \frac{D}{\gamma} = 1$$

din cari, eliminând α, β, γ, găsim relația de condiție dată în prima soluție.

$$(\alpha) \qquad A^3 - 4AB + 8C = 0.$$

Fie x_1 rădăcina dublă, iar x_3, x_4 celelalte rădăcini ale ecuației date. Relațiile între rădăcini și coeficienți sunt

$$2x_1 + x_3 + x_4 = -A,$$

$$x_1(x_1 + x_3) + x_3(x_1 + x_4) + 2x_1 x_4 = B$$

$$x_1^2(x_3 + x_4) + 2x_1 x_3 x_4 = -C$$

$$x_1^2 x_3 x_4 = D.$$

Inlocuind în relaţia de condiţie (α) pe A, B, C, scoşi din aceste ultime relaţiuni găsim, după oarecari calcule

$$2x_1(x_3 - x_4)^2 = (x_3 + x_4)(x_3 - x_4)^2$$

şi, de oarece $x_3 \neq x_4$, urmează $2x_1 = x_3 + x_4$.

Restul ca mai sus.

Notă. D-l M. MARGULIUS a rezolvat problema inversă, arătând că dacă rădăcina dublă e media aritmetică a celorlalte, atunci există condiţia (α).

M. G.

PROBLEMA 4278. *Să se găsească locul unui punct egal luminat de două felinare fixe, de intensităţi diferite.*

MAIOR I. LINTEŞ.

Soluţie analitică.

Fie F şi F′ cele două felinare de intensităţi I şi I′. Suprafaţa-loc a punctului M egal luminat va fi evident de revoluţie, având drept ax direcţia FF′. Este deci suficient să-i găsim curba meridiană.

Fie FF′ axa absciselor, şi F $(-a, 0)$; F′ $(+a, 0)$; M (x,y), apoi cum :

1) $$\frac{I}{MF^2} = \frac{I'}{MF'^2}$$

urmează că :

$$\frac{(x+a)^2 + y^2}{I} - \frac{(x-a)^2 + y^2}{I'} = 0$$

sau

2) $$x^2 + y^2 + 2ax \cdot \frac{I' + I}{I' - I} + a^2 = 0.$$

Această ecuaţie reprezintă un cerc cu centrul în punctul

$$\left(-a \cdot \frac{I' + I}{I' - I}, 0\right)$$

şi cu raza :

$$R = a \cdot \sqrt{\left(\frac{I' + I}{I' - I}\right)^2 - 1}\ .$$

In consecinţă suprafaţa-loc va fi o sferă.

A rezolvat problema exact D-l CEZAR IVĂNESCU în plan, iar D-l MARIUS MARGULIUS a rezolvat-o în spaţiu, însă cu unele greşeli de calcul.

Soluţie geometrică dată de D-nii: CEZAR IVĂNESCU şi ALEX. D. STOICA.

Avem:

$$\frac{\overline{MF}}{\overline{MF'}} = \sqrt{\frac{I}{I'}} = \text{const.}$$

Atunci locul lui M este cercul descris pe diametrul $\overline{PP'}$, punctele P şi P' împărţind segmentul $\overline{FF'}$ interior şi exterior în raportul $\sqrt{\frac{I}{I'}}$.

D-l V. CEAUŞESCU dă o soluţie geometrică mai complicată şi arată că o problemă analoagă se găseşte discutată în „Cursul de Algebră Elementară" pentru cl. V reală, de AL. MANICATIDE.

I. L.

PROBLEMA 4322. *Să se demonstreze că răsturnatul unui număr întreg, nu poate fi jumătatea acelui număr.*

U. M. FLORESCU.

Proprietatea aceasta a fost demonstrată de D-l I. IONESCU în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXII, pag. 59 ca problemă ajutătoare la problema 2899, rezolvată în acel volum.

Utilizând metoda calculului aritmetic, întrebuinţată de D-l I. IONESCU se poate rezolva în numere întregi ecuaţia mai generală

$$N = pN' \tag{1}$$

în care p este un întreg dat, iar N şi N' sunt două numere răsturnate.

Pentru $p \leqslant 10$ am găsit următoarele rezultate:

Pentru p *egal cu 2, 3, 5, 7, 8 şi 10 nu există numere* N, *care să fie egale cu produsul lui* p *cu inversatul* N' *al lui* N.

1°. Pentru $p = 1$ avem pentru N soluţiunile de forma

aa ... aa ; ab ... lkl ... ba ; ab ... lkkl ... ba.

2°. Pentru $p = 4$ se găsesc următoarele soluţiuni fundamentale:

$$N = 8712 = 4 \times 2178$$

$$N = 87912 = 4 \times 21978$$

$$N = 8799 \ldots 912 = 4 \times 2199 \ldots 978.$$

3°. Pentru $p = 6$ avem soluţia fundamentală

$$N = 5604390 = 6 \times 0934065.$$

4°. Când $p = 9$ se găseşte soluţia fundamentală

$$N = 9801 = 9 \times 1089.$$

Dacă se înseamnă cu N_i numărul ce se formează scriind N de i ori unul după altul, atunci e uşor de văzut că din fiecare din soluţiunile fundamentale găsite la 1°, 2°, 3°, 4° se pot forma o infinitate de soluţiuni derivate ca

$$N_i O_k N_j O_x N_y \ldots$$

intercalând cifra zero de un număr oare care de ori între diverse grupe N_i.

Notă. La problema 4322 s'au primit 10 soluţiuni din care:

D-l M. PROCOPIESCU a demonstrat proprietatea *numai* pentru numere de 2 cifre.

Patru rezolvitori au interpretat enunţul greşit, considerând pe 1/N ca răsturnat al lui N.

Cinci rezolvitori au încercat demonstraţiuni complet lipsite de rigoare.

GH. B.

PROBLEMA 4359. *Un rezervoriu cilindric are un capac conic circular isoscel şi un fund semisferic. Dacă suprafaţa lui totală este cunoscută, când volumul închis este maximum?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila).

Fie x raza comună a cilindrului cu înălţimea y, a conului cu înălţimea z şi a sferei. Să notăm cu $S = \pi m^2$ suprafaţa totală dată a rezervoriului şi cu $\pi V/6$ volumul lui. Scriind pe rând termenii referitori la cilindru, con şi sferă, avem:

$$S = 2\pi xy + \pi x \sqrt{x^2 + z^2} + 2\pi x^2 = \pi m^2,$$

$$\pi V/6 = \pi x^2 y + \pi x^2 z/3 + 2\pi x^3/3,$$

(1) $\therefore \quad m^2 = 2xy + x\sqrt{x^2 + z^2} + 2x^2,$

(2) $\qquad V = 6x^2y + 2x^2z + 4x^3.$

Scoatem pe y din (1) şi găsim:

(3) $\qquad y = -x - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + z^2} + m^2/2x.$

Introducem această valoare în (2) şi avem:

(4) $\qquad V = -2x^3 + 2x^2z - 3x^2\sqrt{x^2 + z^2} + 3m^2x.$

Se vede de aci că V este funcţiune de două variabile x şi z. Pentru a găsi maximum lui V luăm derivatele lui în raport cu x şi cu z şi le anulăm.

Găsim astfel, după oarecare simplificări:

(5) $\qquad V'_x = -6x^2 + 4xz - 3\dfrac{3x^3 + 2x^2z}{\sqrt{x^2 + z^2}} + 3m^2 = 0$

(6) $\qquad V'_z = 2x^2 - \dfrac{3x^2z}{\sqrt{x^2 + z^2}} = 0.$

Rezolvând acest sistem găsim valorile lui x şi z care fac V maximum sau minimum. Se vede că $V'_z = 0$ pentru $x = 0$; dar atunci (5) se reduce la $3m^2 = 0$, ceeace nu se poate, căci aria dată nu e nulă. Suprimând pe $x^2 \neq 0$ din (6) va rămâne:

(7) $\qquad \sqrt{x^2 + z^2} = \frac{3}{2}z.$

(8) $\qquad \therefore \quad x = \frac{1}{2}z\sqrt{5}.$

Ca să găsim pe z introducem aceste valori în (5) şi după mai multe calcule găsim:

(9) $\qquad z = 2m\sqrt{5} \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 2}/5.$

Cu ajutorul lui (8) găsim:

(10) $\qquad x = m\sqrt{\sqrt{5} - 2},$

iar cu ajutorul lui (3), după oarecare transformări, găsim pe y:

(11) $\qquad y = \frac{1}{2}z = m\sqrt{5} \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 2}/5.$

Valorile lui x, y, z găsite aci le introducem în (2) şi după oarecare transformări găsim:

(12) $\qquad V = 2m^3\sqrt{\sqrt{5} - 2}.$

Inmulţind aceasta cu $\pi/6$ găsim volumul maximum al rezervoriului:

(13) $$\text{Volumul} = \pi m^3 \sqrt{\sqrt{5} - 3}/3.$$

Să dovedim că în adevăr acest volum corespunde unui maximum. Pentru aceasta, cu ajutorul lui (5) şi (6) să calculăm derivatele de ordinul al doilea ale lui V. După oarecare transformări găsim:

(14) $$V'_{x^2} = -12x + 4z - 3\frac{6x^4 + yx^2z^2 + 2z^4}{(x^2+z^2)^{3/2}}.$$

(15) $$V''_{xz} = 4x - 3xz\,\frac{x^2 + 2z^2}{(x^2+z^2)^{3/2}}.$$

(16) $$V''_{z^2} = -\frac{3x^4}{(x^2+z^2)^{3/2}}.$$

Să înlocuim în aceste expresiuni pe x şi z cu valorile ce ne-au dat V maximum sau minimum. Găsim, după oarecare calcule înlocuind x în funcţie de z, cu (7) şi (8):

(17) $$V''_{x^2} = -(145 + 54\sqrt{5})\,z/9.$$

(18) $$V''_{xz} = 5\sqrt{5}\,z/54.$$

(19) $$V''_{z^2} = -25\,z/54.$$

Cum V''_{x^2} şi V''_{z^2} sunt negativi, condiţia de maximum este:

$$V''_{x^2} \cdot V''_{z^2} - (V''_{xz})^2 > 0.$$

Rămâne de verificat această condiţiune. Intrebuinţând valorile găsite avem:

$$\left(\frac{145 + 54\sqrt{5}}{9} \times \frac{25}{54} - \frac{5^2 \cdot 5}{54^2}\right) z^2 > 0.$$

Suprimăm factorii comuni $25\,z^2/54$ şi ne rămâne de verificat

$$\frac{145 + 54\sqrt{5}}{9} > \frac{5}{54}$$

ceeace e evident căci partea întâia este supraunitară, iar a doua subunitară.

Deci volumul găsit corespunde în adevăr unui maximum.

(A se vedea pentru această condiţiune: *Lecţiuni de Calculul diferenţial de D-l* Prof. AUREL ANGELESCU, Cap. VIII. Extreme).

EXERCIŢII

1. Să se verifice identitatea

$$\frac{r_a^2}{h_a + 2r_a} + \frac{r_b^2}{h_b + 2r_b} + \frac{r_c^2}{h_c + 2r_c} = 2R - r.$$

EM. MEREUŢĂ.

R. Ţinând seamă de

$$r_a = \frac{s}{p - a} \quad ; \quad h_a = \frac{2s}{a}$$

membrul întâi devine

$$\frac{1}{2p} ar_a + \frac{1}{2p} br_b + \frac{1}{2p} cr_c = \frac{1}{2p} (ar_a + br_b + cr_c) = 2R - r,$$

de oarece

$$\Sigma ar_a = 2p\,(2R - r).$$

(G. M. XXXII).

2. Să se arate că în orice triunghiu există relaţia

$$\frac{ar_a + br_b + cr_c}{a\cos A + b\cos B + c\cos C} = \frac{R}{r}(2R - r).$$

CEZAR IVĂNESCU.

R. Din

$$ar_a + br_b + cr_c = 2p\,(2R - r)$$

şi

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{2pr}{R}$$

se obţine relaţia din enunţ.

3. Dacă l_a, l_b, l_c sunt porţiunile de înălţimi cuprinse între vârfuri şi ortocentru, celelalte notaţiuni fiind cele obişnuite într'un triunghiu, să se demonstreze că:

$$\begin{vmatrix} 4R^2 & l_a^2 & a^2 \\ 4R^2 & l_b^2 & b^2 \\ 4R^2 & l_c^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0.$$

VASILE V. GHIOCEL.

R. Se ţine seama de relaţiile:

$$a = 2R\,\sin A, \text{ etc.} \quad \text{şi} \quad l_a = 2R\,\cos A, \text{ etc.}$$

apoi se va aduna coloana II-a şi a III-a şi se va observa că determinantul având două coloane identice este egal cu zero.

4. Să se arate că în orice triunghiu avem:

$$\sin^2 2A + \sin^2 2B + \sin^2 2C = 2 - 2\cos 2A \cos 2B \cos 2C$$

$$\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 1 + 2\,\mathrm{coc}2A \cos 2B \cos 2C.$$

CEZAR IVĂNESCU.

R. Observăm mai întâiu că identitatea a doua este o consecinţă imediată a primei şi viceversa, aşa că este deajuns să stabilim una din ele.

Fie un triunghiu A'B'C' între ale cărui unghiuri avem cunoscuta soluţie:

$$\sin^2 A' + \sin^2 B' + \sin^2 C' = 2 + 2\cos A' \cos B' \cos C'. \qquad (1)$$

Dacă punem:

$$A' = \pi - 2A, \quad B' = \pi - 2B \quad \text{şi} \quad C' = \pi - 2C \qquad (2)$$

relaţia (1) devine tocmai prima relaţie din enunţ în care ţinând seamă de (2) A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu deoarece

$$A + B + C = \pi.$$

Menţionez că este un procedeu care ne înlesneşte stabilirea multor identităţi remarcabile.

PROBLEME PROPUSE

4415. Să se găsească fracţiile ordinare, astfel încât micşorându-le ambii termeni cu acelaş întreg, să găsim patratele acelor fracţii.

M. GHERMĂNESCU.

4416. Laturile şi diagonalele unui exagon convex sunt drumuri. In câte moduri se poate merge dela un vârf la altul al acelui exagon, pe acele drumuri, fără a trece de două ori prin acelaşi punct ?

ION IONESCU.

4417. Se cere un patrat perfect având o singură cifră pereche (zero exceptat) aşa ca numărul răsturnat lui să fie tot patrat.

V. THÉBAULT.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

4. Să se arate că în orice triunghiu avem:

$$\sin^2 2A + \sin^2 2B + \sin^2 2C = 2 - 2\cos 2A \cos 2B \cos 2C$$

$$\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 1 + 2\,\mathrm{coc}2A \cos 2B \cos 2C.$$

CEZAR IVĂNESCU.

R. Observăm mai întâiu că identitatea a doua este o consecinţă imediată a primei şi viceversa, aşa că este deajuns să stabilim una din ele.

Fie un triunghiu A'B'C' între ale cărui unghiuri avem cunoscuta soluţie:

$$\sin^2 A' + \sin^2 B' + \sin^2 C' = 2 + 2\cos A' \cos B' \cos C'. \qquad (1)$$

Dacă punem:

$$A' = \pi - 2A, \quad B' = \pi - 2B \quad \text{şi} \quad C' = \pi - 2C \qquad (2)$$

relaţia (1) devine tocmai prima relaţie din enunţ în care ţinând seamă de (2) A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu deoarece

$$A + B + C = \pi.$$

Menţionez că este un procedeu care ne înlesneşte stabilirea multor identităţi remarcabile.

PROBLEME PROPUSE

4415. Să se găsească fracţiile ordinare, astfel încât micşorându-le ambii termeni cu acelaş întreg, să găsim patratele acelor fracţii.

M. GHERMĂNESCU.

4416. Laturile şi diagonalele unui exagon convex sunt drumuri. In câte moduri se poate merge dela un vârf la altul al acelui exagon, pe acele drumuri, fără a trece de două ori prin acelaşi punct ?

ION IONESCU.

4417. Se cere un patrat perfect având o singură cifră pereche (zero exceptat) aşa ca numărul răsturnat lui să fie tot patrat.

V. THÉBAULT.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

4418. Intre ariile S_1 , S_2 , S_3 a trei cercuri ortogonale două câte două şi aria S a cercului, determinat de centrele lor, există relaţia :

$$\frac{(S_1 + S_2)\,(S_2 + S_3)\,(S_3 + S_1)}{S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1} = \frac{4S}{\pi^2} .$$

C. IONESCU-BUJOR.

4419. Se proiectează vârfurile triunghiului ABC în punctele *a, b, c* pe dreapta Δ din planul său.

Paralelele duse din *b* şi *c* respectiv la AB, AC se întâlnesc în A′, paralelele duse prin *c, a* respectiv la BC, BA se întâlnesc în B′, iar paralelele duse prin *a, b* respectiv la CA, CB se întâlnesc în C′.

Să se arate că punctele A′, B′, C′ se găsesc pe o dreaptă Δ′, perpendiculară pe Δ.

N. BOTEA.

4420. Să se arate că $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$ fiind n numere reale avem inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_n}{a_i} \right| > 1.$$

Dacă n este *oarecare,* limita inferioară 1 nu se poate înlocui cu nici un alt număr mai mare.

TIB. POPOVICIU.

4421. Se pune

$$V = \frac{au + b}{cu + d} , \quad w = \frac{av + b}{cv + d} .$$

Să se determine cantităţile *a, b, c, d* astfel încât să avem

$$u = \frac{aw + b}{cw + d} .$$

MIRON NICOLESCU.

4422. Să se rezolve un triunghiu oarecare cunoscând una din laturi, raportul k al ei către suma celorlalte două şi ştiind că unghiul opus ei este dublul unuia din unghiurile alăturate ei. Discuţiune.

Să se construească triunghiul în cazuri particulare interesante.

O. N. ŢINO.

4423. Se consideră un triunghiu ABC cu laturile a, b, c. Înălţimea vârfului A, mediana vârfului B, bisectoarea vârfului C formează un triunghiu A'B'C'.

Să se rezolve triunghiul A'B'C', când $a = 53701$ m, $b = 21425$ m, $c = 43032$ m.

GH. TH. GHEORGHIU.

4424. Se dă un semicerc de diametru $\overline{AB} = 2R$ şi un punct M mobil pe el. Fie MP înălţimea triunghiului AMB şi AA' bisectoarea interioară a unghiului A.

Să se studieze variaţiunea produsului $y = \overline{AA'} \cdot \overline{MP}$, când M variază şi să se caracterizeze triunghiurile dreptunghice pentru care acest produs este maxim.

N. C.

4425. Se consideră parabola cu focarul în O şi se ia pe raza vectoară OM segmentul $\overline{MP} = a$. Fie (C) curba descrisă de punctul P. Să se calculeze în funcţie de $\overline{OM} = r$, distanţa dela focarul O până la punctul T unde tangenta în P la curba (C) taie axa parabolei.

Să se trateze aceiaşi problemă înlocuindu-se parabola cu o elipsă sau o iperbolă.

D. V. IONESCU.

4426. Să se stabilească formula de interpolare, care dă expresia polinomului P (x), de gradul $2n + 1$, cunoscând valorile polinomului şi valorile derivatelor lui, până la ordinul n inclusiv, în două puncte distincte a şi b.

R. R.

ERATĂ. Problema 4395 propusă în Vol. XXXIX, pag. 479 şi apărută cu enunţ necomplet, se va întregi adăugând următoarele:

„Şi dacă pe laturile triunghiului A'B'C' cevienele corespunzătoare ale punctelor P şi Q, determină puncte egal depărtate de mijlocul lor".

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu M. (4372, 81); *Bălăceanu Gella* (4397); *Ceauşescu N.* (4321, 77, 83, 92); *Ceauşescu V.* (4056, 123, 25, 351, 72, 73, 75, 78, 81); *Cocea G. R.* (4364); *Cseke W.* (4375, 78, 83, 92, 97); *Dobrescu D. P.* (4372, 92); *Goormaghtigh R.* (N); *Hornstein S.* (4377); *Lebădă D.* (4312, P); *Margulis G.* (4397); *Mavrodin D. D.* (4381, 92); *Mazilu C. P.* (4232, 335, 72, 81, 92, 97); *Mihăileanu N.* (N); *Mihalcea I. O.* (4381, 92); *Negoiţă C.* (4261); *Negrea A. M. L.* (3675, 4125); *Nichifor S. M.* (4294, 312); *Petrescu I. I.* (4154, 383); *Popescu Gh. Gh.* (4397); *Postelnicescu M.* (4125, 234); *Predoescu I. M.* (4232, 312, 77, 92, 97, P); *Sabac I.* (3874); *Stoicescu T.* (4392, P); *Stupcanu E.* (4392); *Thébault V.* (A, N, P); *Ţiţeica I. I.* (4294, 372, 413); *Visarion C. I. V.* (4397); *Vlad I. Marin* (4381).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe acelaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, București 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XL

NUMĂRUL 2. — OCTOMVRIE 1934

BIBLIOTECA C... „ASOCIAȚIA ... SIBIU

SUMARUL

1. Cercles associés à un triangle . . . . . *V. Thébault*
2. Cărţi vechi de matematică . . . . . *I. Ionescu*
3. O altă demonstraţie a unei teoreme de geometrie din spaţiu . . . . . *B. I. Baidaff*
4. Congresul interbalcanic al matematicianilor *G. Ţiţeica*
5. Al optulea congres al asociaţiei române pentru înaintarea ştiinţelor . . . . . *M. Ghermănescu*
6. Programa analitică hotărîtă pentru concursul „Gazetei Matematice" din anul 1935.
7. Raportul comisiunei pentru acordarea premiului „General Sc. Panaitescu" pe anul 1933 — 1934.
8. Note matematice: 7 — 12.
9. Chestiuni de examen.
10. Bibliografie.
11. Cereri.
12. Diverse.
13. Probleme rezolvate: 2683, 3919, 4170, 4239, 4294, 4381.
14. Exerciţii: 5 — 13.
15. Probleme propuse: 4427 — 4438.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1934

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

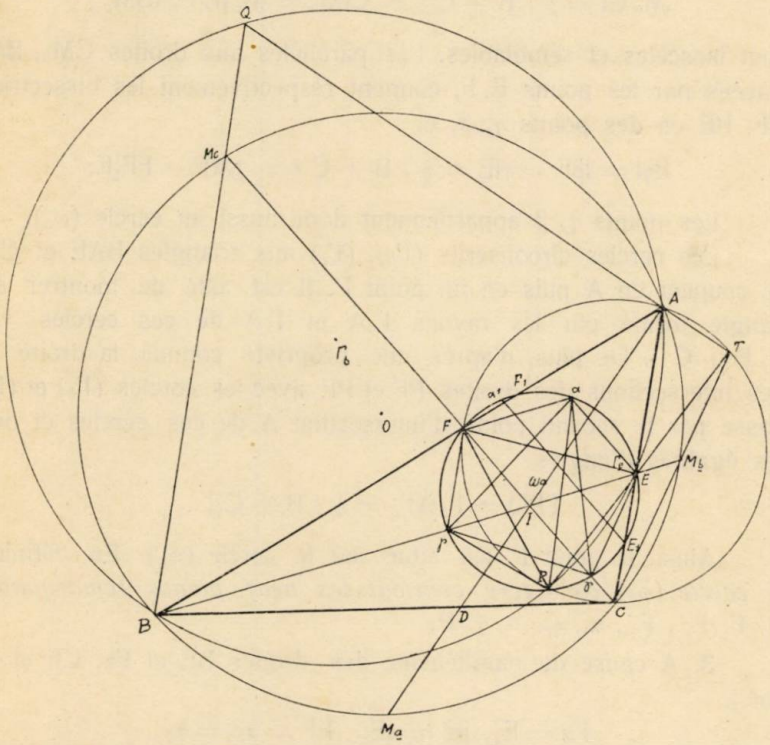
Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 27, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 30, 36, 40, 49, 52, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 300, 01, 03, 15, 19, 20, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 65, 66, 68, 70, 76, 80, 82, 84, 89, 90, 91, 93, 94, 95, 96, 98, 99, 400, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 08, 09, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

CERCLES ASSOCIÉS À UN TRIANGLE

1. Notations. Soient un triangle ABC, ($BC = a$, $CA = b$, $AB = c$) ; D, E, F et D′, E′, F′ les pieds des bissectrices intérieures et extérieures des angles A, B, C ; I le centre du cercle inscrit ; M_a, M_b, M_c les intersections des bissectrices intérieures avec le cercle (O) circonscrit.



2. Les points E, F et leurs symétriques F_1, E_1, par rapport à la bissectrice AD, sont situés sur un cercle (ω_a) dont le centre est sur AD. Il y a deux autres cercles analogues (ω_b), (ω_c), dont les centres sont sur BE, CF, qui contiennent les points F et D, D et E, puis les symétriques de ces points par rapport aux bissectrices BE et CF.

On a ces égalités d'angles

$$FF_1E = FEE_1 = EF_1A + BAC = 90^0 + \tfrac{1}{2}A.$$

Les parallèles aux bisectrices BE, CF, menées par les points F et E se coupent en un point α situé sur le cercle (ω_a), car

$$F\alpha E = BIC = 90^0 + \tfrac{1}{2} A.$$

Pour la même raison, les parallèles à BE, CF issues des points F_1, E_1, se coupent en un point α_1 situé sur le cercle (ω_a).

Les triangles CIM_b et BM_cI, pour lesquels on a les égalités d'angles,

$$M_b CI = \tfrac{1}{2} | B + C | = CIM_b = M_c IB = IBM_c ,$$

sont isoscèles et semblables. Les parallèles aux droites CM_b, BM_c, tracées par les points E, F, coupent respectivement les bissectrices CF, BE en des points γ, β, et

$$E\gamma I = I\beta F = \gamma IE = \tfrac{1}{2} | B + C | = 180^0 - FF_1E.$$

Les points γ, β appartiennent donc aussi au cercle (ω_a).

Les cercles circonscrits (Γ_b), (Γ_c) aux triangles BAE et CFA se coupent en A puis en un point P. Il est aisé de montrer que l'angle formé par les rayons Γ_bA et Γ_cA de ces cercles vaut $\tfrac{1}{2} | B + C |$. De plus, d'après une propriété connue, la droite TQ des intersections des droites PF et PE avec les cercles (Γ_b) et (Γ_c), passe par le second point d'intersection A de ces cercles et on a les égalités d'angles

$$TPQ = \Gamma_b A \Gamma_c = \tfrac{1}{2} | B + C | .$$

Ainsi, le point P est situé sur le cercle (ω_a). En définitive *le cercle* (ω_a) *considéré contient les neuf points remarquables* E, F, E_1, F_1, α, α_1, β, γ, P.

3. A cause du parallélisme des droites BE et Fα, CF et αE, on a

$$F\alpha = E\gamma, \quad F\beta = \alpha E , \quad EF = \alpha\beta = \alpha\gamma. \tag{1}$$

Le triangle $\beta\alpha\gamma$ est isoscèle; l'angle au sommet α égale l'angle A, et

$$\beta\gamma = 2EF \sin \tfrac{1}{2} A. \tag{2}$$

Le centre ω_a du cercle est à l'intersection de la bissectrice AD avec la médiatrice du segment rectiligne $\beta\gamma$. Le théorème de PTOLÉMÉE appliqué au quadrilatère P$\beta\alpha\gamma$ donne

$$P\beta \cdot \alpha\gamma + P\gamma \cdot \alpha\beta = P\alpha \cdot \beta\gamma$$

et, par suite, en vertu de (1) et (2),

$$P\alpha = |\, P\beta + P\gamma \,| : 2 \sin \tfrac{1}{2} A. \qquad (3)$$

4. Le triangle isoscèle FAE_1, dont les angles à la base valent $\frac{1}{2} A$, permet de déterminer le rayon P_a du cercle (ω_a),

$$\rho_a = EF : 2 \cos \tfrac{1}{2} A ; \qquad (4)$$

par analogie, les rayons P_b, P_c des cercles (ω_a), (ω_c), s'expriment

$$\rho_b = FD : 2 \cos \tfrac{1}{2} B \ , \ \rho_c = DE : 2 \cos \tfrac{1}{2} C. \qquad (5)$$

Dans le triangle FAE, on a

$$\overline{EF}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AF}^2 + 2\,AE \,.\, AF \cos A,$$

soit

$$\overline{EF}^2 = \left| \frac{bc}{c+a} \right|^2 + \left| \frac{bc}{a+b} \right|^2 + \frac{2b^2 c^2}{(c+a)(a+b)} \cos A,$$

et, en introduisant la valeur

$$\left| \frac{a^2 - (b^2 + c^2)}{2bc} \right| = \cos A$$

dans cette relation, on obtient, après réductions, et par analogie, ces formules qui peuvent être utiles :

$$\overline{EF}^2 = \frac{abc}{(c+a)^2 (a+b)^2} [3abc + 2 \,|\, a^2 p - b^2 (p-c) - c^2 (p-b) \,|\,]$$

$$\overline{FD}^2 = \frac{abc}{(a+b)^2 (b+c)^2} [3abc + 2 \,|\, b^2 p - c^2 (p-a) - a^2 (p-c) \,|\,] \qquad (6)$$

$$\overline{DE}^2 = \frac{abc}{(b+c)^2 (c+a)^2} [3abc + 2 \,|\, c^2 p - a^2 (p-b) - b^2 (p-a) \,|\,],$$

ou, sous une forme un peu plus condensée,

$$\overline{EF}^2 = \frac{abc}{(c+a)^2 (a+b)^2} [abc + 8p (p-b)(p-c)]$$

$$\overline{FD}^2 = \frac{abc}{(a+b)^2 (b+c)^2} [abc + 8p (p-c)(p-a)] \qquad (7)$$

$$\overline{DE}^2 = \frac{abc}{(b+c)(c+a)^2} [abc + 8p (p-a)(p-b)].$$

Ces formules, introduites dans les égalités (4) et (5), fournissent les expressions des rayons ρ_a, ρ_b, ρ_c en fonction des côtés du triangle fondamental.

Remarques. 1°. Si $A = 60^0$, le triangle $\beta\alpha\gamma$ est équilatéral; le quadrilatère $\beta EF\gamma$ est un parallélogramme, et

$$\rho_a = EF : \sqrt{3}\ ,\ P\alpha = P\beta + P\gamma\ ,\ E\gamma = E\alpha + E\beta\ ,\ F\beta = F\alpha + F\gamma.$$

Lorsque $A = 90^0$, $\rho_a = EF : \sqrt{2}\ ,\ P\alpha\sqrt{2} = P\beta + P\gamma$;

$\beta\gamma$ est un diamètre du cercle (ω_a).

Si $A = 120^0$, $\rho_a = EF\ ,\ P\alpha\sqrt{3} = P\beta + P\beta$.

2°. Il y a trois autres cercles (ω'_a), (ω'_b), (ω'_c) analogues aux cercles (ω_a), (ω_b), (ω_c) qui contiennent les points E′ et F′, F′ et D′, D′ et E′ et leurs symétriques par rapport aux bissectrices AD, BE, CF on AD′, BE′, CF′.

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

CĂRȚI VECHI DE MATEMATICĂ *)

O altă carte veche din Biblioteca D-lui D. LEONIDA are titlul următor:

«GEORG CONRAD **Martii** | neu-aufgefürter | Europäischer **Ingenieur:** | oder | **Kriegs-Bau-Kunst** / | Wie solche / mit allen was dazu erfordert wird / in **Europâ** | üblich gewesen / und zumaln annoch ist: **In sich haltend.** | I. Eine vollständige *Geometrie,* mit aller Zubehör / von gemeinem / *Logaritmi*schen / und *Trigono-* | *metri*schen Rechnen / auch dem Verstand und Nutzung jeder Instrumenten etc.: | II. Eine Ausführliche *Fortification,* nemlich von *Offensiv*-und-*Defensiv*-Wercken auch andern *Mi-* | *litair*-Gebäuden / auf aller Europäischen Volker Art / theils kürzlich theils / in den üblichen / aus- | führlich / allenthalben mit Vermisnstigen jederman vor Augen liegenden Gründen / sowohl in *Theoriâ* als *Praxi,* vorgestellt / und mit nötthigen Kupffern versehen. | NÜRNBERG / In Verlegung CRISTOFF RIEGELS. | Gedruckt bey Andreas Knorzen Seel. Wittib. Im Jahr 1687».

*) Vezi *Gazeta Matematică,* Anul XXXIX, pag. 44, 163, 201, 386.

Aci am arătat prin | o întrerupere de rând în scrierea titlului şi prin sublinieri cuvintele, sau părţile de cuvinte, scrise cu caractere latine. Cartea este scrisă cu caractere germane, însă peste tot cuvintele latine, sau luate din limbile latine, sunt scrise cu literile acelor limbi. Linia / o întrebuinţează autorul în cazurile în care noi punem azi virgula, şi mai rar pentru parenteze. Are însă, cum se vede, şi virgula ca semn de punctuaţie.

A doua pagină conţine dedicaţia :

Dem | Allerdurchläuchtigsten / Grossmächtigsten Fürsten und Herrn | **Herrn** | CRISTIANO | dem Fünfften. | Zu Dennemark/Norwegen / der Wenden | und Gothen Könige / Herzogen zu Schleswig / Holstein / Stormarn und der Dietmarschen / Grafen zu Olden | burg und Deimenhorst / u.s.f. Meinem allergnädigsten | König und Herrn.

Pe contrapagină închină cartea Regelui căruia îi spune că această carte tratează despre o materie care a procurat în toate timpurile o ocupaţiune nobilă şi plăcută.

După aceasta vine o cuvântare către cititori : *„Nothwendiger vorbericht an den Leser"*. Asta nu o face pentru ca cititorul să-şi facă o opiniune bună despre autor, ca de obiceiu. Acolo spune că din cea mai fragedă tinereţe a aplicat studiile lui matematice la lucruri practice, la geometrie, astronomie, geografie, optică, mecanică şi pe toate la arhitectura civilă şi militară, la fortificaţii, la artilerie. Vorbeşte de autorii care i-a consultat, printre care e şi *General-Ingenieur* M. VAUBAN. Prefaţa aceasta se termină cu un sfat dat legătorului de cărţi, ca planşele să se lege în ordinea numerotării la finele cărţii. Legătorul nu l'a ascultat şi de aceea volumul e lipsit de planşe, care s'au pierdut, îngreuind astfel mult urmărirea chestiunilor tratate.

De aci înainte începe numerotarea paginilor, care au o formă curioasă, fiind mult mai late decât înalte. Partea tipărită a paginilor este de 13 cm lată şi 7 cm înaltă. Grosimea cărţii, fără legătură, este de 6 cm. Cartea are trei părţi : I. Aritmetica care ocupă 266 pagini ; II. Geometria care are 400 pagini şi III. Fortificaţia care are 302 pagini. Fiecare parte este numerotată aparte.

Prima parte are titlul :

«Des | Europäischen | **Ingenieurs** | Erste | **Haupt-Abtheilung** | bestehend in einer | **Gründlichen Arithmetic.** | So weit solche immer darzu nutz werden kan ; Mit *Decimal*-und | *Logarithmi*schen Rechnen/ und andern eingemengten | *Curiosi*täten. |

Partea începe cu o precuvântare, în care spune: *„Calculul este un lucru atât de folositor la toate profesiunile încât putem spune că este numai o jumătate de om acela căruia îi lipseşte această ştiinţă“*. El desvoltă în special această idee pentru ingineri şi ofiţeri. *„Pentru fortificaţii calculul este un lucru absolut necesar“*. Urmează apoi capitolele aritmeticei. Le voi menţiona aci ca să se vază ce se cerea «Inginerului European» acum 250 ani şi voiu semnala câte ceva deosebit de prin cele tratate de autor.

Cap. I. *Despre natura numerelor în general.* *„Numerele sunt, după cum spun învăţaţii,* **Quantitas Discreta“.** Unele sunt *indeterminirt,* altele *aplciert;* ele pot fi întregi şi fracţionare; ele se pot combina prin operaţiuni, proporţiuni, etc.

Cap. II. *Despre numărare sau vorbirea numerelor.* Aci ne spune că Tracii aveau sistemul de numeraţie cu baza 4, ca şi alte popoare nordice. Vorbeşte de *Professor Mathematum* din Iena, ERHARDUS WEIGELUS, care susţine acest sistem în *Tetractyn Pythagoricam.* Vorbeşte de scrierea numerelor la Ebrei şi Greci şi apoi la Romani. Cifrele acestora le explică astfel. I este un deget, V o mână, X două mâini, C şi M iniţialele lui *Centum* şi *Mille,* L = 50, e jumătatea de jos a lui C, D = 500 e jumătatea din dreapta a lui CIↃ cu care se nota înainte mia. Numerele mai mari ca 1090 le deosibeau cu o linie pe deasupra. Astfel $\overline{IIIM}$ = 30000, $\overline{XXM}$ = 20000, $\overline{XCM}$ = 90000, $\overline{CM}$ = 100000. Acesta forma o unitate; astfel milionul erea 10 sute de mii şi se scria $\overline{X.CM}$; apoi $\overline{XC.CM}$ = 90000000; $\overline{C.CM}$ = 100000000; $\overline{IIM.CM}$ = 200000000. Autorul nu cunoaşte cuvântul *milion.* Cu toate acestea nu se sperie de numerele mari şi arată de exemplu cum trebue să se citească numărul de 26 cifre: 17200400008943027896 şi anume: *17 tausend tausend tausend tausend mal tausend; 200 tausend tausend tausend tausend mal tausend; 400 tausend tausend tausend mal tausend; 8 tausend tausend mal tausend; 943 tausend mal tausend; 27 tausend; 8 hundert und 96!*

Cap. III. *Despre adunare sau calcularea împreună.* Operaţia se făcea ca şi azi. Se dau regulile pentru numere întregi şi numere complexe.

Cap. IV. *Scăderea sau calcularea scoaterii.* Găseşte că ar fi mai raţional să urmeze înmulţirea după adunare, dar lumea a pus scăderea înainte ca fiind mult mai uşoară. La scădere arată, şi

metoda împrumuturilor la cifra descăzutului, şi a sporirii cu 1 la cifra scăzătorului, când nu se poate face scăderea. Deci ambele metode ereau pe atunci în uz. Proba o face prin adunare. Mai dă o probă a lui HARTNACK, care a ieşit din uz şi care consta din ştergere convenabilă de cifre din date şi din rezultate.

Cap. V. *Despre multiplicare, sau înmulţire sau repetare.* Vorbeşte de **Tabulam Pythagoricam** sau *„Einmal ein ist eins"*. pe care o dă cu simplă intrare, şi **Tabula Pitagorica Quadrata** cu dublă intrare, precum şi de **Bastoanele lui** NEPER, date în Rhabdologia lui. Proba o lasă să se facă prin împărţire. Calculul se face ca şi azi.

Cap. VI. *Despre diviziune sau împărţire.* Calculul se face ca şi azi numai dispunerea numerelor e alta. Impărţitorul e la stânga şi câtul la dreapta. Iată un exemplu: 64092830 : 298 :

```
298 ) 64092830 | 215076 132
      596                 298
      ---
       449
       298
       ---
       1512
       1490
       ----
         2283
         2086
         ----
          1970
          1788
          ----
           182
```

Arată diferite simplificări ce se pot face la găsirea cifrelor câtului dar fiecare şi le alege după propriul său *„Gusto"*.

Cap. VII. *Despre fracţii.* Notaţia lor e cea de azi. Fracţiile sunt proprii şi amestecate (cu întregi). Consideră şi fracţii de fracţii. Se ocupă de cel mai mare comun divizor cu ocazia simplificării fracţiilor, pe care-l aplică şi la căutarea numitorilor comuni pentru adunare. In acest capitol tratează şi operaţiile cu fracţii.

Cap. VIII. *Despre proporţie.* Aici se plânge, cu drept cuvânt, că e greu de făcut să priceapă începătorii ce e o proporţie. In limbagiul curent, sensul cuvântului e vag. Găseşte metoda de expunere a lui IGNATTII GASTON PARDIES mai bună şi o adoptă. Defineşte

proporţia ca o egalitate de *„ration“*, cărei egalităţi îi mai zice şi *„analogia“* sau *„Vergleichung“*.

Cap. IX. *Incă despre natura şi proprietăţile proporţii sau proporţionalitate.* Incepe prin a spune că *„In capitolul precedent am vorbit atât de mult de semnificarea proporţii (20 pagini) încât mulţi s'au întunecat“*. Acum voieşte să clarifice prin exemple grafice, şi apoi studiază proprietăţile. Proporţia o scrie astfel :

A — B : : *a* — *b*, ceeace noi am scrie A/B = *a*/*b*.

Cap. X. *Despre numere proporţionale.* Aci se ocupă de proporţionalitate între cantităţi discrete, lăsând pe seama geometriei pe cele continui; se ocupă şi de media geometrică şi de înscrierea a două medii proporţionale ($a/x = x/y = y/b$), chestiune care pe atunci pasiona pe cei ce umblau după trisecţiunea unghiului sau dublarea cubului, dar care azi numai are căutare în urma demonstrării date că aceste probleme sunt imposibil de rezolvat cu rigla şi compasul.

Cap. XI. Despre *„Regula detri“*. Aceştia îi mai zice *Regula de tribus. Regula proportionum, Proportional-Regul şi Regula Aurea* din cauza folosului ei nemărginit de mare. Ea poate fi *directă* sau *inversă; simplex* sau *composita.*

Cap. XII. Despre *Regula Detri Composita, Regula quinque. De sex & c.* Regula de trei compusă se specifică uneori după numărul termenilor cunoscuţi sau după numărul rapoartelor ce intră în ele.

Cap. XIII. Despre *Regula Detri Inversa, Simplice şi Composita.* Spune că francezii îi ziceau pe atunci *„Reigle de trois Rebourse“*.

Cap. XIV. *Despre extragerea rădăcinii patrate sau Extractione Radicis quadratae.* Chestiunea aceasta e mai ingrată, aplicaţiunile mai rare, regulile se uită, greşelile curg. De aceea autorul ia în ajutor poesia, dând regulile în versuri. Acestea trebue să fie scurte, clare şi fără fantezii poetice. Citează pe KOHLMANN, care în o carte de optică şi arhitectură militară, dă regula: *„Dupla, Dique-vidas: post Duc, & Substrabe tandem“*, pe care o traduce astfel: *„Duplir und Dividir, | Vermehr und Substrahier“*. Acestea sunt prea concentrate şi dă altele mai desvoltate, ale lui BEER şi alta a autorului. Cum ştim dacă rădăcina e bună? *„Die Doppellurzel bloss. | Im Nenner wird zu gross. || Der Doppel-Wurzel eins addirt | Macht grösser | als es sich gebührt“*.

Cap. XV. *Despre Extractione radicis Cubicae sau scoaterea rădăcinii cubice.* Dă şi aci un «memorial» al lui KOHLHANN în latineşte: *„Triples: In triplum ducas: Divisio Fiat:* | *Ductio tum Simplex, Quadrata, & Cubica; Subduc"*, pe care o traduce astfel: *„Triplir, und diss vermehr: Mit solchem Dividire,* | *Den Theiler emehr* | *Quadrir, Cubir, und Substrahire"*. Mai reproduce versurile lui BEER şi pe ale lui cu regula mai desvoltată, Poeziile nu-i plac; însă adaogă: *„Sunt rime de necesitate şi de folosinţă, iar nu pentru ostentaţiune şi plăcere"*. In acest capitol, ca şi în cel precedent, vorbeşte de numerele iraţionale.

Cap. XVI. *Despre Aritmetica, geometrica sau logistica decimală sau calculul zecimal.* Vorbeşte mai întâi de necesitatea şi varietatea unităţilor de măsură şi spune că un medic din Frankfurt, IOHANN HARMAN BEYER a fost primul care a propus decimalizarea unităţilor de măsură, pe care a realizat-o peste 2 secole Revoluţiunea franceză. (Scrierea lui BEYER e din 1603). Aceeaşi idee a mai tratat-o mai târziu BEY RUSEN (în urmă RUSENSTEIN), MELDER, BEER şi apoi Italieni şi Francezi. Despărţirea zecimalelor o face cu virgulă. Arată uşurinţa calculelor în *„Aritmetica Decimali"*.

Cap. XVII. *Despre progresiuni şi numere progresionale.* Se ocupă de progresiuni aritmetice, geometrice şi armonice sau muzicale.

Pentru sumarea progresiunilor aritmetice dă versurile lui BEER *„Addire Kopf und Schwanz* | *und merk die Zahl der Glieder* | | *Halbiere was sich schickt* | *multiplieciere wieder"*. O altă poezie e dată pentru progresii geometrice.

Cap. XVIII. *Despre natura logaritmilor.* Autorul spune că logaritmii i-a inventat NEPER din cauză că având reumatism la picioare, a trebuit să stea în linişte şi să facă speculaţiuni, pentru a-i trece timpul. Logaritmii sunt definiţi prin progresii. Nu arată cum s'au calculat tabelele de logaritmi, căci *„iubitul Dumnezeu"* a dat pe pământ câţi oameni cu răbdare îndestulătoare ca să calculeze asemenea tabele! Recomandă tabelele lui VLACQ. Pe ale lui BRIGGS le găseşte inferioare.

(Va urma) I. IONESCU.

O ALTĂ DEMONSTRAȚIE A UNEI TEOREME DE GEOMETRIE DIN SPAȚIU

In cartea: *Traité de Géométrie,* par E. ROUCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE. Deuxième partie, ediţiunea 1922, pag. 12, se citeşte următoarea teoremă:

„Pour qu'une droite AB *soit perpendiculaire à un plan* P, *il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux droites* D *et* D', *non parallèles entre elles, situées dans le plan* P *ou parallèles au plan* P".

In aceste rânduri îmi propun să dau o demonstraţie, probabil nouă, fără a întrebuinţa ambele semiplane determinate de planul P.

Voi schimba mai întâi notaţiunile. Fie π planul; AB o semidreaptă perpendiculară în B pe dreptele BX şi BY, situate în planul π, şi BZ o a treia dreaptă din planul π. Esenţa teoremei e tocmai demonstraţia faptului că AB e perpendicular pe BE şi de aici toate concluziunile necesare.

Pentru a obţine scopul urmărit, tai cele trei drepte în C, D, şi E respectiv, puncte pe care le presupun toate la distanţă finită, şi voiu căuta a dovedi că în triunghiul ABE se verifică teorema lui PITAGORA. Călăuzit de această gândire, aplic teorema lui STEWART, cevienei AE în triunghiul ACD şi apoi cevienei BE în triunghiul BCD. Avem, în mărime şi semn:

$$AC^2 \cdot DE + AD^2 \cdot EC + AE^2 \cdot CD + DE \cdot EC \cdot CD = 0,$$

$$BC^2 \cdot DE + BD^2 \cdot EC + BE^2 \cdot CD + DE \cdot EC \cdot CD = 0,$$

şi scăzând, avem:

$$(AC^2 - BC^2)\, DE + (AD^2 - BD^2)\, EC + (AE^2 - BE^2)\, CD = 0.$$

Ţinând în seamă relaţiunile

$$AC^2 - BC^2 = AB^2 \quad , \quad AD^2 - BD^2 = AB^2,$$

egalitatea anterioară se preface în:

$$AB^2\,(DE + EC) + (AE^2 - BE^2)\, CD = 0,$$

care la rândul ei, în baza relaţiunii:

$$DE + EC + CD = 0,$$

conduce la :

$$AB^2 = AE^2 - BE^2 \quad , \quad \therefore \quad AE^2 = AB^2 + BE^2$$

şi ca urmare că AE e ipotenuză în triunghiul ABE, sau încă, cu alte cuvinte, că AB e perpendicular pe BE, ceeace trebuia demonstrat.

Observaţiune. Demonstraţia precedentă e susceptibilă de o frumoasă simplificare, care consistă în a lua de la început pe BX şi BY, segmente egale : BC = BD. In acest caz, teorema lui STEWART ia aspectul

$$AC^2 = AE^2 + DE \cdot EC \quad , \text{ în triunghiul ACD,}$$

$$BC^2 = BE^2 + DE \cdot EC \quad , \text{ în triunghiul BCD,}$$

care scăzute, ne dau :

$$AC^2 - BC^2 = AB^2 = AE^2 - BE^2$$

şi drept consecinţă din nou concluziunea că AE e ipotenuză, şi prin urmare că AB e perpendicular pe BE.

Această simplificare mi-a fost sugerată de D-ra Ing. E SMITH BUNGE, de aici, după ce i-am expus demonstraţia de mai sus, care exije o preparaţiune ceva mai înaintată din partea elevilor, pe când în forma simplificată se poate explica şi chiar moderniştilor, dacă mai există azi secţiunea modernă.

B. I. BAIDAFF
Buenos Aires.

CONGRESUL INTERBALCANIC AL MATEMATICIANILOR

In Septemvrie 1933 şi în Iunie 1934 colegul nostru D-l ION IONESCU a anunţat în *Gazeta Matematică* ţinerea între 2 şi 9 Septemvrie 1934 a celui dintâi Congres interbalcanic al matematicianilor la Atena. Congresul, organizat de Uniunea profesorilor de matematici din Grecia, a fost sprijinit de guvern. Profesorii universitari, cei dela Şcoala Politehnică, precum şi profesorii de matematici de liceu şi de şcoli speciale din Grecia, şi-au dat toată osteneala ca, în măsura putinţii, Congresul să-şi atingă scopul. Şi scopul era să se obţină prin acest congres o conlucrare ştiinţifică a matemacianilor din Albania, Bulgaria, Iugoslavia, România şi Turcia, împreună, bine înţeles, cu cei din Grecia.

Cei dintâi dintre străinii sosiți la Atena au fost Românii, în număr de cinci și anume :

D-nii O. ONICESCU, profesor la Universitatea din București, C. POPOVICI, prof. la Universitatea din Iași, S. STOILOV, prof. la Universitatea din Cernăuți, C. TEODORESCU, Rectorul Școalei Politehnice din Timișoara și G. ȚIȚEICA, profesor la Universitatea din București, toți înscriși cu comunicări și conferințe. Din *Albania* a venit un profesor de liceu și un profesor de școală de Meserii. Din *Bulgaria* au sosit, în ajunul Congresului, D-nii: BONEFF și OBRECHKOF. Din Turcia au venit, după începerea Congresului D-nii FREUNDLICH și VON MISES, profesori la Universitatea din Istanbul. In fine, în ajunul Congresului, au sosit dela Belgrad D-nii BILIMOWITCH și MILANKOWITCH.

In afară de colegii din Țară, cari au fost la Congres, s'au mai înscris cu comunicări D-nii ABASON și RACLIȘ.

Astfel, și ca număr de participanți și ca număr de conferinți și comunicări, Românii au ieșit în evidență, pe planul întâi și de aceea s'au și bucurat de o deosebită atenție din partea colegilor greci.

* * *

In ziua de Duminică, 2 Septemvrie, s'a deschis, cu toată solemnitatea, Congresul, în *Aula Magna* a Universității. Au vorbit, mai întâi Președintele Uniunii profesorilor de matematici din Grecia, apoi Președintele Consiliului de Miniștri și Ministrul Instrucțiunii, în urmă Rectorul și Vice-Rectorul, în fine D-nii ZERVOS și HATZIDAKIS. După aceea au fost salutările și urările din partea universităților străine. Printr'o delicată atențiune, în urma acestor din urmă discursuri, muzica militară a intonat imnul național respectiv.

După amiază s'a făcut alegerea unui Comitet de onoare și a unui Comitet activ (universitar și secundar).

Ședințele propriu-zise, în care s'au făcut conferințele și comunicările anunțate, au început Luni 3 Septemvrie și au ținut până Vineri 7 Septemvrie. Nu s'au ținut ședințe pe secțiuni, așa cum se anunțase la început. Toate ședințele au fost comune. Din partea noastră au ținut conferințe D-nii ONICESCU, Topologia funcțiunii de un punct în plan sau în spațiu ; POPOVICI, Ecuații integrofuncționale și funcționale ; STOILOV, Topologia și teoria funcțiunilor ; TEODORESCU,

Noui aplicaţii ale momentelor de inerţie la chestiuni statistice; ŢIŢEICA, Reţele şi congruenţe.

Au făcut comunicări D-nii POPOVICI, Funcţiuni mărginite în fiecare punct dintr'un interval şi nemărginite în interval, Noui soluţiuni ale ecuaţiilor cu derivate parţiale prin condiţii la limită, Pungile de aer; ŢIŢEICA, Reţele cu invarianţi constanţi. Şedinţa de Joi 6 Septemvrie s'a ţinut la Şcoala Politehnică. Congresiştii au fost salutaţi de către Rectorul Şcoalei şi a răspuns D-l C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politehnice din Timişoara.

Şedinţa de închidere s'a ţinut la *Delfi,* în aer liber, în faţa ruinelor teatrului antic. Acolo s'a ratificat o propunere făcută la banchetul dat de congresiştii greci, ca viitorul congres interbalcanic să se ţină la Bucureşti. Reprezentanţii Universităţii din Sofia şi aceia ai Universităţii din Istanbul îşi exprimaseră dorinţa ca acest congres viitor să aibă loc la Sofia sau la Istanbul. La propunerea făcută de matematicianii greci s'au asociat şi ceilalţi. Românii au subordonat această hotărîre asentimentului societăţilor noastre de matematici şi aprobării guvernului.

* * *

In afară de lucrările ştiinţifice ale Congresului, care au fost numeroase, variate şi foarte interesante, cuprinzând pe lângă matematicile teoretice, Astronomia şi Matematicile aplicate, organizatorii au pus în program şi vizite la numeroasele monumente istorice şi artistice ale Atenei. A fost, firește, o vizită la Acropolă sub conducerea unui archeolog, care a explicat congresiştilor frumuseţile artistice şi amănuntele istorice. Cu această ocazie s'a vizitat şi muzeul de pe Acropole. S'a făcut o excursie la mănăstirea bizantină dela Dafni şi apoi la Eleusis, unde iarăşi un archeolog ne-a deslușit diferitele săpături făcute şi ne-a arătat muzeul de acolo. O altă excursie a fost organizată spre a vedea lacul artificial dela Maraton, care serveşte pentru alimentarea cu apă a Atenei. S'au vizitat apoi muzeul Benacki şi muzeul bizantin, muzeul etnografic şi pinacoteca şi, cel mai interesant dintre toate, Muzeul naţional, unde sunt comorile de artă ale Greciei. Unii dintre congresişti au fost introduşi în unele din cluburile interesante (Rotang, Tenisclub şi clubul atenian), unde au avut ocazia să cunoască elementele cele mai distinse ale Atenei.

Fără îndoială că în timpul Congresului au fost, ca de obicei,

şi banchete, unul al Primăriei în vecinătatea Atenei la Chefisia, altul al congresiştilor greci pe malul mării la Glyfada, în fine banchetul dat de guvern sub preşidenţia Ministrului afacerilor străine.

Colegii greci cari ne-au aşteptat la sosire la 28 August, ne-au condus la vapor în ziua plecării la 11 Septemvrie. Intregul congres, dela început şi până la sfârşit, s'a desfăşurat într'o atmosferă de cordialitate. Rezultatele congresului şi din punct de vedere ştiinţific şi din punctul de vedere al cunoaşterii reciproce pot fi socotite ca foarte preţioase.

G. ŢIŢEICA.

AL OPTULEA CONGRES AL ASOCIAŢIEI ROMÂNE PENTRU INAINTAREA ŞTIINŢELOR

Oamenii de ştiinţă — şi în general producătorii intelectuali — şi-au dat seama că eforturile lor izolate nu sunt suficiente pentru a face să progreseze disciplina intelectuală pe care o servesc cu mintea lor şi că e necesară o strânsă colaborare între ei, pentru ca dificultăţile, întâlnite în calea descoperirii adevărului, să fie înfruntate cu mai mulţi sorţi de izbândă.

O formă a acestei colaborări o constituesc congresele periodice unde savanţii, aparţinând aceleeaşi specialităţi, se întrunesc, îşi comunică ideile, concretizează stadiul în care a ajuns evoluţia specialităţilor şi deci, problemele, noui sau rămase nerezolvate, pe care mintea lor trebue să le atace în viitor.

Congresele sunt internaţionale sau naţionale, acestea din urmă având, mai ales, scopul de a stabili care este, până la acel moment, contribuţia ţării respective la progresul Ştiinţei şi al civilizaţiei omenirii.

In mai toate ţările culte, există astfel Asociaţiuni, al căror rost este tocmai promovarea disciplinelor intelectuale în cadrul naţiunii respective.

In ţara noastră, care a reuşit, graţie elementelor sale de mare valoare, să fie luată în considerare în marele concert intelectual mondial, există, în scopul de mai sus, **Asociaţia română pentru înaintarea Ştiinţelor,** fondată înainte de războiu de regretatul DR. C. ISTRATI.

Activitatea «Asociației» a fost destul de bogată în scurtul interval al existenței sale, probă e faptul că, întreruptă în timpul și după războiu, a reînceput anul acesta cu al *optulea* congres, care s'a ținut în București, între 29 Aprilie și 2 Maiu a. c.

Congresul a fost pus sub Inaltul patronaj al M. S. Regelui Carol II și a avut concursul tuturor organizațiunilor științifice ca: Universități, Școli Politehnice, Societăți Științifice, în frunte cu Academia Română.

Programul congresului a cuprins Conferințe generale, precum și comunicări și rapoarte pe secțiuni, care au fost repartizate astfel:

MATEMATICA

Secțiunea A: Geometrie, Analiză, Teoria funcțiunilor.
Secțiunea B: Fizică matematică, Logică matematică, Matematici aplicate.
Secțiunea C: Astronomie și Geodezie.

FIZICA (o secțiune)

CHIMIA

Secțiunea A: Chimie analitică și anorganică.
Secțiunea B: Chimie organică.
Secțiunea C: Chimie aplicată.

ȘTIINȚELE NATURALE

Secțiunea A: Geologie și Paleontologie.
Secțiunea B: Biologie (cu două subsecțiuni).

ISTORIA ȘTIINȚELOR (o secțiune)

SECȚIUNEA TEHNICĂ

SECȚIUNEA INVĂȚĂMÂNT

In seria Conferințelor generale, congresul a avut cinstea de a asculta conferințele ilustrului matematician francez și președinte al

Institutului Franței, EMILE BOREL, care a ținut la Ateneul român conferința «Legile hasardului și determinismul științific», iar la Universitate «Aplicațiile calculului probabilităților în Teoria numerelor și în Teoria funcțiunilor».

O altă conferință remarcabilă a fost aceea a D-lui Profesor V. VÂLCOVICI, ținută la Fundația «Carol II» despre «Materie, energie».

La secțiunile de Matematici s'au făcut numeroase comunicări, după cum urmează :

La secțiunea A, D-nii: V. ALACI, TH. ANGHELUȚĂ, M. ANTONIU, R. BĂDESCU, D. BARBILIAN, G. CĂLUGĂREANU, N. CIORĂNESCU, M. GHERMĂNESCU, A. GHICA, M. HAIMOVICI, D. V. IONESCU, M. NICOLESCU, O. ONICESCU, A. PANTAZI, D. POMPEIU, I. POPA, TIB. POPOVICIU, R. RACLIȘ, S. STOILOV, N. TEODORESCU, L. TEODORIU, G. ȚIȚEICA, V. VÂLCOVICI, GH. VRÂNCEANU.

La secțiunea B, D-nii: E. ABASON, PL. ANDRONESCU, N. GEORGESCU-ROEGEN, TIB. IONESCU, G. MIHOC, GR. MOISIL, C. POPOVICI, M. SANIELEVICI, P. SERGESCU.

La secțiunea C, D-nii: I. ARMEANCA, GH. BRATU, G. G. CONSTANTINESCU, I. CUREA, G. DEMETRESCU, A. IVĂNCEANU, LT.-COL. MIORINI, C. PÂRVULESCU, G. PETRESCU, H. PIETREANU, COL. POMPEIU TH., C. ROIBĂNESCU, E. ȚINTĂ.

La secțiunea *Istoria Științelor,* D-l Prof. P. SERGESCU a făcut o admirabilă schiță a Istoriei Matematicilor în România.

La secțiunea *Invățământ,* D-l Prof. I. IONESCU a vorbit despre o geometrie a lui GH. LAZĂR.

Congresul a avut un succes deplin, grație atât numărului mare de comunicări, cât și organizării sale, datorită în cea mai mare parte secretarului general al Societății române de Științe, D-l Prof. O. ONICESCU.

Evident, partea de agrement n'a lipsit dela Congres. Congresiștii au avut ocazia să viziteze instalațiunile Soc. de Radio-difuziune, rafineriile «Astra»-Ploești etc., iar în plus, au asistat la un spectacol la «Operă», onorat cu prezența Familiei Regale.

M. GHERMĂNESCU.

PROGRAMA ANALITICĂ HOTĂRÎTĂ PENTRU CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“ DIN ANUL 1935

Clasa IV. Toată materia prevăzută în programa oficială.

Clasa V. *Algebra.* Toată materia prevăzută în programa oficială. In plus:

1. La împărțirea cu $(x + a)$ se va face rezolvarea ecuațiilor cu rădăcini întregi și fracționare.

2. La radicale se va face raționalizarea numitorilor cari conțin radicale patrate și de indici superiori.

3. La sistemele de ecuații de gradul I se vor cere metode particulare de rezolvare și sisteme reductibile la gradul I.

4. La discuția semnului trinomului se va face generalizare în legătură cu punctul 1.

5. Transformarea expresiunilor de forma:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}.$$

6. Progresiuni aritmetice și geometrice.

Geometria plană. Toată materia prevăzută în programa oficială. In plus:

1. Fascicole de drepte paralele și de drepte concurente (Teoreme directe și reciproce).

2. Omotetia.

3. Teorema lui MENELAUS și CEVA și reciprocele lor.

4. Teoremele lui PTOLEMEU pentru patrulaterele inscriptibile. Teorema lui MIQUEL. Patrulater circumscris unui cerc. Cercuri ortogonale. Cercul celor nouă puncte.

5. Puterea unui punct față de un cerc. Ax și centru radical.

6. Raportul ariilor a două poligoane asemenea.

7. Reciproca teoremei lui PITAGORA. Relația metrică a lui STEWART. Aplicație la mediane, etc.

8. Poligoane regulate circumscrise.

9. Diviziuni armonice, fascicole armonice. Pol şi polară în raport cu un unghiu; şi în raport cu un cerc. Teoremele lui PASCAL şi BRIANCHON. Patrulatere complecte.

Clasa VI. *Geometria în spaţiu.* Toată materia prevăzută în programa oficială. In plus:

1. Unghiuri diedre. Măsura lor. Unghiuri triedre şi poliedre, proprietăţile lor.

2. Aria şi volumul trunchiului de piramidă. Extindere la con.

3. Volumul produs de un sector poligonal plan care se roteşte în jurul unei axe. Volumul zonei, calotei, sferei.

Trigonometria. Toată materia prevăzută în programa oficială până la «Aplicaţiunile trigonometriei la agrimensură şi statică». In plus:

1. Aria unui triunghiu în raport cu elemente date.

2. Raza cercului circumscris în funcţiune de laturile triunghiului. Razele cercurilor înscrise şi exînscrise triunghiului. Relaţiuni.

3. Identităţi trigonometrice.

4. Cazuri particulare de rezolvare la triunghiuri dreptunghice şi oarecare.

5. Determinarea distanţelor între puncte inaccesibile.

6. Problema hărţii.

Clasa VII. *Astronomia.* Toată materia prevăzută în programa oficială.

Algebra. Toată materia prevăzută în programa oficială. In plus:

1. *Geometria descriptivă.* Materia programei oficiale.

2. Transformări: inversiune, polare reciproce.

3. Conice. Studiul elementar.

Pentru chestiunile indicate în acest program şi pe care candidaţii nu le vor fi făcut la cursuri până la data concursului, se vor ruga de D-nii Profesori să le indice ce cărţi pot consulta, sau se vor adresa D-lui Inginer M. SARIAN, Str. Columb No. 9, Bucureşti 3, care s'a oferit a da lămuririle ce i se vor cere.

DELEGAŢIUNEA SOCIETĂŢII.

RAPORTUL COMISIUNEI PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „GENERAL SC. PANAITESCU“

PE ANUL 1933 — 1934

Subsemnații membri ai comisiunei pentru decernarea premiului pentru lucrări de matematici, aplicate la științele militare, am constatat următoarele:

— La Redacția *„Gazetei Matematice“* nu s'a primit nici un manuscris sau broșură, care să trateze un astfel de subiect.

— Lucrările apărute sau articolele publicate în revistele militare în intervalul 1. IX. 1933 — 1. VIII. 1934, nu satisfac condițiunilor acordării acestui premiu.

Dintre revistele militare, aceea care a avut mici articole mai apropiate de condițiunile acestui premiu, a fost anul acesta *Revista Artileriei*, și în consecință propunem ca premiul să fie acordat acestei reviste.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL „GENERAL SC. PANAITESCU“:
COLONEL GH. BUICLIU, COLONEL GH. LITEANU,
LT.-C-DOR GH. NICULESCU.

Acest raport s'a citit și aprobat la Adunarea Generală de la 22 August 1934.

NOTE MATEMATICE

7. *Congresul matematicianilor slavi din Praga.* In zilele de 23 — 28 Septemvrie 1934 s'a ținut la Praga al doilea Congres al matematicianilor slavi. Ședințele de deschidere, de închidere și o ședință plenară s'au ținut în sala cea mare a Facultății de Științe, iar celelalte la Institutele de Matematici și de Fizică ale Universității «CAROL». S'au făcut numeroase comunicări din toate ramurile matematicilor.

Dintre matematicianii români au luat parte la Congres:

D-l D. BARBILIAN care a făcut o comunicare intitulată: *„Einordnung von* LOBATSCHEWSKY'S *Massbestimmung in eine gewisse allgemeine Metric der* JORDAN'*schen Bereiche“.*

D-l AL. PANTAZI.

D-l C. POPOVICI care a făcut o comunicare despre ecuația lui FREDHOLM și alta intitulată *„Fonctions bornées"*.

D-l P. SERGESCU care a făcut o comunicare în Secțiunea de Algebră, — unde a fost ales președinte, — intitulată: *„Compléments sur ma communication de Chambery, 1933"* și două comunicări în secțiunea de Istoria Științelor intitulate: *„Aperçu sur les mathématiques en Roumaine au XX-e siècle"* și *„Sur l'organisation de l'enseignement mathématiques en Roumaine"*.

In programul Congresului găsim anunțate comunicări și din partea D-lor O. ONICESCU și R. RACLIȘ.

Printre delegați a fost citat lângă *Academia Română: „Institutul Român de Matematici"* (? !).

I. IONESCU.

8. *Sur un tétraèdre special.* Soient un tétraèdre ABCD, (BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$, DA $= a'$, DB $= b'$, DC $= c'$), G le centre de gravité, $G_d, \ldots,$ celui du triangle ABC, $\ldots,$ D' le pied de la hauteur DD' $= h_d$, O_d le centre du cercle circonscrit au triangle ABC d'aire S_d, V le volume du tétraèdre. Considérons ce tétraèdre ABCD pour lequel *le tétraèdre* GABC *est trirectangle en* G.

On a

$$\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 = \overline{CG}^2 = \tfrac{1}{2} \mid a^2 + b^2 + c^2 \mid = \overline{DG}^2.$$

Comme

$$4AG = 3AG_a,$$

$$8\Sigma a^2 = 9\,\Sigma\,\overline{AG}_a^2 = 5\Sigma a^2 - \Sigma a'^2,$$

soit

$$3\,(a^2 + b^2 + c^2) = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

D'autre part,

$$\overline{AG}^2 + a^2 = \overline{BG}^2 + b^2 = \overline{CG}^2 + c^2,$$

si bien que

$$3a^2 + a'^2 = 3b^2 + b'^2 = 3c^2 + c'^2,$$

et, finalement,

$$(1) \quad 2\,(b^2 + c^2) = a^2 + a'^2\,,\ 2\,(c^2 + a^2) = b^2 + b'^2,$$
$$2\,(a^2 + b^2) = c^2 + c'^2\ (^1).$$

1) J. NEUBERG, *Mathesis*, 1922 — 34.

Si m_a , m_b , m_c sont les médianes du triangle ABC, la relation (1) montre que

(2) $$a' = 2m_a \ , \ b' = 2m_b \ , \ c' = 2m_c \ .$$

Les arêtes DA, DB, DC *du tétraèdre sont donc respectivement égales aux médianes du triangle* $A_2B_2C_2$ *anticomplimentaire de* ABC.

Le théorème de la médiane appliqué aux triangles DAA_2, DBB_2 , DCC_2 permet d'obtenir

$$D\overline{A}_2^2 = 2\,(b'^2 + c'^2) - (a^2 + a'^2)$$

$$D\overline{B}_2^2 = 2\,(c'^2 + a'^2) - (b^2 + b'^2)$$

$$D\overline{C}_2^2 = 2\,(a'^2 + b'^2) - (c^2 + c'^2),$$

c'est-à-dire

$$DA_2 = 2a \ , \ DB_2 = 2b \ , \ DC_2 = 2c.$$

Par suite, *le tétraèdre* $DA_2B_2C_2$ *est équifascial.*

On arrive d'ailleurs très simplement à ce résultat en observant que les droites A_1M, B_1N, C_1P qui joignent les milieux des arêtes opposées (BC, AD), (CA, BD), (AB, CD) se coupent au point G et que chacune d'elles est située dans les plans des faces de tétraèdre GABC. Par suite, AG, BG, CG sont perpendiculaires respectivement à A_1M, B_1N, C_1P en leurs milieux. Les triangles AA_1M, BB_1N, CC_1P, sont isocèles ainsi que ADA_2, BDB_2, CDC_2 et on retrouve les égalités (2). Ceci conduit à dire que les droites AG, BG, CG sont perpendiculaires aux arêtes opposées (B_2C_2 , DA_2), (C_2A_2 , DB_2), (A_2B_2 , DC_2) en leurs milieux. Le point G est donc le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $DA_2B_2C_2$, ce qui justifie à nouveau la nature de ce tétraèdre.

Les rapports

$$G_d\,G : G_d\,D = 1 : 4 = G_d\,O_d : G_d\,H_d \ ,$$

montrent que le symétrique de l'orthocentre H_d du triangle ABC par rapport au centre de son cercle circonscrit est lui-même symétrique du pied D' de la hauteur DD' par rapport à H_d ,

Le centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre GABC est situé sur la médiane DG_d , et

$$G_d\,\omega : G_d\,G = 1 : 2.$$

Enfin, on a ces relations

$$16\ h_d^2 = (a'^2 - a^2)\,(b'^2 - b\,)\,(c'^2 - c^2) : 64\ S_d^2$$

$$12\ V = abc\ \sqrt{\cos A\ \cos B\ \cos C}.$$

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

9. *Sur le triangle automédian.* **1.** Considérons un triangle ABC, (BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$), dans lequel les carrés des côtés sont les termes d'une progression arithmétique de raison r.

Posons

$$a^2 = \alpha - r\ ,\ b^2 = \alpha\ ,\ c^2 = \alpha + r.$$

Les carrés des médianes de ce triangle valent

$$m_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}(\alpha + r) = \frac{3}{4}c^2$$

$$m_b^2 = \frac{1}{2}(c^2 + a^2) - \frac{1}{4}b^2 = \frac{3}{4}\alpha = \frac{3}{4}b^2$$

$$m_c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2 = \frac{3}{4}(\alpha - r) = \frac{3}{4}a^2.$$

On déduit de là que, dans un triangle de cette forme, *le triangle que l'on peut toujours construire avec les médianes pour côtés est semblables au triangle fondamental,* et

$$m_a : m_b : m_c = c : b : a.$$

Le triangle considéré ABC, tel que $2b^2 = c^2 + a^2$, est appelé triangle *automédian* [1]).

Réciproquement d'ailleurs, si dans un triangle $2b^2 = c^2 + a^2$, on a

$$m_a^2 : c^2 = m_b^2 : b^2 = m_c^2 : a^2 = 4 : 3\ ^2).$$

2. On peut rechercher s'il existe des triangles tels que

$$m_a : m_b : m_c = a : b : c.$$

---

1) J. NEUBERG, *Bibliographie des triangles spèciaux,* p. 14.
2) ARTZT, *Zeitschrift für mathematischen Unterricht,* 1887 — 198.

Pour que cette relation existe, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{|\,2(b^2+c^2)-a^2\,|}{a^2} = \frac{|\,2(c^2+a^2)-b^2\,|}{b^2} = \frac{|\,2(a^2+b^2)-c^2\,|}{c^2},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{a^2} - 3 = \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{b^2} - 3 = \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{c^2} - 3,$$

ou $$a = b = c.$$

Dans ce cas, le triangle ABC est *équilatéral* et on a encore

$$2b^2 = c^2 + a^2.$$

Par suite, *la condition nécesaire et suffisante pour que le triangle, construit avec les médianes d'un triangle donné comme côtés, soit semblable à ce triangle, est que le triangle considéré soit automédian.*

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

10. *Sur un triangle spécial.* M. M. MARGULIUS, en résolvant (G. M., Vol. XXXIX, pag. 464) la question 3785 ayant pour objet de construire les triangles qui ont même aire que leur triangle orthique, conclut à l'impossibilité de l'existence de tels triangles.

Or des triangles réels statisfaisant à cette condition s'obtiennent lorsqu'on admet que les aires considérées peuvent être égales et de signes contraires. On doit alors avoir

$$\cos A \cos B \cos C = -\frac{1}{2},$$

et l'on retrouve les triangles dont les cercle circumscrit et le cercle des neuf points sont orthogonaux (voir *Mathesis,* 1906, pag. 155). La distance de l'orthocentre H au centre O du cercle circonscrit a alors pour expression $R\sqrt{5}$, Rétant le rayon du cercle ABC et l'on en déduit cette construction des triangles considérés :

Le cercle O de raion R étant tracé, on même en un point P une tangente PH, sur laquelle on prend un segment $PH = 2R$; si la droite joignant H à un point A du cercle recoupe celui-ci en A', la perpendiculaire élevée au milieu de HA' coupe le cercle en deux points B, C formant avec A un triangle répondant à la question.

R. GOORMAGHTIGH.

11. *Asupra problemei 4168.* In această problemă este dat un caz particular de ecuațiune de gradul al patrulea, a cărei rezolvare se face numai cu ajutorul rădăcinilor pătrate, prin două rezolvări succesive a ecuațiunii de gradul al doilea. Nu știm dacă autorul, Domnul G. CĂLUGĂREANU a avut în vedere numai forma direct legată de exemplul dat în enunțul problemei, soluțiunea dată însă la *pag. 38, Anul XL,* trebue complectată cu mai multe observațiuni, dintre care unele prezintă interes.

Problema spune că dacă coeficienții unui polinom

$$P_4(x) \equiv Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

satisfac relațiunii:

$$(R)\ B^3 - 4ABC + 8DA^2 = 0,$$

el se poate pune sub forma: $Q_2[R_2(x)]$.

In cazul când este de această formă și are o rădăcină dublă, aceasta este *media aritmetică* a celorlalte două: $2x_1 = x_2 + x_3$.

Observăm în primul rând că, dacă coeficientul termenului de gradul al treilea este nul ($B = 0$), relațiunea de condițiune (R) dă imediat $D = 0$, prin urmare observăm în primul rând că *ecuațiunea bipătrată face parte din clasa de mai sus;* apoi dacă facem transformarea $x = y + h$ și punem condițiunea ca să dispară termenul în y^3, pentru ca ea să devină ecuațiune bipătrată trebue ca să avem:

$$\frac{1}{8A^2}[B^3 - 4ABC + 8A^2D] = 0,$$

adică tocmai condițiunea din *problema 4168.* Așadar, *ecuațiunile de gradul al patrulea care răspund problemei 4168, devin prin transformarea* $x = y + h$, *ecuațiuni bipătrate și reciproc.*

O altă observare importantă, o obținem plecând dela observarea generală că, dacă ne ocupăm de formele particulare ale ecuațiunilor care sunt rezolvabile cu ajutorul ecuațiunilor de gradul al doilea, trebue totdeauna să alăturăm cercetării ecuațiunea de același grad care admite ca rădăcini inversele rădăcinilor ecuațiunii date. Pentru problema 4168 se găsește, aplicând proprietetea enunțată ecuațiunii $y^4 P_4\left(\frac{1}{y}\right) = 0$, că ecuațiunea este rezolvabilă prin procedeul enunțat dacă între coeficienți există relațiunea:

$$(R')\quad D^3 - 4CDE + 8BE^2 = 0.$$

In cazul când între coeficienţii ecuaţiunii $P_4(x) = 0$ există relaţiunea (R') şi ecuaţiunea are o rădăcină dublă, aceasta este media armonică a celorlalte două:

$$\frac{2}{x_1} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}.$$

O. N. Ţ.

12. *Asupra articolului: Relaţii în legătură cu punctele lui* FEUERBACH, publicat în *Gazeta Matematică,* Vol. XXXIX, pag. 295. Proprietatea, că dreptele $A\varphi_a$, $B\varphi_b$, $C\varphi_c$ concură într'un punct M de pe O_9I am găsit-o în Martie 1932, fără să ştiu la acea dată că ea e cunoscută. Ulterior publicării articolului meu am găsit că această proprietate a fost dată de D-na PEARL C. MILLER în *Bulletin of the American Mathematical Society,* 1931, pag. 831, D-na PEARL C. MILLER dă o soluţie prin coordonate ternare şi ajunge la concluzia că, *Dreptele* $A\varphi_a$, $B\varphi_b$, $C\varphi_c$ *concură în un punct* M, *conjugatul armonic al lui* φ *în raport cu punctele* O_9 *şi* I, *şi proprietatea se extinde la punctele* I_a, O_9, φ_a *şi analoagele lor*".

Intr'o notă din *Mathesis,* 1932, pag. 46, D-l AD. MINEUR dă o demonstraţie simplă şi directă a aceleiaşi proprietăţi.

Din relaţia (25), pe care am stabilit-o la pag. 298, Vol. XXXIX, G. M. rezultă că punctul M este conjugatul lui φ faţă de O_9 şi I, căci din acea relaţie se deduce:

$$\frac{MI}{MO_9} = \frac{\varphi I}{\varphi O_9} = \frac{2r}{R}.$$

N. N. MIHĂILEANU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA OFIŢERI DE AVIAŢIE «REGELE CAROL II»

(Examenul de admitere Iulie 1934)

Secţia Naviganţi

ALGEBRA

1. Să se determine a şi b, astfel ca polinomul

$$P(x) = ax^3 - bx^2 - 5x + 4$$

divizat prin $(x + 1)$ să dea restul 6 şi divizat prin $(x - 1)$ să dea restul -2.

2. Se dă ecuaţia :

$$x^3 + (m - 1)\, x^2 + (3 - 2m)\, x + 2 = 0.$$

Una din rădăcini fiind 2, să se afle valoarea lui m, astfel încât celelalte două rădăcini să fie egale şi de semne contrarii.

GEOMETRIA

1. Se dă o dreaptă D şi 2 cercuri O şi O′ tangente exterioare şi tangente dreptei D respectiv în punctele T şi T′.

Linia centrelor întâlneşte pe D în punctul S. Se cere să se determine lungimele TT′, SO şi SO′ în funcţie de razele R şi R′ ale cercurilor.

2. Se dă o prismă dreaptă plină, de înălţime 31 şi cu bazele exagoane regulate de latură l.

La baza de sus se unesc mijloacele laturilor exagonului şi se obţine un alt exagon ; se consideră cercul c înscris în acest nou exagon.

Se execută apoi următoarea operaţiune :

Se scoate din prismă la partea superioară, până la 2/3 din înălţimea prismei, un cilindru drept care are ca bază cercul C ; iar din restul prismei se scoate un con cu vârful în centrul exagonului de bază inferioară şi având ca bază cercul de la partea prismei unde s'a oprit extracţia cilindrului.

Se cere greutatea solidului plin rămas, în urma acestor extracţii, ştiind că densitatea materialului din care e făcută prisma este d.

Aplicaţie :

$$l = 2\ ,\ i = 2\ ,\ d = 4.$$

TRIGONOMETRIA

1. Să se demonstreze identitatea

$$\frac{2 \sin (a + b)}{\cos (a - b) + \cos (a + b)} = \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b.$$

2. Unghiurile adiacente laturei BC a triunghiului ABC sunt

$$B = 45^0 \text{ şi } C = 60^0.$$

Se întreabă :

a) Dacă $BC = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, care sunt laturile AB şi AC.

b) Dacă $BC = \sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$, care e suprafaţa triunghiului.

(Timp de lucru : 4 ore).

Secţia Mecanici

ALGEBRA

1. Să se determine m şi n astfel încât polinomul:

$$x^4 - 3x^3 + mx + n$$

să fie divizibil cu $x^2 - x - 6$.

2. Să se calculeze laturile unui triunghiu dreptunghic având perimetrul egal cu 24 m. şi înălţimea dusă din vârful unghiului drept egală cu 4,8 m.

GEOMETRIA

1. Se dă un cerc O, de rază R, având diametrul AB.

In punctul A, se duce tangenta AM = 2R. Din M, se duce MT, a doua tangentă la cerc. Se uneşte A cu T şi fie I punctul de intretăiere cu diametrul CD perpendicular pe AB.

Se cere să se afle lungimile OI, AT precum şi suprafaţa triunghiului AMT în funcţie de raza R.

2. Aceiaşi ca a doua chestiune de Geometrie dela Secţia Naviganţi.

TRIGONOMETRIA

1. Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{\sin 2a}{\cos a + \cos^2 a} = 2 \operatorname{tg} \frac{a}{2} .$$

2. Aceiaşi ca a doua chestiune de Trigonometrie de la Secţia Naviganţi.

(Timp de lucru: 4 ore).

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico. Anul VII. No. 5. Iulie 1934. Buenos Aires. Maşina de calculat şi calculul rădăcinilor, de J. B. SOUTO. Compliment asupra numerelor raţionale generalizate, de O. GONZALEZ.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIV. No. 7. Septemvrie 1934. Timişoara. *Triangle quasi-rectangle en nombres entiers,* par V. THÉBAULT. Asupra podarelor, de CEZAR COŞNIŢĂ.

N. ABRAMESCU. *Noţiuni de Algebră financiară,* pentru clasa VI liceală. Bucureşti. Editura *Cartea Românească.*

In această carte se tratează despre puteri, radicali, progresii aritmetice şi geometrice, rigla de calcul, dobânzi compuse, sconturi compuse, strângerea unui capital, anuităţi, rente constante şi sigure, rente amortizări, obligaţiuni. plasamente, noţiuni de asigurări asupra vieţii. Cartea se termină cu tabele numerice.

E o carte scrisă clar şi care pune pe cititor în curent cu principalele operaţiuni financiare.

I. I.

N. ABRAMESCU. *Lecţiuni elementare de Algebră superioară,* pentru clasa VII, secţia ştiinţifică. Bucureşti. Editura *Cartea Românească.*

E o carte făcută în vederea nouei programe pentru cursurile ştiinţifice liceene. Ea este făcută în spiritul *«Teoriei ecuaţiilor»* din care autorul a tipărit patru ediţiuni în *«Biblioteca Gazetei Matematice».*

Cartea are următorul cuprins: analiza combinatoare, binomul lui NEWTON, determinanţi, funcţiuni, limite, derivate, variaţia funcţiilor, serii, funcţiuni exponenţiale şi logaritmice, funcţiuni de mai multe variabile, aplicaţii la cinematică.

I. I.

N. ABRAMESCU. *Aplicaţiunile trigonometriei la agrimensură şi la statică.* Bucureşti. Editura *Cartea Românească.*

Cartea dă noţiuni de topografie şi de statică pentru clasa VI liceală. In prima parte se vorbeşte de instrumente topografice; cu o descriere sumară care nu poate fi pricepută de cât avându-se şi instrumente de arătat elevilor. Urmează măsurarea distanţelor şi înălţimilor, planimetria, măsurarea suprafeţelor, nivelment (autorul zice *nivelare,* dar aceasta în tehnică înseamnă o aranjare a unei suprafeţe de teren). Ar fi trebuit câteva cuvinte despre raportarea planurilor şi reprezentarea altitudinilor. In partea privitoare la statică sunt date formule şi aplicaţiuni pentru compunerea şi descompunarea forţelor.

I. I.

GH. TH. GHEORGHIU. *Sur les polynomes associés aux fonctions métasphériques.* (Extras din *Bulletin des Sciences mathématiques*). Paris 1934.

I. POPA. *Géométrie centro-affine des courbes gauches.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de Paris). Paris 1934.

N. CIORANESCU. *Curs elementar de algebră superioară.* Partea I, pentru uzul, cl. VII (ştiinţifică), Liceelor militare şi a Anului Preparator dela Facultăţile de Ştiinţe şi Şcolile Politehnice. Bucureşti 1934.

Autorul, conferenţiar de algebră la Şcoala Politehnică din Bucureşti, după o experienţă de cinci ani, publică, în un volum de 216 pagini, o parte din cursul său, adaptat şi pentru uzul Liceelor civile şi militare. Chestiunile care nu privesc învăţământul secundar sunt indicate cu un *.

Volumul coprinde analiza combinatoare cu formula binomului, ecuaţii lineare şi determinanţi, numere iraţionale, radicale, numere complexe, funcţiuni,

limite, derivate, variaţiunea funcţiunilor, serii exponenţiale, logaritmi, funcţiuni circulare inverse. teorema lui ROLLE, funcţiuni de mai muite variabile. El se termină cu aplicaţiuni la cinematică. Capitolele sunt urmate de exerciţii numeroase şi variate.

Cartea este scrisă cu pricepere şi are în vedere restaurarea algebrei în învăţământul secundar la nivelul la care se găsea în fostele Licee reale. Ea este scrisă, nu pentru masa mare a liceenilor, ci pentru cei ce vor să înveţe serios matematicele. Acestora, şi profesorilor care vor să-i formeze, recomandăm în special cartea D-lui N. CIORĂNESCU.

I. I.

N. M. GUNTHER. *La Théorie du Potentiel.* Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1934.

Această publicaţie face parte din colecţia de monografii asupra teoriei funcţiunilor, publicată sub direcţia D-lui EMIL BOREL. Este o expunere riguroasă şi fixează starea actuală a cunoştinţelor în această teorie de analiză şi fizică matematică.

Coprinde următoarele capitole: Cap. I se referă la o serie de teoreme preliminare, având la bază anumite ipoteze, pe care autorul le numeşte condiţiile lui LIAPUNOFF. Cap. II tratează teoria potenţialului relativ la o simplă pătură şi la o dublă pătură atractivă. Cap. III tratează problemele lui NEUMAN şi ROBIN. Cap. IV tratează problema lui DIRICHLET. Cap. V se referă la funcţiunile lui GREEN şi aplicaţiunile lor la diferite probleme de fizică, în special în domeniul căldurii. Intr'un apendice se desvoltă anumite teoreme ale lui LIAPUNOFF privitoare la potenţial corespunzător unei pături simple şi unei pături duble.

A. G. I.

CERERI

Răspuns la Cererea No. 221. Ca anexă la *«Regulamentul pentru organizarea Corpului de ingineri Civili»*, decretat de Domnitorul ALECSANDRU IOAN I la 4 August 1862 cu No. 629, e dată *«Programa de cunoştinţele cerute pentru admiterea la gradul de inginer»*. La Cap. V al acelei programe, sub titlul *«Mecanica aplicată»* găsim:

1. *Resistenţa materialelor.*

Resistenţa unui corp prismatic tras în sensul longitudinal.—Resistenţa la flecsie produse de uă putere perpendiculară lungimei corpului.—Casulu unei piese puse pe două căpătâe şi a unei piese incastrate. — Impingerea pământului.

Frecare. Frecare de lunicare şi de rulementu. — Expresiunea lucrului absorbantu de frecare; 1, casulu unui corp ce lunică pe o supra-faciă plană, 2, unu axu ce se întórce într'un cusinet.

2. *Echilibru bolţelor.* Bolţi estradosate paralelu. — Impingerea orizontală. — Grosimea la cheie, unghiulu rupturi, grosimea piciórelor. — Curba de presiuni.

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecei

Recreaţii ştiinţifice. Volumele I, III, IV, V şi VI.

Donaţiune făcută de *Seminarul matematic al Facultăţei de ştiinţe* din Iaşi, prin D-l Profesor A. MYLLER.

Curierul Matematic. Anul II şi III.

Donaţiune făcută de D-l C. IONESCU-BUJOR.

Jurnal Matematic. Anul II. No. 4 şi No. 5.

Donaţiune făcută de D-l TIBERIU POPOVICIU.

CĂP. ING. GEORGES NICOLESCO. Sur une famille spéciale de tolérances appliquées aux moteurs d'aviation. Timişoara 1931.

Donaţiune făcută de D-l I. IONESCU Inginer.

E. DESPORTES. *Traité élémentaire de géometrie descriptive,* pour l'enseignement secondaire spécial, rédigé conformément aux programmes officiels. Paris 1899.

Donată de D-l Col. GH. BUICLIU.

A. MANNHEIM. *Cours de géométrie descriptive* de l'école polytechnique comprenant les éléments de la géometrie cinématique. Paris 1886.

Donată de D-l Col. GH. BUICLIU.

E. MUZEAU. *Calcul des erreurs.* Août 1884. Curs litografiat.

Donată de D-l Col. GH. BUICLIU.

M. HÉLIE. *Traité de balistique expérimentale.* Tome premier. Paris. 1884.

Idem. Tome second.

Donat de D-l Col. GH. BUICLIU.

CH. BRIOT. *Leçons d'Algèbre* conformes aux programmes officiels de l'enseignement des lycées. Treizième edition. Paris 1891.

Donată de D-l Col. GH. BUICLIU.

A. POUSSART. *Traité élémentaire de mécanique.* Mécanique théorique et mécanismes. Paris.

Donată de D-l Col. GH. BUICLIU.

A. POUSSART. Traité élémentaire de mécanique. Moteurs, récépteurs et opérateurs. Paris.

Donată de D-l Col. GH. BUICLIU.

R. K. MEADE. *The chemists pocket manual* for the use of Chemists, Chemical Engineers, Assayers, Metalurgists, Manufacturers and Students. London 1910.

Donată de D-l Col. GH. BUICLIU.

PROBLEME REZOLVATE *)

PROBLEMA 2683. *Care sunt numerele de trei cifre, care adunate cu răsturnatele lor să ne dea un patrat perfect ?*

A. VLĂDESCU.

Soluţie dată de D-nii: M. I. ADAM, N. P. ARCADIAN, E. C. BIERNASCHY, D. M. BLUMENFELD, S. I. DANILO, B. V. GATAIANŢU, N. GEORGESCU-ROENGEN, P. KATZ, F. I. MARCUS, M. I. PETROIANU, I. GH. POPA, T. A. SUCACIU, T. POPOVICIU, T. A. TĂNĂSESCU, A. TAUBER, I. WEINSTEIN.

Fie *szu* , *uzs* cele două numere unul răsturnatul altuia. Operaţiunea cerută este:

$$\begin{array}{ccc} s & z & u \\ u & z & s \\ \hline \end{array}$$

$$(s+u)\,(2z)\,(s+z) = n^2.$$

Vom deosebi două cazuri după cum $(s+z)$ are una sau două cifre:

1. $s+z<10$. Aci vom deosebi două cazuri:

a) $2z<10$, adică $z<5$. Atunci n^2 începe şi sfârşeşte cu $(s+z)$. Apoi, grupa $(2z)\,(s+z)$ terminând un patrat, cu zecile perechi, nu putem avea pentru $(s+z)$ decât cifrele, 1, 4, 5, 9. Deci n^2 ar putea fi numai printre numerele 101, 121, 141, 161, 181, 404, 424, 444, 464, 484, 525, 909, 929, 949, 969, 989.

b) $2z>10$ sau $z>4$. In acest caz n^2 are cifra zecilor $(2z-10)$, iar a sutelor $(s+z+1)$. Deci n^2 se găseşte printre numerele 201, 221, 241, 261, 281, 504, 524, 544, 564, 584, 625, 1009, 1029, 1049, 1069, 1089.

2. $s+z>9$. Atunci zecile lui n^2 sunt $(2z+1)$ sau $(2z-9)$ după cum $2z$ are o cifră sau două. Ele sunt deci neperechi şi în acest caz n^2 trebue să se termine cu 6. Deci $(s+z)=16$. Sutele lui n^2 sunt atunci 16 sau 17 după cum $(2z+1)$ nu trece sau trece de 9. Deci n^2 nu se poate găsi decât printre numerele 1616, 1636, 1656, 1676, 1696, 1716, 1736, 1756, 1776, 1796.

*) Problema 4278, a cărei soluţie s'a publicat la pag. 40 numărul trecut, a mai fost rezolvată la timp de D-nii: G. SILAŞ (Student, Cluj) pe cale geometrică, D. D. MAVRODIN şi P. C. MAZILU.

Numerele de forma $\mathfrak{M}3 + 2$ nu pot fi patrate. Deci ştergem din numerele de mai sus pe 101, 161, 404, 464, 989, 224, 284, 524, 584, 1049.

Numerele de forma $\mathfrak{M}3$ nu pot fi patrate dacă nu sunt şi de forma $\mathfrak{M}9$. Deci din numerele de mai sus mai ştergem pe 141, 444, 525, 969, 204, 264, 564, 1029.

Un număr nu e patrat decât dacă este $\mathfrak{M}11$, $\mathfrak{M}11 + 1$, $\mathfrak{M}11 + 3$, $\mathfrak{M}11 + 4$, $\mathfrak{M}11 + 5$ sau $\mathfrak{M}11 + 9$. Ştergem dar şi numerele 424, 909, 244, 1009, 1069, 1616, 1636, 1656, 1696, 1756 care nu îndeplinesc asemenea condiţiuni.

Ne-au mai rămas numerele 121, 181, 484, 949, 504, 625, 1089, 1736. Cercetând în o tabelă de patrate, sau încercând a le extrage rădăcina, găsim că n^2 nu este decât 121, 484, 625 şi 1089.

Revenind la schema adunării dela început şi ţinând seama ce cazuri ne-au procurat aceste patrate trebue să descompunem unimile $(s + z)$ în o sumă de două numere mai mici ca 10 care vor fi cifrele căutate ale unităţilor şi sutelor. Cifra zecilor se deduce apoi după forma găsită pentru ea în fiecare caz. Se obţin astfel toate soluţiile problemei aci arătate şi care se vede că sunt în număr de 19.

110	143 242 440	164 263 560
011	341 242 044	461 362 065
$121 = 11^2$	$484\ 484\ 484 = 22^2$	$625\ 625\ 625 = 25^2$

198 297 396 495 990
891 792 693 594 099
$1089\ 1089\ 1089\ 1089\ 1089 = n^2$

.

In rezumat numerele căutate sunt 110, 143, 164, 198, 242, 263, 297, 341, 362, 396, 440, 461, 495, 560, 693, 792, 891, 990.

Au rezolvat bine chestiunea dar nu au considerat soluţiile la care răsturnatele nu au numai trei cifre (011, 044, 065, 099); D-nii: E. ILIESCU, A. PAMULA, I. TH. POPOVICI, I. T. RIZESCU, E. ŞTEFĂNESCU, I. C. VASILIU. In schimb D-nii N. GEORGESCU-ROENGEN şi T. A. SUCACIU au considerat şi soluţiile formale 011, 044, 065 şi 099.

Observaţiuni. 1) Pentru numerele de două cifre problema admite soluţiile 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92. (T. POPOVICIU şi I. T. RIZESCU).

2) Problema nu admite soluţiuni pentru numerele de patru cifre. (T. POPOVICIU).

3) Numerele de trei cifre care adunate cu răsturnatele lor ne dau un cub sunt 122 şi 221. (T. POPOVICIU).

4. Această problemă e publicată ca exerciţiu în *Gazeta Matematică*, Anul XXVIII, pag. 38, de D-l G. NICHIFOR (I. COŞEREANU).

I. I.

PROBLEMA 3919. *Se dau două axe dreptunghiulare* Ox, Oy *şi un punct* A *fix pe* Oy. *Pe paralela* AA' *la* Ox *se ia un punct mobil* M. *Fie* B *mijlocul lui* AM. *Se consideră hiperbola echilateră* (H), *care trece prin* A *şi* M *şi e tangentă în* O *la* Ox.

Se cere :

1°. *Locul intersecţiei lui* (H) *cu paralela la* OB *dusă prin* M.

2°. *Locul proecţiei centrului lui* (H) *pe această paralelă.*

COL. GH. BUICLIU.

I. *Soluţie geometrică,* dată de D-l ADR. C. GHEORGHIU (Student, Bucureşti).

Paralela la OB dusă prin M, trece evident prin punctul P, simetricul lui A faţă de O. Observ că deoarece AM e paralelă cu tangenta în O la (H) iar B este mijlocul lui AM, rezultă că OB este diametru conjugat direcţiei Ox. In fine dreapta AM $\parallel Ox$ fiind împărţită în părţi egale de OB, fascicolul (OA, OM, OB, Ox) este armonic.

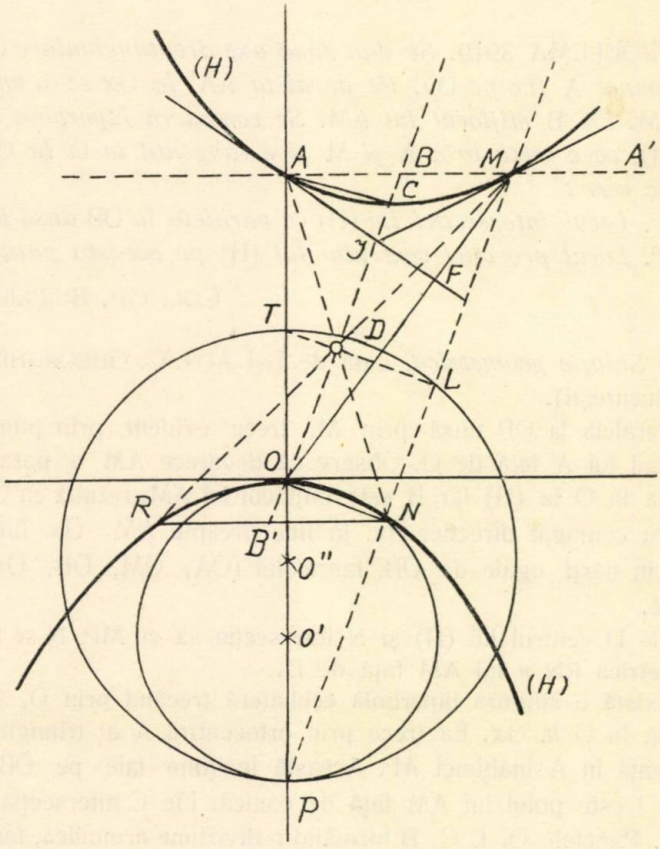
Fie D centrul lui (H) şi N intersecţia sa cu MP, N se va găsi pe simetrica RN a lui AM faţă de D.

Există o singură hiperbolă echilateră trecând prin O, A, M şi tangentă în O la Ox. Ea trece prin ortocentrul A al triunghiului şi e tangentă în A înălţimei AF. Această înălţime taie pe OB în I; punctul I este polul lui AM faţă de conică. Fie C intersecţia lui OB cu (H). Punctele O, I, C, B formând o diviziune armonică, fascicolu A (O, C, I, B) este armonic şi cum are 3 raze perpendiculare pe razele fascicolului armonic O (AMBx) urmează că şi razele ultime sunt perpendiculare, deci AC $\perp$ OB.

Observ că triunghiul RON este prin construcţie simetricul triunghiului MCA faţă de D, prin urmare ON simetrica lui AC va fi perpendiculară pe OB ca şi AC, deci va fi perpendiculară şi pe MP.

1°. Punctele O şi P fiind fixe locul lui N este cercul de centru O' şi diametru OP. Aceasta rezolvă punctul 1°.

2°. Punctul D fiind la mijlocul lui OC, perpendiculara DL din D pe AP_1 deci şi pe OB, va trece prin mijlocul T al lui OA. In triunghiul dreptunghic PLT punctele P şi T fiind fixe, L descrie cercul de diametru PT şi centru O''.



II. *Soluţie analitică,* dată de D-şoara ELEONORA ANTONIU (Studentă, Cluj) şi de D-nii: SUB-LT. A. I. STAN, I. DEAC (Studenţi, Cluj); CONSTANTINESCU-BUZĂU, N. N. MIHĂILEANU, M. MARGULIUS, I. C. ŞOVA-GRIGORENI (Studenţi), P. I. GHIŞOIU (Şc. Politehnică, Bucureşti).

Luăm ca axe pe Ox şi OA şi fie $A(0, a)$, $B(\lambda, a)$, $M(2\lambda, a)$. Ecuaţia lui (H) este

$$(1) \qquad ax^2 - 2\lambda xy - ay^2 + a^2y = 0.$$

Paralela din M la OB are ecuaţia

$$(2) \qquad ax - \lambda y - a\lambda = 0.$$

1^0. Locul lui N se află eliminând pe λ între (1) şi (2). Rezultatul eliminării, uşor de efectuat, este

$$(y - a)\,(x^2 + y^2 + ay) = 0$$

şi locul cerut se compune din dreapta

$$y - a = 0$$

care corespunde locului lui M, şi cercul

$$x^2 + y^2 + ay = 0$$

care corespunde locului lui N cerut la 1^0. Se vede că acest cerc trece prin origină şi prin punctul $P(0, -a)$ şi are raza egală cu $\frac{a}{2}$.

2^0. Se găseşte uşor că centrul hiperbolei este

$$D\left[\frac{a^2\lambda}{2a^2 + 2\lambda^2}\,,\ \frac{a^3}{2a^2 + 2\lambda^2}\right]$$

dreapta DL, perpendiculară pe MP de ecuaţie (2) este

$$y - \frac{a^3}{2a^2 + 2\lambda^2} = -\frac{\lambda}{a}\left(x - \frac{a^2\lambda}{2a^2 + 2\lambda^2}\right).$$

Eliminând pe λ între această ecuaţie şi (2) se găseşte că locul lui L este cercul

$$2x^2 + 2y^2 + ay - a^2 = 0$$

de centru $\left(0, -\frac{a}{4}\right)$, adică tocmai cercul de diametru PT găsit la soluţia geometrică.

Notă. 1°. O bună soluţie geometrică a trimis şi D-l CONSTANTINESCU-BUZĂU.

2°. Centrul D al hiperbolei fiind la mijlocul lui OC, va descrie un cerc omotetic cu cercul descris de C.

Pe cale analitică se găseşte că ecuaţia acestui loc este

$$x^2 + y^2 - ay = 0.$$

GH. B.

PROBLEMA 4170. *Printre numerile de atracţie ale târgului naţional din „Moşi" este şi un motociclist, care merge cu motocicleta pe interiorul pereţilor unui cilindru vertical de rază 5 m.*

Ştiind că diversele parcursuri le face cu 80, 100, 120 km./oră, se cere să se calculeze înclinarea planului motocicletei faţă de generatricea cilindrului, pentru fiecare parcurs în parte.

MAIOR I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-l MARTIN ZIFF.

Asupra motocicletei acţionează, în afara tracţiunii, două forţe:

— greutatea ei,

— forţa centrifugală,

ambele aplicate în centrul de greutate.

Pentru ca motocicleta, să se poată menţine pe peretele vertical al cilindrului, ar trebui ca în planul motocicletei să se găsească rezultanta celor două forţe de mai sus.

Fie α înclinarea planului motocicletei faţă de generatricea cilindrului, v viteza motocicletei pe perete, r raza cilindrului şi m massa motocicletei, inclusiv motociclistul; atunci avem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m \cdot \frac{v^2}{r}}{m \cdot g} = \frac{v^2}{g \cdot r}$$

g fiind acceleraţia gravitaţiei.

Pentru $r = 5\,m$ avem:

$$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}0204 \cdot v^2.$$

Atunci:

v	80 km/oră	100	120
	22,22 m/sec	27,77	33,33
$\operatorname{tg}\alpha$	10,071	15,732	22,662
α	84°40′3″	86°30′8″	87°30′5″

PROBLEMA 4239. *Care este forma ecuației de gradul III, pentru ca derivata întâia a acestei ecuațiuni (care este o ecuație de gradul II) să fie o ecuație reciprocă?*

LT. C-DOR GH. NICULESCU.

Soluție. Scriem ecuația generală de gradul $m = 2k + 1$,

$$a_1 x^{2k+1} + a_2 x^{2k} + a_3 x^{2k-1} + \ldots + a_{k+1} x^{k+1} + a_{k+2} x^k + \ldots$$

$$+ a_{2k} x^{k-(k-2)} + a_{2k+1} x^{k-(k-1)} + a_{2k+2} = 0. \quad (1)$$

Socotind și termenul liber de necunoscută, observăm că această ecuație are $2k + 1 + 1 = 2(k + 1)$ termeni. Aceasta ne spune că termenul: $a_{k+1} x^{k+1}$ este ultimul termen al primei jumătăți, iar $a_{k+2} x^k$ este primul al celei de a doua jumătate.

Derivând ecuația de mai sus, termenul liber se anulează — ecuația derivată va avea $2k + 1$ termeni ceeace ne spune că al $(k + 1)$-lea termen al ecuației derivate se va găsi la mijlocul acesteia. Ecuația derivată este:

$$a_1 (2k+1) x^{2k} + a_2 (2k) x^{2k-1} + a_3 (2k-1) x^{2k} + \ldots + a_{k+1} (k+1) x^k$$

$$+ a_{k+2} (k) x^{k-1} + \ldots + 2a_{2k} x + a_{2k+1} = 0. \quad (2)$$

Termenul dela mijloc va fi deci: $a_{k+1} (k + 1) x^k$, iar după el ca și înaintea lui mai avem câte k termeni ca în total să avem $2k + 1$.

Pentru ca ecuaţia (2) să fie reciprocă, trebue ca coeficienţii termenilor egali depărtaţi de cel mijlociu să fie egali şi de acelaşi semn sau egali şi de semn contrariu. Urmează deci condiţiunile:

$a_1(2k+1) = \pm a_{2k+1}$; $a_2(2k) = \pm 2a_{2k}$; $a_3(2k-1) = \pm 3a_{2k-1}$ ...

şi în general:

$$a_p[2k-(p-2)] = \pm pa_{2k-(p-2)}. \qquad (3)$$

Această ultimă relaţie, aplicată la ecuaţia (1) se interpretează astfel:

Condiţia ca o ecuaţie să aibă derivata sa primă o ecuaţie reciprocă este ca produsul dintre coeficientul şi puterea oricărui termen să fie egal cu produsul aceloraşi elemente ale termenului egal depărtat de termenul din mijloc — termenul liber de necunoscută neintrând în numărul termenilor.

Acestea fiind să considerăm ecuaţiunea de gradul III:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

Nesocotind termenul liber, mai rămân ca termeni egal depărtaţi numai Ax^3 şi Cx. Aplicând regula de mai sus trebuie ca:

$$A \times 3 = \pm C \times 1 \quad \therefore \quad C = \pm 3A$$

şi ecuaţia de gradul III, care va avea derivata o ecuaţie reciprocă va fi deci:

$$Ax^3 + Bx^2 \pm 3Ax + D = 0. \qquad (4)$$

1°. Regula de mai sus, atât de uşor de stabilit şi rezultând din însăşi faptul derivării şi al definiţiunii ecuaţiei reciproce, nu a fost enunţată decât de D-l VINTILĂ GRIGORESCU (Elev. cl. VII Lic. Militar, „N. Filipescu") dar sub o formă mai greoaie. D-l V. CEAUŞESCU (Elev Lic. Militar Iaşi) a dat relaţiile (3) fără a le interpreta pentru ecuaţia (1), care ea trebue recunoscută în condiţiunile problemei.

2°. Au rezolvat problema, în cazul particular, dând forma (4), adică având în vedere ambele ecuaţiuni reciproce (de prima şi a doua speţă) D-nii MIRCEA MĂNESCU (Elev cl. VI Lic. M. Eminescu, Buc.); EM. I. MAREŞ, DIMITRIE D. MAVRODIN şi CONST. PÂRVULESCU (student, Buc.).

3°. Au rezolvat problema tot în cazul particular, considerând însă numai semnul (+) înaintea coeficientului lui (x), D-nii: SUB.-LT. CONST. N. AVRAM (din Geniu), CONST. CHIRIAC (Lic. Militar Iaşi), M. CHIRIŢĂ (Lic. Militar Craiova), I. CURCHI; MARIN DAN şi O. MARCEL ELEFTERESCU (cl. VI. Lic. Militar „N. Filipescu"), CEZAR IVĂNESCU (st. Iaşi), PANAIT C. MAZILU (Anul prep. Şc. Politehnică, Buc.), E. MEREUŢĂ (st. Buc.), M. LEONTE A. NEGREA

(Brăila), I. C. PAREPEANU, ROMEO I. RĂŞCANU (Bacău), AL. D. STOICA (Lic. Marele Voievod Mihai, Buc.), I. GH. ŞABAC (Lic. Militar „N. Filipescu"), şi V. I. C. VISSARION.

4°. Niciun corespondent nu a studiat problema în cazul definiţiei generale a ecuaţiei reciproce care admite ca produsul a două rădăcini să fie $\pm h$, ecuaţia având printre rădăcini pe x şi $\pm \frac{h}{x}$.

Ecuaţiunea (2), pentru a fi reciprocă în sens general se scrie:

$$a_1(2k+1)x^{2k} + a_2(2k)x^{2k-1} + a_3(2k-1)x^{2k} + \ldots + [a_{k+1}(k+1)x^k]$$

$$+ a_k(k+2)hx^{k-1} + a_{k-1}(k+3)h^2x^{k-2} + \ldots + a_2(2k)h^{k-1}x + a_1(2k+1)h^k = 0$$

în care am evidenţiat termenul din mijloc, scriindu-l între paranteze.

Ecuaţiunea (1), ca prin derivare să ne dea ecuaţia reciprocă de mai sus trebue să fie de forma:

$$a_1x^{2k+1} + a_2x^{2k} + a_3x^{2k-1} + \ldots + a_{k+1}x^{k+1} + \frac{a_k(k+2)}{k}hx^k$$

$$+ \frac{a_{k-1}(k+3)}{k-1}h^2x^{k-1} + \ldots + \frac{a^2(2k)}{2}h^{k-1}x^2 + a_1(2k+1)h^kx + a_{2k+2} = 0.$$

Condiţiunea (3) devine:

$$a_p[2k-(p-2)] = \pm pa_{2k-(p-2)}h^{k-(p-1)}.$$

In cazul ecuaţiunei de gradul III vom avea forma:

$$Ax^3 + Bx \pm 3Ah + D = 0$$

care nu a fost dată de nici un corespondent.

5°. D-nii: MARIUS MARGULIUS (Buc.) şi MARTIN S. ZIFF, singurii cari nu s'au mulţumit cu datele particulare ale problemei, au generalizat-o, căutând forma ecuaţiei de grad *m*, care au derivata de ordinul *n* o ecuaţie reciprocă. Nu întrevăd însă ce aplicaţie ar avea acest fel de interpretare al problemei. Când am propus problema No. 4239 m'am gândit la o aplicaţie a faptului că o ecuaţie are *derivata sa primă* o ecuaţie reciprocă.

Aplicaţia constă în modestul aport ce îl aduce în rezolvirea ecuaţiunilor recunoaşterea că o ecuaţie de grad superior gradului IV are ca primă derivată o ecuaţie reciprocă. Astfel toate ecuaţiile de gradul 7 şi 9, cari se bucură de propietatea de a avea derivatele lor prime o ecuaţie reciprocă — deci rezolvabilă — pentru acest fel de ecuaţiuni se aduce în sprijinul studiului lor şi în acel al căutării rădăcinilor lor, şirul lui ROLLE. Peste gradul 9 nu ne putem urca, căci derivata (ecuaţie reciprocă) fiind de gradul 8 se descompune în două ecuaţiuni de gradul IV, maximum de grad pentru care cunoaştem formule de rezolvare. Numai anumite clase de ecuaţiuni, care având prima derivată o ecuaţie reciprocă, aceasta la rândul ei desfăcându-se din aproape în aproape

în ecuaţiuni reciproce, până când ajunge la gradul IV sau inferior acestuia, pot depăşi gradul 9. De aceste ecuaţiuni speciale ne vom ocupa cu altă ocaziune. Pentru ecuaţiile de gradul 9 şi 7 dăm forma lor generală:

$$a_1x^9+a_2x^8+a_3x^7+a_4x^6+a_5x^5+\frac{3}{2}a_4hx^4+\frac{7}{3}a_3h^2x^3+4a_2h^3x^2+9a_1h^4x+a_{10}=0$$

$$a_1x^7+a_2x^6+a_3x^5+a_4x^4+\frac{5a_3}{3}hx^3+3a_2h^2x^2+7a_1h^3x+a_3=0.$$

In fine putem considera şi ecuaţia de gradul 6 — negeneralizată — a cărei derivată de grad 5 are o rădăcină cunoscută, deci reductibilă la o ecuaţie de grad 4. Forma acesteia este:

$$a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+\frac{4}{3}a_3x^3+\frac{5}{2}a_2x^2+6a_1x+a_i=0$$

observăm la aceste ecuaţiuni, că în cazul lui $a_1, a_2, \ldots a_{10}$ întregi şi idem pentru h, coeficieeţii termenilor din a doua jumătate sunt mai mari decât coeficienţii termenilor egali depărtaţi, din prima jumătate — ceeace face asemenea ecuaţii mai uşor de recunoscut.

LT. C-DOR. GH. N.

PROBLEMA 4294. *Se dă triunghiul* ABC *şi se cere să se determine regiunea din planul său, în care se află punctul* M, *pentru care avem una din următoarele 4 neegalităţi:*

$$AB \pm AC \gtrless MB + MC.$$

COL. GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nii: S.-LT. C. AVRAM (Ecole d'Application du Génie, Versailles) şi V. A. GRIGORESCU (Lc. Militar, N. Filipescu).

Vom completa enunţul căutând a *afla punctele* M *pentru care avem una din următoarele 8 neegalităţi:*

$$AB \pm AC \gtrless MB \pm MC.$$

Se pot nota vârfurile triunghiului aşa ca $AB > AC$. Notăm cu $2a$ suma sau diferenţa laturilor AB, AC luăm ca axe de coordonate pe BC şi perpendiculara pe BC în mijlocul său şi notăm cu F, (x, y) valoarea sumei MB ± MC în funcţie de coordonatele lui M şi ale lui B, C.

Să examinăm acum fiecare neegalitate în parte.

1°. $AB + AC > MB + MC$. Se ştie că dacă

$$F(x, y) - 2a = 0 \tag{1}$$

punctul M descrie o elipsă care trece prin A şi are ca focare pe B şi C. Când M *se află în interiorul elipsei,* atunci

$$F(x, y) - 2a < 0 \quad \therefore \quad MB + MC < AB + AC.$$

2°. $AB + AC < MB + MC$. Punctul M *se găseşte ori unde în plan, exterior elipsei* (1).

3°. $AB + AC > MB - MC$. Se ştie, că ori care ar fi M, în triunghiul MBC avem

$$MB - MC < BC \tag{2}$$

iar din triunghiul ABC

$$BC < AB + AC. \tag{3}$$

Comparând (2), (3) cu 3°, rezultă că M *este ori unde în plan.*

4°. $AB + AC < MB - MC$. Ţinând seamă de (2) şi (3) dela 3°, rezultă că *neegalitatea 4° este imposibilă.*

5°. $AB - AC > MB + MC$. Din

$$BC < MB + MC \tag{4}$$

şi

$$AB - AC < BC \tag{5}$$

rezultă că *neegalitatea 5° este imposibilă.*

6°. $AB - AC < MB + MC$. Comparând (4) şi (5) cu 5° rezultă că M *se găseşte ori unde în planul lui* ABC.

7°. $AB - AC > MB - MC$. Ţinând seamă de notaţiile dela început, se ştie că dacă

$$MB - MC - 2a = F(x, y) - 2a = 0 \tag{6}$$

atunci M descrie o hiperbolă trecând prin A, având focarele în B, C şi axa focală egală cu $2a$. Când M *se află în regiunea exterioară focarelor* atunci

$$F(x, y) - 2a < 0$$

deci 7°.

8°. $AB - AC < MB - MC$. Ca la 7°, punctul M se găseşte ori unde în plan în regiunea focarelor hiperbolei (6).

Notă. 1) Au rezolvat bine problema, aşa cum a fost propusă, D-şoarele BUNGEŢEANU PREDUŢA şi MOSTECHY E. MARIA şi D-nii : IVĂNESCU C. (student) ; CEAUŞESCU V. (Lic. Militar Iaşi) ; CSEKE W., GEIER H. A. (studenţi Cluj) ; S.-LT. GHIUŢĂ GH., HORNSTEIN H. S., KLINGER D. O., MĂNESCU M., MAVRODIN D. (Lic. Mihai Eminescu, Bucureşti) ; MARGULIUS M. (student, Bucureşti) ; MAZILU P. (Şc. Politehnică, Bucureşti) ; MEHEDINŢI D. D., PREDA C. C., ŢARĂLUNGĂ GH. D. (Lic Militar, Tg. Mureş) ; ŞABAC I. (Lic. N. Filipescu) ; PROCOPIESCU M., SAGER N. I., ŞOVA C. I. şi STOICA D. AL.

2) D-l IVĂNESCU C. a examinat unde trebue să fie M pentru a avea neegalităţile

$$a)\ MB \times MC \gtrless AB \times AC \quad \text{sau} \quad b)\ \frac{MB}{MC} \gtrless \frac{AB}{AC}$$

şi a găsit că pentru *a)* locul lui M este *interiorul sau exteriorul unui oval al lui* CASSINI *care trece prin* A iar pentru *b)* M *se află respectiv în una din regiunile în care este împărţit planul triunghiului* ABC *de cercul ce trece prin* A *şi prin picioarele bisectoarelor unghiului* A.

3) Atât problema 4294 completată cât şi problemele dela 2), puse de D-l IVĂNESCU C., se rezolvă cu uşurinţă şi pe aceeaşi cale şi

4) Problema 4294 trebue pusă în legătură cu problema 789 pe care am propus-o în *Revista Matematică din Timişoara,* unde i s'a dat soluţia la pag. 71 Vol. IX. Ceream în problema 789, viciul unei demonstraţiuni în care se conchidea că

$$AB + AC < MA + MC$$

oriunde ar fi M în planul triunghiului ABC.

5) Soluţie parţială dela D-nii : M, Sc. NICHIFOR şi l. I. ŢIŢEICA (Lic. Militar, Mânăstirea Dealului).

GH. B.

PROBLEMA 4381. *Să se găsească cel mai mic patrat perfect astfel ca ultimele patru cifre dela dreapta să fie termenii unei progresii aritmetice.*

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-nii : VASILE F. CEAUŞESCU (elev plut.-major Lic. Milit. Iaşi) ; D. MAVRODIN (elev cl. VII Lic. M. Eminescu) ; P. C. MAZILU (elev-inginer) şi OCTAVIAN I. MIHALCEA (Buzău).

Din tabloul ultimelor patru cifre cu care se poate termina un patrat perfect («G. M.», XXXV, 134), deducem că soluţiunile problemei se vor termina cu :

3456 , 0369 ; 4321 ; 9876.

Servindu-ne acum de nota *„Asupra ultimului grup de* p *cifre ale unui patrat perfect"* al D-lui I. V. MATIEŞ («G. M.» XXXVII, No. 10) vedem că forma numerilor, al căror patrat se poate termina cu grupele de mai sus, poate să fie respectiv:

$$500 \cdot n \pm 116 \quad ; \quad 250n \pm 37$$

$$250 \cdot n \pm 111 \quad ; \quad 500n \pm 126.$$

Atunci cel mai mic patrat perfect se va obţine făcând $n = 0$, care însă nu ne dă soluţie decât pentru prima formă, adică:

$$116^2 = 13456.$$

Alte soluţii au fost trimise de D-nii: M. AMĂRĂŞTEANU şi M. I. VLAD.

EXERCIŢII

5. Suma cuburilor a şase numere consecutive este divizibilă prin suma acestor numere.

M. I. PREDOESCU.

R. Fie x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$, $x+5$ cele şase numere consecutive. Trebue să arătăm că:

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + (x+3)^3 + (x+4)^3 + (x+5)^3 = \mathfrak{M}\,(6x+15).$$

Se efectuează operaţiile indicate şi se observă că:

$$(6x^3 + 45x^2 + 125x + 225) : (6x + 15) = x^2 + 5x + 15$$

c. c. t. d.

Pentru $x = 0, 1, 2, 3, 4$ suntem în cazul particular al pr. 1225 din R. M. T.

6. Să se găsească numărul *abcdce*, patrat perfect, ştiind că

$$a = b = c^2 = 2c.$$

M. NĂSTASE.

R. Din enunţ rezultă imediat

$$c = 2 \quad \therefore \quad a = b = 4.$$

Numărul căutat este deci $442d\,2c$. Examinând ultimele 3 cifre ale terminaţiei unui patrat se găseşte soluţia

$$665^2 = 442225.$$

7. Se cer 5 numere întregi consecutive, ştiind că produsul lor este egal cu suma cuburilor lor mai puţin de 35 de ori numărul dela mijloc.

SUB.-LT. I. C. SAVIN.

R. Dacă x este numărul mijlociu, ecuaţia problemei este

$$(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2) = (x-2)^3+(x-1)^3+x^3+(x+1)^3+(x+2)^3-35x$$

$$\therefore\ x(x^4-10x^2+9) = 0$$

$$\therefore\ x_1 = -3\ ;\ x_2 = -1\ ;\ x_3 = 0\ ;\ x_4 = 1\ ;\ x_5 = 3.$$

8. Printre numerile de 3 cifre formate cu cifre în progresie aritmetică cari sunt acelea a căror rădăcină este un număr întreg?

PANAIT C. MAZILU.

R. Unghiurile de trei cifre, formate cu cifre în progresie aritmetică se divid totdeauna cu 3, rezultă deci că numerile căutate se vor divide cu 3 la o putere oarecare; sau că şi rădăcinile lor sunt multiple de 3. Numerile ale căror patrate au trei cifre sunt coprinse între 10 şi 32. Pentru a găsi patratele în condiţiile problemei vom ridica la patrat numerile 12, 15, 18, 21, 24, 27 şi 30.

Se găsesc soluţiile: $18^2 = 324$ şi $576 = 24^2$.

Pentru cuburi trebue să ridicăm la cub pe 6 şi 9; nu există soluţii.

Pentru bipatrate deasemenea nu se găsesc soluţii între cât 18 şi 24 nu sunt patrate.

Pentru puteri mai mari observăm că 6^5 are 4 cifre, deci trebueşte cercetat numai 3. Avem $3^5 = 243$.

Soluţiile problemei sunt deci $243 = 3^5$, $324 = 18^2$ şi $576 = 24^2$.

9. Pe cercul O se consideră un punct mobil M, prin care se duce o secantă MA de lungime dată, şi care în tot timpul mişcărei punctului M pe cerc face cu OM un unghiu dat α. Se cere locul geometric al extremităţii A.

MIKHAIL STĂNEŞTI.

R. Considerăm două poziţii OMA şi OM_1A_1. Triunghiurile OMA şi OMA_1 fiind egale deoarece $MA=M_1A_1$, $OM=OM_1$ şi $\sphericalangle OMA = \sphericalangle OM_1A_1=\alpha$ urmează că $OA = OA_1$; deci locul este un cerc concentric cu O de rază

$$r_1^2 = r^2 + \overline{MA}^2 - 2\,.\,r\,.\,MA\,.\cos\alpha.$$

10. Să se arate că

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n\,\frac{2^{2n-1}}{2^{2n}+1} = \frac{1}{3}\,.$$

FLORICA VOGT.

R. Luând derivata logaritmică, a cunoscutei identităţi:

$$\frac{1}{1-x} = (1+1)(1+x^2)(1+x^4)\ldots$$

avem:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \ldots$$

unde făcând pe $x = -2$ tocmai relaţia din enunţ.

11. Fie $Q\alpha$, $Q\beta$, $Q\gamma$ picioarele cevienelor perpendiculare pe dreapta lui EULER a triunghiului ABC. Să se arate că:

$$\frac{1}{AQ_\alpha} + \frac{1}{BQ_\beta} + \frac{1}{CQ_\gamma} = 0.$$

N. N. MIHĂILEANU.

R. Se ţine seama de relaţia:

$$AQ_\alpha = \frac{QR \sin B \sin C}{\sin(B-C)}(1 - 8\cos A \cos B \cos C) = \frac{2R(1 - 8\cos A \cos B \cos C)}{\operatorname{cotg} C - \operatorname{cotg} B}$$

şi analoagele ei.

12. Să se stabilească relaţia:

$$\frac{r_a r_b r_c}{(r_a+r_b)(r_b+r_c)(r_c+r_a)} = \frac{r}{4R}.$$

M. AMĂRĂŞTEANU.

R. Ţinând seama că $s = r_a(p-a) = \text{etc.}\ldots$ avem succesiv că

$$(1)\quad r_a r_b r_c = \frac{s^3}{(p-a)(p\ \ b)(p-c)} = p^2 r \text{ iar } r_a + r_b = \frac{s_c}{(p-a)(p-b)};\ \text{etc.}\ldots$$

deci

$$(r_a+r_b)(r_b+r_c)(r_c+r_a) = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot s^3}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}$$

$$= \frac{abc \cdot p \cdot s}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abcs}{r^2} = \frac{abcp}{r}$$

şi ţinând sema de (1) găsim că:

$$\frac{r_a r_b r_c}{(r_a+r_b)(r_b+r_c)(r_c+r_a)} = \frac{pr^2}{abc} = \frac{pr^2}{4Rs} = \frac{r}{4R}\quad \text{c. c. t. d.}$$

13. Să se arate că funcţiunea:

$$y = \frac{u}{v}$$

nu poate fi discontinuă, iar curba reprezentativă a funcţiunei inverse nu taie axa x-lor, dacă:

$$u = x^5 + 2x^6 - 2x^3 - 1 \quad \text{şi} \quad v = x^6 + x^4 - x^2 - 1.$$

MIHAIL CHIRIŢĂ.

R. Observ că:

$$u = (x^4 + 1)(x^4 - 1) + 2x^2(x^4 - 1) = (x^4 - 1)(x^4 + 2x^2 + 1) = x^4 - 1)(x^2 + 1$$

şi că

$$v = x^2(x^4 - 1) + (x^4 - 1) = (x^4 - 1)(x^2 + 1)$$

deci

$$y = \frac{u}{v} = x^2 + 1.$$

Funcţiunea neavând numitor care să se anuleze, funcţiunea nu poate fi discontinuă.

Inversa funcţiunei y se scrie:

$$z = \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

numărătorul nu se poate anula, deci curba nu taie axa x-lor.

PROBLEME PROPUSE

4427. Cu începere dela numărul 3 din Noemvrie 1921, *Gazeta Matematică,* Vol. XXVII, propune în mod regulat câte 10 probleme în fiecare număr. Prima problemă propusă în numărul citat avea numărul 3601. Presupunând că sistemul de a se propune câte 10 probleme în fiecare număr s'ar fi perpetuat se cere:

1°. Să se găsească volumele în care prima problemă propusă în numărul 1 ar avea numărul 100 N + 1 şi volumele în care prima problemă din Numărul 1 ar fi avut numărul 1000 N + 1.

2°. In ce volum şi în ce număr s'ar fi propus în aceste condiţiuni problema cu numărul 1.000.001?

In numărul 11 din Iulie 1934, volumul XXXIX, în care prima problemă propusă are numărul 4391, s'au propus 12 probleme. Să se răspundă la aceleaşi întrebări presupunând că se va perpetua noul sistem de a propune câte 12 probleme în fiecare număr.

COL. GH. BUICLIU.

4428. Dacă înlocuim cifrele cu litere, cuvântul **patrat** poate reprezenta un patrat?

I. IONESCU.

4429. Să se găsească numerele de două cifre care înmulțite cu diferența cifrelor să ne dea diferența cuburilor cifrelor lor.

V. THÉBAULT.

4430. Să se calculeze limita expresiei:

$$E = \sqrt[3]{6^4 + 7\sqrt[3]{6^{10} + 7\sqrt[3]{6^{28} + 7\sqrt[3]{6^{82} + \ldots + 7\sqrt[3]{6^{3n+1}}}}}}$$

când $n = \infty$.

N. BOTEA.

4431. Să se găsească cuburile de forma ABBA, A și B fiind două numere de câte m cifre. Cazuri particulare $m = 1, 2, 3$.

M. GHERMĂNESCU.

4432. Fie M, N punctele în care dreapta Δ, paralelă cu BC, taie cercul circumscris triunghiului ABC.

Să se afle locul geometric al intersecției dreptelor lui SIMSON ale punctelor M, N luate în raport cu triunghiul ABC, când Δ se deplasează.

C. IONESCU-BUJOR.

4433. Să se demonstreze că în orice triunghiu avem relația

$$\frac{R^2 - l_a^2}{h_a^2} + \frac{R^2 - l_b^2}{h_b^2} + \frac{R^2 - l_c^2}{h_c^2} = 1,$$

l_a, l_b, l_c fiind distanțele dela centrul cercului circumscris triunghiului la picioarele înălțimilor, h_a, h_b, h_c înălțimile, iar R raza cercului circumscris.

ȘT. OLTEANU.

4434. Să se stabilească identitatea:

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)} + \frac{bc}{(c+a)(a+b)} + \frac{ca}{(a+b)(b+c)} = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr}.$$

CEZAR IVĂNESCU.

4435. Există triunghiuri între laturile căruia să avem relaţia

$$5\,(a^2 + b^2 + c^2) = 6\,(ab + bc + ca)\,?$$

GH. TH. GHEORGHIU.

4436. Să se arate că dacă în triunghiul ABC medianele BB' şi CC' sunt perpendiculare între ele, aria triunghiului este dată de formula :

$$S = a^2 \operatorname{tg} A.$$

Dintre toate triunghiurile ce se bucură de proprietatea de mai sus şi au aceeaşi bază BC să se determine acelea pentru care unghiul A este maxim.

N. C.

4437. Să se găsească curba la care tangenta dusă într'un punct oarecare tae pe axa x-lor patratul porţiunei de pe axa y-lor.

GH. VASILIU.

4438. Se dă un cerc O pe care se consideră un punct fix A şi unul mobil M şi fie Δ o dreaptă care taie cercul O.

Fie D perpendiculara din M pe simetrica dreptei AM faţă de dreapta Δ.

Dacă din M spre Δ se ia o distanţă, în acelaş sens, egală cu diametrul cercului O, se obţine un punct N, care descrie o *hipocicloidă cu trei rebrusmente*.

Generalizare.

LOCOT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

ERATĂ. 1°. In formula din rândul 3 de sus, pag. 276, Vol. XXXIX, termenii în x^2 şi x se vor înlocui prin

$$\ldots + (n^2 + n - 3)x^2 + (n^2 + 3n - 1)\,x.$$

2°. La pag. 430, Vol. XXXIX, se va înlocui, în primele 2 formule ale soluţiei exerciţiului 20, CC_h şi BB_h prin AC_h şi AB_h .

3°. La pag. 448, Vol. XXXIX, în nota 61 se va înlocui curba (k) prin curba (μ).

4°. La pag. 517 şi 519, Vol. XXXIX, în soluţia problemei 4216, se va înlocui complimentar prin anticomplimentar.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu T. M. (4388, E); *Andreian I.* (A); *Arşavschi A.* (4000, 310, 29, 49); *Avram N. Const. Subloc.* (4407); *Bălăceanu G.* (4385); *Boiangiu I. Gh.* (4196); *Bungeţeanu D. Preduţa* (4345, 54); *Cârstoiu D. I.* (4000); *Ceauşescu Vasile* (4075, 84, 96, 134, 62, 215, 28, 345, 54, 85, 86, 88); *Coandă I. V.* (4343, 61); *Cseke W.* (4369, 85, 86, 88, 410); *Dobrescu A.* (4397, N); *Dobrescu D. P.* (4343, 54); *Gheorghiu C. A.* (3976); *Hornstein H. S.* (4379, 88); *Ivanciu A.* (4343); *Lebădă D.* (4267, 343, 61); *Mănac M.* (4239, 379); *Margulis Gr.* (4334, E, P); *Marin N.* (4392, 413); *Mavrodin D. D.* (4388); *Mazilu C. P.* (4388, 410, E); *Negoiţă C.* (4228, 317, 67); *Negrea A. M. L.* (3636, 4354); *Nichifor S. M.* (4298, 334, 45); *Niţescu C. Gh.* (4345); *Olteanu C. Şt.* (4000); *Petrescu I. I.* (4084, 96); *Postelnicescu C. M.* (4397, 413, R); *Predoescu I. M.* (4379, 418, 22, 24); *Şabac Gh. I.* (4379); *Silaş G.* (4266, 76, 96, 99, 328, 92, 97); *Stoicescu T.* (4338, 45); *Thébault V.* (A, P); *Ţiţeica I. I.* (4173, 334, 92); *Visarion C. I. V.* (4386).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XL

NUMĂRUL 3. — NOEMVRIE 1934

SUMARUL

1. Cărţi vechi de matematică (urmare) . . . *I. Ionescu*
2. Sur le cercle de Taylor . . . . . *V. Thébault*
3. Patrate berce . . . . . *Col. Gh. Buicliu*
4. Rezistenţa aerului asupra unui mobil care se deplasează cu viteze foarte mari . . . . *Maior I. Linteş*
5. Premiul „Vasile Conta".
6. Note matematice: 13 — 17.
7. Chestiuni de examen.
8. Bibliografie.
9. Cereri: 241.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 2481, 3282, 3390, 4178, 4243, 4328, 4372.
12. Exerciţii: 14.
13. Probleme propuse: 4045, 4439 — 4450.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1934

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 27, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 30, 36, 40, 49, 52, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 65, 66, 68, 70, 76, 80, 84, 89, 90, 91, 93, 95, 96, 98, 99, 400, 01, 02, 04, 05, 06, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

CĂRȚI VECHI DE MATEMATICĂ

(Urmare dela pagina 52)

Trec acum la partea a doua, al cărui titlu este:

Des | Europäischen | **Ingenierurs** *| Andere | Haupt-Abtheilung | Bestehend in einer | Völligen* **Geometrie,** *| So wohl mit Circul und Lineal | auf Papier | als auf dem Felde | mit allerhand Instrumenten".*

Cartea are capitolele următoare.

Cap. I. *Despre tot felul de figuri în care intră numai linii și unghiuri. „Ce e un punct, o linie, sau trăsătură, o suprafață, un corp, le știu și copii".* Matematicii însă își frământă capul, iar învățații și-l sparg cu definițiuni, pentru ca la urmă să nu-și ajungă scopul. Punctul e ceva care nu are nici lungime, nici lățime, nici părți; linia o lungime fără lățime, etc. Paralele sunt liniile sau suprafețele egal depărtate pretutindeni; se rezolvă câteva probleme. Vorbește apoi de linii care se taie și care se ating, unghiuri, unghiul drept, perpendiculare și probleme asupra acestora.

Cap. II. *Despre planigrafie sau trasarea figurilor.* Se arată cum se duce un cerc prin trei puncte, se vorbește de *figuri regulate* și *neregulate,* de *cerc, elipsă* și *oval,* apoi de triunghiuri care pot fi *aequilaterum, aequicrurum* (isoscel), *scalenum;* apoi *rectangulum, obliquangulum* care poate fi *acutangulum* și *obtusangulum.* La un triunghiu dreptunghic o latură e *basis,* alta *cathetus* și cea mare *hypothenusa.* Figurile cu patru laturi: *quadrangula* pot fi *rectangula;* vorbește de *quadrata, rhombum, parallelogramma* sau *quadrata oblonga,* ori *rhomboidis, trapezium* și arată cum se construiesc.

Cap. III. *Despre împărțirea liniilor și anume a celor drepte.* Aci dă diferite metode și arată cum se fac scările topografice. In această privință citează pe TYCHO BRAHE, care s'a ocupat cu construcția scărilor. Incheie capitolul cu: *„Destul cu împărțirea liniilor".*

Cap. IV. *Impărțirea liniilor circulare, sau (ceeace rezultă de aci) despre trasarea figurilor poligonale sau multilatere.* Imparte cercul în 6, 3, 12, 24, . . . ; 5, 10, 20, . . . ; 4, 8, 16, . . . părți; îl împarte în 7 părți luând latura eptagonului cât jumătatea laturii triunghiului echilateral înscris. Expune și unele mijloace uni-

versale pentru împărţirea cercului, dar adaogă: *„demonstraţiile* nu-mi sunt cunoscute; cred însă că atât timp cât nu se va ajunge *la* **quadraturam circuli,** *până atunci o cale universală şi neeronată, demonstrată, care să împartă egal cercul sau părţi din el"*, nu e posibilă ceeace a fost confirmat prin progresul ulterior al matematicilor. E mai bine cum fac ceasornicarii, prin încercări.

Cap. V. *Trasarea figurilor poligonale sau cu mai multe vârfuri cunoscând laturile.* Aci arată cum se construiesc poligoanele regulate de latură dată. La pentagon dă şi construcţia pictorului ALBRECT DÜRER care face obiectul problemei propuse din acest număr.

Cap. VI. *Proporţionarea liniilor între ele.* Aci tratează *media & extrema ratione, mediam proportionalem,* problema a două medii proporţionale între lungimi date, a treia şi a patra proporţională.

Cap. VII. *Demonstraţiuni pregătitoare necesare planimetriei.* Aci se dau teoreme pentru măsurarea ariilor, echivalenţa lor şi încheie cu teorema lui PITAGORA căreia îi zice *Magistri Matheseos.*

Cap. VIII. *Transformarea figurilor unele în altele şi mai întâiu cele rectilinii.* Aci se caută paralelograme şi triunghiuri echivalente cu altele, supuse unor anumite condiţiuni.

Cap. IX. *Transformarea figurilor circulare în altele: şi în figuri rectilinii şi invers.* Aci dă mijloace de rectificare aproximativă a cercului printre care şi a lui AUGUSTINI HIRSCHVOGEL reprodusă de SCHVENDT şi care utilizează numai compasul. In privinţa raportului dintre cerc şi diametru (π) spune că Biblia în Cartea I a Regilor cap. 7 vers. 23 spune că bazinul lui SOLOMON avea dela o margine la alta 10 coţi lăţime şi periferia de 30 coţi, şi spune că asta nu e just căci are în plus mai mult de un cot. Ca să nu nemulţumească pe eclesiaşti spune că St. Scriptură a dat numai *Numeri rotundi,* dar că matematicianii prin înscrierea de poligoane regulate au găsit valoarea mai exactă. Menţionează pe ARCHIMEDE care a mers până la poligonul de 96 laturi şi a găsit 3 (1/7), pe GRÜNBERGER, pe METIUS cu valoarea 355/113, pe SNELLIUS, şi LUDOLPHUS VON CEULEN căruia îi reproduce valoarea calculată cu 34 zecimale. Dă mijloace aproximative de găsit latura patratului echivalent cu cercul.

Cap. X. *Despre Planimetrie, adică calculul conţinutului figurilor plane după măsuri date.* Aci tratează chestiuni de *Agrimen-*

suriam şi de *Geodesiam;* şi arată cum se calculează ariile figurilor plane rectilinii sau curbe.

Cap. XI. *Despre denumirea şi diferenţele între corpurile solide.* Aci se ocupă de *Solidomensuram, Solidometrieam, Epipedometriam* sau *Epipodometriam,* sau *Stereometriam.* In acestea intră studiul corpurilor cu care se ocupă azi geometria în spaţiu, cu *Angulus solidus,* cu poliedrele regulate, etc.

Cap. XII. *Despre Stereometrie sau măsurarea conţinutului lucrurilor solide.* Aici se ocupă cu determinarea volumelor şi calculul unor elemente ale corpurilor solide.

Cap. XIII. *Despre stereometria specială, adică cum se pot desface unul sau mai multe corpuri în altele mai uzuale sau aşa zise în general cotitul, ca şi despre mire, scări.* Aci e vorba de măsura volumelor corpurilor neregulate: a fânului, grânelor în grămezi, lemnelor, vaselor navigabile, buţi, tocitori, etc.

Cap. XIV. *Transformarea corpurilor unele în altele.* Aici sunt chestiuni care au dispărut din geometriile moderne, ca transformarea unui paralelipiped în cub, a unui cilindru în sferă, etc.

Cap. XV. *Despre adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea tutulor corpurilor.* Aci arată cum se adună patrate, cuburi, cum se sporeşte de un număr oarecare de ori suprafaţa unei figuri, şi în fine probleme de parcelări şi de împărţirea solidelor în părţi.

Cap. XVI. *Despre trigonometrie sau calculul triunghiurilor.* Aci se studiază egalitatea şi asemănarea triunghiurilor, defineşte *sinusul, tangenta* şi *secanta* ca şi azi, consideră şi unghiurile complimentare, arată cum se rezolvă triunghiuri dreptunghice şi oarecare, prin reguli, iar nu prin formule.

Cap. XVII. *Despre pregătirea Tabularuum Sinuum, Tangentium, secantium şi ai lor logarithmorum: asemenea pentru diferenţe şi proprietăţile unor asemenea tabele precum şi modul lor de întrebuinţare.* Aci arată cum se calculează tabelele, că această operaţiune cere inteligenţă, muncă, răbdare, oboseală. Vorbeşte de tablele lui VAN SCOOTEN, ale lui VLACQ, şi arată cum se caută în table.

Cap. XVIII. *Rezolvarea triunghiurilor rectilinii.* Aci sunt numeroase exemple numerice de calcule pentru diferite cazuri ce se ivesc în practică.

După aceasta se trece la operaţiunile pe teren şi se începe o nouă numerotare a capitolelor.

Cap. I. *Despre topografie în genere şi despre măsurări.* Operatorul e un *Geometra.* Aci arată importanţa ridicării planurilor şi măsurile vechi şi cele contimporane întrebuiuţate la măsurarea câmpurilor.

Cap. II. *Cum se procedează la măsurarea diferitelor linii şi unghiuri pe pământ şi sub pământ. Asemenea pentru poligoane. Raportarea de pe teren pe hârtie şi aplicarea de pe hârtie pe câmp în porţiuni, sau pe opere de artă.* Titlul explică destul conţinutul capitolului.

Cap. III. *Despre măsurarea tutulor liniilor, distanţelor, înălţimilor şi adâncimilor inaccesibile.* Se arată cum se rezolvă asemenea probleme cu planşeta, prin calcul şi trigonometriceşte.

Cap. IV. *Despre diferitele instrumente şi anume mai întâiu cele referitoare trasării liniilor pe hârtie şi pe teren.* Odată cu descrierea acestor instrumente se arată din ce materiale sunt făcute, cum trebue păstrate şi verificate.

Cap. V. *Instrumente cu care se măsoară şi se raportează unghiurile.* Aci vorbeşte de cercuri, verniere, astrolabe, compasul, partometre, transportoare, cuadrante, sextante, octante, busolă, raportorul, planşeta, aparate ce dau direct sinusuri, tangente sau secante, etc. Sunt aparate *Hermaphroditica,* care servă şi pe câmp şi în biurou, ca de exemplu compasul de proporţiune. Vorbeşte şi de unele instrumente astronomice.

Partea geometrică se termină cu *„un mic apendice la geometria lămurită până aci“.* Se vorbeşte aci de linii spirale sau melci, volute pentru coloane, ovale, elipsă, iperbolă, parabolă, mărirea sau reducerea figurilor.

Partea III relativă la fortificaţii are aplicaţii ale matematicilor, dar descrierea lor nu-şi are locul aci.

Cu aceasta încheiu recensiunea sumară pe care am făcut-o cărţii *„Inginerul European“* scoasă acum 247 ani. Se vede că atunci se cerea inginerului cunoştinţe solide de matematică; se cerea ca ei să ştie să extragă rădăcina cubică, ceeace azi nu se mai cere candidaţilor la Şcoalele noastre politehnice! Şi aceasta pentrucă nu se mai face în liceu! Formule practice în care se găsesc extrageri de rădăcini cubice sunt azi mai multe ca atunci. Se poate răspunde că pe atunci inginerul european nu ştia calcul infinitezimal şi mecanică raţională. E adevărat; dar pe atunci inginerul nu construia poduri

de peste un kilometru depărtare între două picioare consecutive şi peste braţe de mare; nu construia locomotive care să meargă cu peste 100 km/oră şi să gonească peste 600 de km fără oprire; nu construia aeroplane cu care omul să sboare peste oceane şi continente întregi. Acum 250 ani se cerea *„inginerului european"* să cunoască toată matematica timpului, tot aşa şi azi el trebue să cunoască matematica actuală pentru a se folosi de dânsa la rezolvarea noilor şi marilor probleme ale tecnicei moderne.

I. IONESCU.

SUR LE CERCLE DE TAYLOR

1. Notations. Considérons un triangle ABC, ($BC = a$, $CA = b$, $AB = c$); H l'orthocentre; (O) le cercle circonscrit de rayon R; (O_9) le cercle des neuf points; (I), (I_a), (I_b), (I_c) les cercles tritangents de rayons r, r_a, r_b, r_c; (O_1) le cercle circonscrit au triangle I_a, I_b, I_c, 2R son rayon.

2. En apliquant le théorème de la médiane au triangle OIH, on obtient

$$(1)\quad \overline{IH}^2 = 2\,\overline{O_9I}^2 + \tfrac{1}{2}\,\overline{OH}^2 - \overline{OI}^2 = 4R^2 + 2r^2 - \tfrac{1}{2}\,|\,a^2 + b^2 + c^2\,|\,,$$

et, par analogie,

$$(2)\quad \overline{I_aH}^2 = 4R^2 + 2r_a^2 - \tfrac{1}{2}\,\Sigma a^2,\quad \overline{I_bH}^2 = 4R^2 + 2r_b^2 - \tfrac{1}{2}\,\Sigma a^2,$$

$$\overline{I_cH}^2 = 4R^2 + 2r_c^2 - \tfrac{1}{2}\,\Sigma a^2.$$

Ces relations conduisent aux suivantes:

$$(3)\quad \overline{IH}^2 - 2r^2 = 4R^2 - \tfrac{1}{2}\,\Sigma a^2 = \overline{I_aH}^2 - 2r_a^2 = \overline{I_bH}^2 - 2r_b^2 = \overline{I_cH}^2 - 2r_c^2,$$

ou encore

$$(4)\quad \overline{I_bH}^2 - \overline{I_cH}^2 = 2\,|\,r_b^2 - r_c^2\,|\,,\quad \overline{I_aH}^2 - \overline{I_cH}^2 = 2\,|\,r_c^2 - r_a^2\,|\,,$$

$$\overline{I_aH}^2 - \overline{I_bH}^2 = 2\,|\,r_a^2 - r_b^2\,|\,.$$

N. B. Observant que

$$4R^2 - \tfrac{1}{2} \mid a^2 + b^2 + c^2 \mid = \tfrac{1}{2} \mid \overline{OH}^2 - R^2 \mid ,$$

on a ce théorème connu.

Le cercle conjugué à un triangle est orthogonal aux cercles orthoptiques de ses cercles tritangents.

3. Les cercles (Ω), (Ω_a), (Ω_b), (Ω_c) de TAYLOR, de rayons ρ, ρ_a, ρ_b . ρ_c, relatifs aux triangles $I_a I_b I_c$, $I I_b I_c$, $I I_c I_a$, $I I_a I_b$ sont orthogonaux aux triples de cercles (I_a), (I_b), (I_c); (I), (I_b), (I_c); (I), (I_a), (I_b).

Ils contienent les projections orthogonales des points A, B, C sur les côtes des triangles $I_a I_b I_c$, $I I_b I_c$, . . .

Cette definition des cercles de TAYLOR permet d'écrire, par exemple, que

$$(5) \qquad \overline{\Omega I_b}^2 - \overline{\Omega I_c}^2 = \mid r_b^2 - r_c^2 \mid , \quad \overline{\Omega I_c}^2 - \overline{\Omega I_a}^2 = \mid r_c^2 - r_a^2 \mid ,$$

$$\overline{\Omega I_a}^2 - \overline{\Omega I_b}^2 = \mid r_a^2 - r_b^2 \mid ,$$

et des égalités analogues pour les cercles (Ω_a), (Ω_b), (Ω_c).

4. Nous avons montré que *le lieu des centres des cercles* (ω) *orthogonaux à des cercles*

$$(I_a , r_a\sqrt{k})^{1}), \ (I_b , r_b\sqrt{k}), \ (I_c , r_c\sqrt{k}),$$

est une droite menée perpendiculairement du centre O_1 *du cercle circonscrit au triangle* $I_a I_b I_c$ *sur la droite* Δ *de coordonnées barycentriques* r_a^2, r_b^2, r_c^2, *par rapport à ce triangle.*

De plus, à deux valeurs k_1, k_2 de k correspondent des cercles de centre ω_1, ω_2 tels que

$$(6) \qquad O_1\omega_1 : O_1\omega_2 = k_1 : k_2 \ ^{2}).$$

Par suite, comme les relations (4) et (5) sont de même forme, *les points* O_1, Ω, H *sont collinéaires et situés sur une perpendiculaire à la droite* Δ. Enfin, en vertu de (6),

$$O_1\Omega : O_1H = 1 : 2,$$

et on retrouve cette propriété connue:

---

1) On designe (O, R) un cercle de centre O et de rayon R.

2) *Mathesis,* Supplément, octobre 1932.

Le centre du cercle de TAYLOR *d'un triangle est situé au milieu du segment rectiligne qui joint le centre du cercle circonscrit à ce triangle à l'orthocentre de son triangle orthique.*

5. Remarquons aussi que le point O_1 est symétrique du point I par rapport à O. Les segments rectilignes IH et ΩO se correspondent dans une homothétie $(O_1, -2)$ et *le point* Ω *est le centre de l'un des cercles tritangents au triangle médian* $A_1B_1C_1$ *du triangle fondamental. Les points* Ω_a, Ω_b, Ω_c *sont les centres des autres cercles tritangents.* D'ailleurs, les droites B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 coupent les côtés I_aI_b et I_aI_c, I_bI_a et I_bI_c, I_cI_a et I_cI_b en des points X et Y, Z et T, U et V qui sont les projections orthogonales des points A, B, C sur les mêmes côtés et X, Y, Z, T, U, V sont situés sur le cercle (Ω). Les triangles B_1XC et C_1YB, par exemple, sont isoscèles, et

$$(7) \qquad XY = \tfrac{1}{2} \mid a+b+c \mid = p = ZT = UV.$$

On déduit de là une expression simple du carré du rayon du cercle (Ω) de TAYLOR,

$$\rho^2 = \tfrac{1}{4} \mid p^2 + r^2 \mid \text{ [1]},$$

et, par analogie,

$$(8) \quad \rho_a^2 = \tfrac{1}{4} \mid (p-a)^2 + r_a^2 \mid , \quad \rho_b^2 = \tfrac{1}{4} \mid (p-b)^2 + r_b^2 \mid ,$$

$$\rho_c^2 = \tfrac{1}{4} \mid (p+c)^2 + r_c^2 \mid .$$

Ces relations conduisent aux suivantes :

$$(9) \qquad \rho^2 + \rho_a^2 + \rho_b^2 + \rho_c^2 = \mid 2R \mid ^2 = 4R^2,$$

$$(10) \quad \begin{cases} \rho^2 = 4R^2 \mid \cos^2\tfrac{1}{2}A \cos^2\tfrac{1}{2}B \cos^2\tfrac{1}{2}C + \sin^2\tfrac{1}{2}A \sin^2\tfrac{1}{2}B \sin^2\tfrac{1}{2}C \mid \\ \rho_a^2 = 4R^2 \mid \cos^2\tfrac{1}{2}A \sin^2\tfrac{1}{2}B \sin^2\tfrac{1}{2}C + \sin^2\tfrac{1}{2}A \cos^2\tfrac{1}{2}B \cos^2\tfrac{1}{2}C \mid \\ \rho_b^2 = 4R^2 \mid \sin^2\tfrac{1}{2}A \cos^2\tfrac{1}{2}B \sin^2\tfrac{1}{2}C + \cos^2\tfrac{1}{2}A \sin^2\tfrac{1}{2}B \cos^2\tfrac{1}{2}C \mid \\ \rho_c^2 = 4R^2 \mid \sin^2\tfrac{1}{2}A \sin^2\tfrac{1}{2}B \cos^2\tfrac{1}{2}C + \cos^2\tfrac{1}{2}A \cos^2\tfrac{1}{2}B \sin^2\tfrac{1}{2}C \mid . \end{cases}$$

Enfin les égalités (8) et

$$\rho^2 = I_a\Omega^2 - r_a^2 = I_b\Omega^2 - r_b^2 = I_c\Omega^2 - r_c^2, \ldots,$$

donnent celle-ci :

$$(11) \quad I_a\Omega^2 + I\Omega_a^2 + I\Omega_b^2 + I\Omega_c^2 = 2OR^2 - (a^2+b^2+c^2).$$

---

1) CASEY, *Mathesis*, 1889 — 23. V. THÉBAULT, *Nouvelles annales* 1916.

6. Appliquant le théorème de la médiane au triangle $I_a O_1 H$, par exemple, on trouve

$$\tfrac{1}{2} O_1 \overline{H}^2 = I_a \overline{O_1}^2 + I_a \overline{H}^2 - 2 I_a \Omega$$
$$= 8R^2 - \tfrac{1}{2} \mid a^2 + b^2 + c^2 \mid - \tfrac{1}{2} \mid p^2 + r^2 \mid ,$$

d'où, en observant que

$$a^2 + b^2 + c^2 + r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 16R^2,$$

$$O_1 \overline{H}^2 = r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 - p^2. \tag{12}$$

Cette relation, qui peut d'ailleurs être obtenue en appliquant la suivante,

$$O_1 \overline{H}^2 = p\,(\cot^2 \theta_1 - 3),$$

que nous avons déjà obtenue [1]), donne l'expression de l'angle de BROCARD θ_1 du triangle $I_a I_b I_c$ en fonction des éléments du triangle ABC,

$$\cot \theta_1 = r\,(r_a + r_b + r_c \mid : S = r \mid 4R + r \mid : S. \tag{13}$$

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

PATRATE BERCE

I. Pe lângă numeroasele probleme, asupra patratelor perfecte, care se propun şi se rezolvă în fie-care număr aproape, *Gazeta Matematică* a studiat în o serie de articole câteva clase de patrate perfecte cu caracteristici interesante dând câte un nume special patratelor din fiecare clasă. Astfel am avut până acum:

Patratele gemene, studiate de D-l I. IONESCU în articolele de la paginele 203, 241, 441 şi 447 Vol. XX. Patratele gemene sunt acelea care au toate cifrele identice şi identic aşezate, afară de prima dela stânga, cum sunt de exemplu:

$25^2 = 625$	$925^2 = 855625$	$2875^2 = 8265625$
$15^2 = 225$	$675^2 = 455625$	$1125^2 = 1265625.$

Patratele decapitate sunt pătratele care rămân tot pătrate dacă li se suprimă cifra dela stânga.

1) *Mathesis,* 1934 — 88.

De exemplu pătratele:

$$1825^2 = 3330625 \quad | \quad 3125^2 = 9765625$$
$$575^2 = 330625 \quad | \quad 875^2 = 765625.$$

Acest fel de pătrate au fost studiate de D-l E. ȘTEFĂNESCU în articolele publicate la paginele 205, 245 și 365 Vol. XXX al *Gazetei Matematice.*

Patratele pseudogemene, au fost studiate în articolul meu cu același titlu, publicat în *Gazeta Matematică* Vol. XXXI pag. 401. Se numesc patrate pseudogemene două patrate care au toate cifrele identice și scrise în aceiași ordine, afară de o cifră oarecare de rangul n dela stânga. De exemplu:

$$251^2 = 63001 \quad | \quad 125012^2 = 15628000144$$
$$249^2 = 62001 \quad | \quad 124988^2 = 15622000144$$

II. In cele ce urmează, voi stabili o nouă clasă de pătrate perfecte pe care le voi numi *patrate berce* și care se caracterizează prin aceea că rămân tot pătrate dacă li se suprimă ultima cifră de la dreapta, cum sunt patratele:

$$1442^2 = 2079364 \ , \ 456^2 = 207936.$$

Partea care se suprimă se numește *coada* iar patratul care rămâne se numește *corpul* patratului berc.

Dacă a este cifra cu care se termină un patrat oarecare x^2, problema găsirei *patratelor berce* revine la a rezolva în numere întregi ecuațiunea

$$(1) \qquad x^2 = 10y^2 + a$$

în care a este dat.

Rezolvarea ecuațiunilor ca (1), de forma generală

$$x^2 - Ay^2 = B$$

este cunoscută. Ea se găsește în Vol. I din opera completă a lui EULER și în Vol. VII din *Ouvres* de LAGRANGE. O aplicație numerică a acelor studii a făcut D-l Prof. P. SERGESCU în *Gazeta Matematică* Vol. XXVIII pag. 351 cu ocazia rezolvărei problemelor 2705 și 2903, propuse de D-sa.

Astfel de aplicaţiuni s'au dat şi în *Revista Matematică din Timişoara* unde s'a rezolvat în Vol. VIII, pag. 28, ecuaţiunea

$$2x^2 - 3y^2 = 5\ ^{1})$$

propusă de D-l GH. CONSTANTINESCU şi în Vol. XIV, pag. 18, ecuaţiunea

$$4 + 81x^2 = 10y^2$$

propusă de mine.

După aceste trimiteri, revin la ecuaţiunea (1) dând lui a pe rând valorile cifrei cu care se poate termina un patrat perfect.

1°. $a = 1$. Ecuaţia (1) devine

$$x^2 - 10y^2 = 1$$

care admite soluţia particulară

$$x_1 = 19\ ,\ y_1 = 6$$

uşor de găsit. Vom avea :

$$(x + y\sqrt{10})\ (x - y\sqrt{10}) = (19 + 6\sqrt{10})^n\ (19 - 6\sqrt{10}) = 1$$

de unde rezultă sistemul

$$x + y\sqrt{10} = (19 + 6\sqrt{10})^n$$
$$x - y\sqrt{10} = (19 - 6\sqrt{10})^n$$

pe care rezolvindu-l găsim sistemul de soluţiuni

$$x = \frac{(19 + 6\sqrt{10})^n + (19 - 6\sqrt{10})^n}{2}$$

$$y = \frac{(19 + 6\sqrt{10})^n - (19 - 6\sqrt{10})^n}{2\sqrt{10}}$$

x^2 fiind patratul berc şi y^2 corpul său. In particular făcând pe n egal cu 1, 2, 3 găsim :

$19^2 = 361^2$	$721^2 = 519841$	$27379^2 = 749609641$
$6^2 = 36$	$228^2 = 51984$	$8658^2 = 74960964.$

1) Atrag atenţiunea corespondenţilor care vor urmări această chestiune, că problema D-lui GH. CONSTANTINESCU nu este complet rezolvată în „Revista Matematică" din Timişoara. S'a omis un şir de soluţiuni.

GH. B.

Sunt o infinitate de patrate berce având coada egală cu 1.

2^0. $a = 4$. Avem:

$$x^2 - 10y^2 = 4$$

care necesită

$$x = 2z \quad , \quad y = 2u$$

deci

$$z^2 - 10u^2 = 1$$

ceeace arată că în cazul 2^0 pentru x şi y se iau dublul valorilor găsite la 1^0. Pentru $n = 1, 2, \ldots$;

$$38^2 = 1444 \quad | \quad 1442^2 = 2079364$$
$$12^2 = 144 \quad | \quad 456^2 = 207936$$

3^0. $a = 5$. Avem:

$$x^2 = 10y^2 + 5$$

care este imposibilă în numere întregi pentru că x^2 se termină în ..25 ceeace ar necesita ca y^2 să se termine cu 2, ceeace nu se poate.

4^0. $a = 6$ dă:

$$x^2 - 10y^2 = 6$$

$$\therefore \qquad x = 2z$$

$$\therefore \qquad 2z^2 - 5y^2 = 3. \qquad (2)$$

Punem:

$$z = py = u$$

şi (2) devine

$$(2p^2 - 5)\, y^2 - 12pyu + 18u^2 = 3 \qquad (3)$$

care pentru a fi posibilă în numere întregi trebue ca $2p^2 - 5$ să se dividă prin 3.

Este de observat că dacă există o valoare p_1 pentru care $2p^2 - 5$ se divide prin 3 atunci trebue luată şi valoarea $-p_1$ ceeace dă pentru z două sisteme de valori

$$z_1 = p_1 y - 3u \quad \text{şi} \quad z_2 = -p_1 y - 3u.$$

In cazul particular de care ne ocupăm $p_1 = 1$, deci

$$z_1 = y - 3u \qquad z_2 = -y - 3u.$$

Ducând aceste valori în (3) se obţin

(4) $$-y^2 - 4yu + 6u^2 = 1$$

şi

(5) $$-y^2 + 4yu + 6u^2 = 1$$

Fac acum :

$$y = qu + t$$

şi determin pe q cu condiţia ca termenii în ut să dispară. După efectuarea calculelor se deduce că trebuie să avem

$$q = -2 \quad \text{pentru ecuaţia (4)}$$

$$q = 2 \quad \text{pentru ecuaţia (5)}$$

aşa că vom avea pentru y sistemele

$$y_1 = -2u + t \quad ; \quad y_2 = 2u + t.$$

Pentru ori care din aceste forme ecuaţiunile (4) şi (5) devin

$$10u^2 - t^2 = 1$$

ale cărei soluţii generale le-am dat în *Revista Matematică din Timişoara,* Vol. XIV, pag. 19. Acele soluţii sunt:

$$t = \frac{(3 + \sqrt{10})^{2n+1} + (3 - \sqrt{10})^{2n+1}}{2}$$

$$u = \frac{(3 + \sqrt{10})^{2n+1} - (3 - \sqrt{10})^{2n+1}}{2\sqrt{10}}$$

aşa că patratele de la cazul 4⁰ vor fi date de formulele

$$x_1 = 2z_1 = -10u + 2t \; ; \; y_1 = -2u + t$$

$$x_2 = 2z_2 = -10u - 2t \; ; \; y_2 = 2u + t.$$

Vom avea deci 2 şiruri de *pătrate berce* terminate în 6. Dacă, în valorile lui t şi u dăm lui n valorile particulare 0, 1, 2 găsim pentru primul şir

$4^2 = 16$	$135^2 = 18496$	$5161^2 = 26666896$
$1^2 = 1$	$43^2 = 1849$	$1633^2 = 2666689$

iar pentru şirul al doilea

$16^2 = 256$	$601^2 = 364816$	$22936^2 = 526060096$
$5^2 = 25$	$191^2 = 36481$	$7253^2 = 52606009.$

5⁰. $a = 9$. Ecuațiunea (1) devine

$$x^2 - 10y^2 = 9$$

care prin transformațiuni analoage cu cele de la 4⁰ se reduce tot la

$$10z^2 - t^2 = 1$$

dând pentru x și y sistemele de soluțiuni

$$x_1 = -10z + t \quad \text{și} \quad x_2 = -10z + t$$
$$y_1 = -z + t \qquad y_2 = -z + t.$$

Primele valori particulare sunt:

$7^2 = 49$	$253^2 = 64009$	$9607^2 = 92294449$
$2^2 = 4$	$80^2 = 6400$	$3038^2 = 9229444$

pentru primul sistem, și

$13^2 = 161$	$487^2 = 237169$	$18493^2 = 341991049$
$4^2 = 16$	$154^2 = 23716$	$5848^2 = 34199104$

pentru sistemul al doilea.

6⁰. Cazul $a = 0$ este evident că nu dă patrate berce pentru că dacă se suprimă un zero dela dreapta unui patrat perfect, rămâne un număr terminat cu un număr nepereche de zeruri, deci un patrat perfect.

III. Se pot găsi, pe calea urmată la II, patrate care să rămâie tot patrate dacă li se suprimă 2, 3,... cifre dela dreapta. Vom numi aceste patrate, *patrate berce de originul al doilea,* al treilea,... găsirea lor se obține rezolvind în numere întregi ecuațiunea

$$x^2 - 10^n y^2 = a_n \tag{6}$$

în care a_n este numărul de n cifre cu care se termină un patrat perfect.

Rezolvarea ecuației (6) prezintă dificultăți numai din cauza calculelor numerice prea greoaie câte odată. Pentru unele valori particulare ale lui a_n problema se rezolvă foarte ușor. De exemplu pentru

$$a_n = 44$$

trebue să avem

$$x = 2z$$

și (6) devine

$$z^2 - 25y^2 = 11.$$

Punând $5y = v$ avem de rezolvat ecuația:

$$z^2 - v^2 = 11$$

care are numai soluțiunile

$$z = 6 \ , \ v = 5$$

ceeace dă pentru x și y

$$x = 12 \ , \ y = 1 \ \therefore \ 12^2 = 144$$

deci nu avem decât un singur patrat berc de ordinul al doilea terminat în 44:

Iată câteva exemple de patrate berce de ordinul al treilea, al patrulea și al cincilea:

$$506^2 = 256036 \ ; \quad 538^2 = 289444 \ ; \quad 791^2 = 625681$$

$$1012^2 = 1024144 \ ; \quad 1044^2 = 1089936 \ ; \quad 1303^2 = 1697809.$$

IV. In fine, o ultimă categorie de patrate berce sunt patratele *multiplu berce.* Fie patratul

$$x^2 = abc \ldots klmnpq$$

el va fi *multiplu berc,* dacă cel puțin primele 2 din numerele

$$abc \ldots klmnp \ ; \ abc \ldots klmn \ ; \ abc \ldots kl \ ; \ldots$$

vor fi berce.

Aflarea patratelor multiple berce se face tot ca la II. Intre numerele de 3 cifre, singurul pătrat *multiplu berc* de ordinul I este 169 căci fiecare din numerele 16 și 1 sunt patrate perfecte.

Dacă patratul $x^2 = ab \ldots lmnpq$ este *berc* de un ordin oarecare iar numărul care rămâne la stânga este tot *patrat berc* atunci x^2 se va numi patrat mixt multiplu berc. Un astfel de exemplu este:

$$1303^2 = 1697809 \ ; \ 169 = 3^2 \ ; \ 16 = 4^2 \ ; \ 1 = 1^2.$$

Și aceste patrate se găsesc tot ca la II însă făcând calcule mai anevoioase.

V. Am insistat la punctul 4° dela II asupra rezolvărei ecuațiunei

$$2z^2 - 5y^2 = 3$$

pentru a pune în evidență că dacă o astfel de ecuațiune are soluțiuni întregi, atunci ea are 2 sisteme de astfel de soluțiuni. Acest lucru se neglijează în aplicațiuni după cum se vede și din notița din josul paginei 106 de la acest articol.

De alt-fel, în această ordine de idei, D-l Prof. P. SERGESCU, cu ocazia rezolvărei problemelor 2705, 2903 în *Gazeta Matematică* Vol. XXVIII, pag. 353, anunță că a *„pus în evidență"* și a *„arătat cum se poate calcula"* dubla infinitate de soluții a unor astfel de ecuații *„într'un memoriu încă nepublicat"*.

Nu știu dacă se va fi publicat acel memoriu, îl solicităm cu inzistență să ni-l dea la publicat pentru că de sigur conține chestiuni foarte interesante.

COL. GH. BUICLIU.

REZISTENȚA AERULUI ASUPRA UNUI MOBIL CARE SE DEPLASEAZĂ CU VITEZE FOARTE MARI

Problema aceasta a preocupat foarte mult pe *artileriștii-balisticieni,* în ceeace privește numai «rezistența la înaintare» a unui proectil.

Progresul *aviației* a pus însă problema și aviatorilor, în ceeace privește «portanța».

In cele ce urmează îmi propun a da în rezumat un studiu al acestor problemi.

Un mobil mișcându-se cu viteze mai mari decât viteza sunetului, va comprima aerul în față și pe lături mult și îl va rarefia în spate.

Mobilul având viteza V_0, va antrena — prin urmare — un volum de aer, comprimat la partea anterioară și rarefiat la cea posterioară cu o viteză mai mică.

Prin considerațiuni de analiză, să presupunem că volumul de aer din jurul mobilului, antrenat de mobil, merge cu viteza $V_1 < V_0$. Acest prim volum de aer va antrena însă și el un alt volum înconjurător, tot comprimat la partea anterioară și rarefiat la partea posterioară, cu viteza $V_2 < V_1$. Și tot așa mai departe, vom presupune n volume, ultimul fiind însăși aerul aflat în repaos, care are o viteză $V_n = 0$.

Dacă ne alegem volumele de aer aşa fel încât să avem:

$$V_{i-1} - V_i < a_i$$

unde a_i este viteza sunetului în volumul de aer de ordinul i, atunci vom putea studia problema rezistenţei aerului aplicând cunoscuta *lege a patratului,* permisă pentru viteze inferioare vitezei sunetului. Singura deosebire va fi însă în modificarea massei specifice a aerului, care se poate calcula uşor dintr'o relaţie de forma:

$$\rho_i = \rho_{i-1} \cdot A_i^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

pentru cazul adiabatic, unde avem succesiv:

$$A_1 = 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \left(\frac{V_0}{a_0}\right)^2$$

$$A_2 = 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{V_1}{a_1}\right)^2$$

. . . . . .

. . . . . .

$$A_i = 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{V_{i-1}}{a_{i-1}}\right)^2$$

γ fiind raportul căldurilor specifice, pe care îl vom presupune constant în diversele volume.

Se observă uşor că:

$$\rho_i = \rho_0 \cdot (A_1 \cdot A_2 \ldots A_i)^{-\frac{1}{\gamma-1}} .$$

In aceste condiţiuni, *rezistenţa la înaintare* a unei suprafeţe portante, de suprafaţă S_0 şi coeficient Cx_0, este:

$$Fx = \sum_{n}^{1} Fx_i$$

unde:

$$Fx_i = \frac{\rho_i}{2} \cdot Cx_{i-1} \cdot S_{i-1} \cdot V_{i-1}^2$$

$$= \frac{\rho_0}{2} (A_1 \cdot A_2 \ldots A_i)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \cdot Cx_{i-1} \cdot S_{i-1} \cdot V_{i-1}^2 \cdot$$

Analog pentru *portanță* avem:

$$Fz = \sum_{n}^{1} Fz_i$$

unde:

$$Fz_i = \frac{\rho_0}{2} (A_1 \cdot A_2 \ldots A_i)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \cdot Cz_{i-1} \cdot S_{i-1} \cdot V_{i-1}^2 \cdot$$

Observațiuni. 1) Massa specifică a aerului devine infinită dacă:

$$V_i = a_i \cdot \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}$$

ceeace constitue un caz limită, imposibil de realizat.

2) Dacă presupunem:

$$\begin{cases} A_i = \alpha_i \cdot A_1 \\ Cx_i = \xi_i \cdot Cx_0 \\ Cz_i = \zeta_i \cdot Cz_0 \\ S_i = \sigma_i \cdot S_0 \\ V_i^2 = \nu_i \cdot V_0^2 \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} Fx_0 = \frac{\rho_0}{2} \cdot Cx_0 \cdot S_0 \cdot V_0^2 \\ Fz_0 = \frac{\rho_0}{2} \cdot Cz_0 \cdot S_0 \cdot V_0^2 \end{cases}$$

atunci avem:

$$Fx = Fx_0 \cdot A_1^{-\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \sum_{1}^{n} [\xi_i \sigma_i \nu_i \pi (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i)]$$

și

$$Fz = Fz_0 \cdot A_1^{-\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \sum_{1}^{n} [\zeta_i \cdot \sigma_i \cdot \nu_i \pi (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i)].$$

3) Dacă mai presupunem că:

$$\begin{cases} \alpha_i = \alpha \\ \xi_i \cdot \sigma_i = 1 \quad \text{și} \quad \zeta_i \sigma_i = 1 \\ \nu_i = \frac{1}{\beta^i} \quad \text{unde} \quad \beta > 1 \end{cases}$$

atunci obţinem :

$$Fx = Fx_0 \cdot A_1^{-\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \frac{1 \pm \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n}{1 \pm \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

şi

$$Fz = Fz_0 \cdot A_1^{-\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \frac{1 \pm \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n}{1 \pm \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

unde (+) este pentru $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ şi (—) pentru $\frac{\alpha}{\beta} < 1$.

MAIOR I. LINTEŞ.

PREMIUL „VASILE CONTA“

In conformitate cu prevederile Regulamentului fondului «VASILE CONTA», în numărul de faţă urma să se publice raportul comisiunei asupra lucrărilor prezentate pentru premiere din venitul acestui fond.

Societatea neprimind nici o lucrare până la 1 Iulie 1934, potrivit dispoziţiunilor regulamentului fondului, se va aştepta până la 1 Iulie 1935 prezentarea unei asemenea, care se va premia cu totalitatea venitului cumulat până la data acordării.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

NOTE MATEMATICE

13. *Congresul matematicianilor slavi dela Praga.* In legătură cu Nota No. 7 publicată în Nr. trecut al acestei Reviste, D-l MIRON NICOLESCU mi-aduce la cunoştinţă că la prima şedinţă a Secţiunii de geometrie a acelui Congres, D-l DAN BARBILIAN a împărţit, cu marele geometru german W. BLASCHKE, onoarea de a prezida acea şedinţă. De asemenea, D-l C. POPOVICI profesor la Universitatea din Iaşi, a prezidat o şedinţă a Secţiunii de analiză.

In ce priveşte *„Institutul Român de matematici"*, pentru care eu îmi exprimasem oarecare nedomirire, D-l M. NICOLESCU îmi comunică că este o instituţiune creată de D-l R. RACLIŞ, dar că Cehoslovacii au crezut că este vorba de o anexă a Universităţii din Bucureşti.

I. IONESCU.

14. *Carrés parfaits remarquables.* **1.** Les carrés suivants de *sept* et *huit* chiffres sont tels que si on les partage en tranches de *trois* chiffres, à partir de la droite, les nombres représentés par chacune de ces tranches sont des carrés. (On fait exception des nombres terminés par 000).

$1002^2 = 1004004$ $\quad 1008^2 = 1016064$

$1018^2 = 1036324$ $\quad 1275^2 = 1625625$

$1315^2 = 1729225$ $\quad 2001^2 = 4004001$

$2004^2 = 4016016$ $\quad 2009^2 = 4036081$

$2016^2 = 4064256$ $\quad 2025^2 = 4100625$

$3006^2 = 9036036$ $\quad 3024^2 = 9144576$

$4018^2 = 16144324$ $\quad 5010^2 = 25100100$

$6003^2 = 36036009$ $\quad 6012^2 = 36144144$

$6027^2 = 36324729$ $\quad 6065^2 = 36784225$

$7014^2 = 49196196$ $\quad 8001^2 = 64016001$

$8004^2 = 64064016$ $\quad 8009^2 = 64144081$

$8025^2 = 64400625$ $\quad 9002^2 = 81036004$

$9008^2 = 81144064$ $\quad 9018^2 = 81324324.$

2. Les entiers 44, 48 et 49 présentent cette particularité que leurs carrés s'écrivent avec des chiffres *tous différents* ainsi que leurs quatrièmes puissances.

$$44^4 = 1936^2 = 3748096$$

$$48^4 = 2304^2 = 5308416$$

$$49^4 = 2401^2 = 5764801 = 7^8.$$

Enfin le *cube* de 289 a ses chiffres *tous différents.*

$$289^3 = 24137569 = 4913^2 = 17^6,$$

et le nombre formé des quatre chiffres à droite de ce cube est un carré,

$$7569 = 87^2.$$

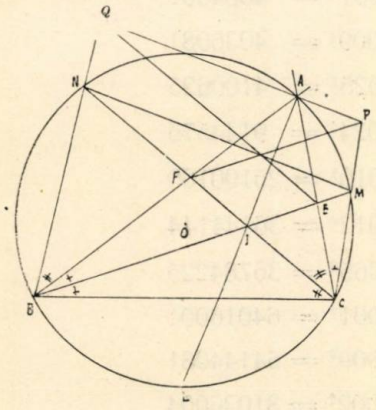
V. THÉBAULT.

15. *Sur le triangle isoscèle.* Voici une démonstration simple de ce théorème :

Tout triangle qui a deux bissectrices intérieures égales est isoscèle.

1. Considérons d'abord un triangle *quelconque* ABC.

Les bissectrices intérieures BE, CF des angles B, C rencontrent le cercle circonscrit aux milieux M, N des arcs AC, AB, puis la bissectrice extérieure de l'angle A en P et Q. Puisque MN est parallèle à PQ, *le quadrilatère* BQPC *est inscriptible.*



De plus, on a ces égalités d'angles

$$CAP = \tfrac{1}{2} \mid B + C \mid = PCF,$$

$$PCF + FAP = 2PCF + A = 180^0;$$

d'où

$$PCF = CFP;$$

le triangle FPC *est isoscèle ;* par analogie, il en est de même pour le triangle BQE, et ces deux triangles ont même angle à la base :

$$FCP = \tfrac{1}{2} \mid B + C \mid = EBQ.$$

2. Si on suppose maintenant que les bissectrices BE, CF *sont égales,* les triangles isoscèles BQE et FBC *sont égaux ;* donc BQ = CP.

Le quadrilatère BQPC est donc un trapèze isoscèle dont les bases sont BC et PQ. Par suite,

$$B + \tfrac{1}{2}C = CBQ = PCB = \tfrac{1}{2}B + C,$$

soit B = C. C. Q. F. D.

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

16. *Asupra posibilităţii ecuaţiei* $x^4 + y^4 = z^4$ *în corpurile patratice.*

Intr'un articol, publicat sub titlul de mai sus în «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung», D-l ALEX. AIGNER arată că ecuaţia

$$(1) \qquad (a_1 + b_1\sqrt{m})^4 + (a_2 + b_2\sqrt{m})^4 = c^4,$$

în care a_1, b_1, a_2, b_2, c, m sunt numere întregi raţionale, este posibilă numai pentru

$$a_1 = a_2 = b_1 = -b_2 = 1 \ , \ c = 2 \ , \ m = -7.$$

Pentru a ajunge la acest rezultat, autorul deduce din (1) relaţiile

$$(2) \qquad \begin{aligned} (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2)\,[(a_1^2 + mb_1^2)^2 + 4ma_2^2b_2^2] &= a_2^2b_2^2c^4 \\ (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2)\,[(a_2^2 + mb_2^2)^2 + 4ma_1^2b_1^2] &= a_1^2b_1^2c^4, \end{aligned}$$

apoi consideră una din ele ca o ecuaţie de gradul doi în m şi, punând condiţia ca această ecuaţie să aibă rădăcini întregi ajunge, după o analiză destul de delicată, la concluzia arătată mai sus.

Vreau să observ că se ajunge la acelaşi rezultat pe o cale mult mai elementară, evitând discuţiuni cari nu sunt la îndemâna oricui şi care are avantajul că se poate aplica la o ecuaţie de tipul (1), în care exponentul poate fi oarecare întreg şi pozitiv. Bine înţeles, nu garantez epuizarea chestiunei în cazul general, dar pot totuşi deduce un rezultat general care circumscrie domeniul de cercetare.

In adevăr, relaţiunile (2) fiind verificate de acelaş m, coeficienţii lor trebue să fie proporţionali, deci

$$(3) \qquad \frac{b_1^4}{b_2^4} = \frac{a_1^2b_1^2 + 2a_2^2b_2^2}{2a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2} = \frac{(a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2)\,a_1^4 - a_2^2b_2^2c^4}{(a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2)\,a_2^4 - a_1^2b_1^2c^4} = \lambda^4.$$

Din primul raport deducem $b_1^2 = \lambda^2 b_2^2$, cu care, al doilea dă, egalat cu λ^4

$$(4) \qquad \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{2 - \lambda^4}{2\lambda^6 - \lambda^2} = \mu^2 \quad , \quad \tfrac{1}{2} < \lambda^4 < 2.$$

Cu acestea, ultimul raport din (3), egalat cu λ^4, dă

$$(1 + \lambda^2\mu^2)\,(\mu^4 - \lambda^4)\,a_2^4 = c^4\,(1 - \lambda^6\mu^2)$$

în care, înlocuind μ^2 cu valoarea sa din (4), găsim

$$4\,(1 - \lambda^2\mu^2)\,(1 - \lambda^4)\,(1 + \lambda^{12})\,a_2^4 = (\lambda^8 - 1)\,\lambda^4\,(2\lambda^4 - 1)\,c^4.$$

Anularea factorului comun $(1 - \lambda^4)$ ne dă valorile reale $\lambda = \pm 1$, implificând cu acest factor rămâne

$$4(1 + \lambda^2\mu^2)(1 + \lambda^{12})\, a_2^4 = -(1 + \lambda^4)\lambda^4(2\lambda^4 - 1)\, c^4,$$

egalitate imposibilă în numere reale, căci primul membru e positiv, iar al doilea negativ. Singura soluție este dar

$$\lambda = \pm 1 \text{ , deci } a_1 = \pm a_2 \text{ , } b_1 = \pm b_2.$$

Nu putem lua același semn în ambele căci atunci cădem peste cazul banal $x = y$; de altfel, egalitatea

$$a_1 b_1 (a_1^2 + mb_1^2) + a_2 b_2 (a_2^2 + mb_2^2) = 0,$$

care se introduce în timpul trecerii dela (1) la (2), care chiar

$$a_1 = a_2 = a \text{ , } b_1 = -b_2 = b \text{ , } a \text{ , } b$$

fiind numere întregi, pe cari le putem presupune chiar positive.

Inlocuind în (2), obținem ecuația unică

$$(5) \qquad 2b^4m^2 + 12a^2b^2m + 2a^4 - c^4 = 0,$$

care are rădăcini întregi dacă

$$2[16a^4 + c^4] = k^2$$

se vede imediat că trebue să avem $k = 2k_1$, deci $c = 2c_1$, cu cari această condiție devine

$$16(a^4 + c_1^4) = 2k_1^2$$

care cere încă $k_1 = 4k_2$, deci

$$a^4 + c_1^4 = 2k_2^2,$$

ecuație care are soluția unică $a = c_1 = k_2 = 1$, deci $c = 2$, iar ecuația (5) devine

$$b^4m^2 + 6b^2m - 7 = 0,$$

de unde

$$b^2m = -3 \pm 4.$$

Nu putem lua $b^2m = 1$ căci găsim $y = 0$, rămâne $b^2m = -7$, deci $b = 1$, $m = -7$.

Pe aceeaşi cale putem încerca ecuaţii generale de forma

$$(A) \qquad (a_1 + b_1\sqrt{m})^p + (a_2 + b_2\sqrt{m})^p = c^p .$$

E interesant de arătat că dacă $p = 3$, ecuaţia (A) are o infinitate de soluţii cuprinse în formulele

$$m = 36k^3 + 36k^2 + 12k + 1,\ c = 2(3k+1),\ a_1 = a_2 = b_1 = -b_2 = 1 .$$

Am impresia că pentru cazul general se poate enunţa proprietatea următoare:

O condiţie necesară, dar nu suficientă, ca ecuaţia (A) *să fie posibilă în corpul* K $(\sqrt{m})$, *este ca ea să se reducă la forma*

$$(a + b\sqrt{m})^p + (a - b\sqrt{m})^p = c^p .$$

M. GHERMĂNESCU.

17. *Asupra problemei 3825.* Generalizarea dată de D-l Col. GH. BUICLIU acestei probleme la pag. 28 Vol. XL, se poate demonstra direct pe un poligon $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ de n laturi înscris în un cerc O pe care se ia un punct P. Fie $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \ldots$; $\beta_1, \beta_2, \ldots$ proecţiile lui P pe A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$ şi pe tangenta în A_1, $A_2, \ldots$ la O. Conform unei proprietăţi cunoscute şi uşor de demonstrat, avem:

$$\overline{P\alpha}_{12}^2 = \overline{P\beta}_1 \cdot \overline{P\beta}_2$$

$$\overline{P\alpha}_{23}^2 = \overline{P\beta}_2 \cdot \overline{P\beta}_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{P\alpha}_{(n-1)n}^2 = \overline{P\beta}_{n-1} \cdot \overline{P\beta}_n$$

$$\overline{P\alpha}_{n1}^2 = \overline{P\beta}_n \cdot \overline{P\beta}_1,$$

de unde prin înmulţire şi extragere de rădăcină:

$$\overline{P\alpha}_{12} \cdot \overline{P\alpha}_{23} \ldots \overline{P\alpha}_{n1} = \overline{P\beta}_1 \cdot \overline{P\beta}_2 \ldots \overline{P\beta}_n$$

A. DOBRESCU
Prof. R.-Sărat.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ «REGELE CAROL II» BUCUREŞTI

Concurs de Admitere în Ciclul I

(15 Septemvrie — 5 Octomvrie 1934)

I. ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

1. Să se studieze variaţia funcţiunei:

$$y = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{2x^2 - 5x + 2}$$

şi să se reprezinte grafic această variaţie.

2. Să se determine λ şi apoi să se rezolve ecuaţia:

$$x^3 - 2x^2 - 19x + 2\lambda = 0$$

ştiind că între rădăcinile ei avem relaţia:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

3. Să se afle cu o eroare < 1 sec. de arc unghiurile θ ce satisfac ecuaţiei:

$$\operatorname{tg} 5\theta = 2 \operatorname{tg} 3\theta.$$

(Se va lua ca necunoscută $x = \operatorname{tg}^2\theta$).

II. GEOMETRIE ANALITICĂ

1. Se dau două axe rectangulare şi un punct A pe axa Ox, se consideră iperbola:

$$(\alpha + \beta x + \gamma y)(\alpha' + \beta' x + \gamma' y) + k = 0$$

să se exprime:

a) că această iperbolă este echilaterală,

b) că una din asimptote trece prin punctul dat $A(a, 0)$,

c) că iperbola trece prin origine,

d) că admite, în origine, axa Ox ca tangentă,

e) să se afle locul geometric al centrelor iperbolelor care satisfac la cele patru condiţii precedente,

f) să se regăsească rezultatul pe cale curat geometrică.

2. Să se determine natura suprafeței:

$$yz + zx + xy + \lambda = 0$$

după valorile pe care le ia parametrul λ.

III. GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ ȘI COMPLEMENTE DE GEOMETRIE

1. Se dau:

Un cerc în planul orizontal de proecțiune, cu centrul în punctul O (150, 140, 0) și raza R = 45.

Un punct V (220, 140, 155).

Un punct A (170, 240, 155).

Cercul O este directoarea unui cilindru ale cărui generatoare sunt drepte frontale, înclinate spre dreapta față de planul orizontal cu un unghiu de 45°. Cilindrul se va mărgini între planul orizontal de proecțiune și un plan orizontal de cotă 155.

Punctul V este vârful unui con de revoluție ale cărui generatoare fac cu planul orizontal un unghiu de 60°. Conul se va mărgini între vârful V și planul orizontal de proecțiune.

Se cere:

a) Să se ducă prin punctul A planele tangente la cilindru și la con. (Se vor desemna dintre acestea, numai planele care tae linia de pământ în cadrul epurei).

b) Să se determine adevărata mărime a unghiului pe care îl fac *în spațiu,* urmele planului tangent la cilindru.

c) Să se desemneze intersecția cilindrului cu conul, reprezentându-se ansamblul celor două solide presupuse opace. (Se vor trasa cu linii pline părțile văzute și punctat părțile nevăzute).

d) Se vor determina punctele remarcabile ale intersecțiunii și anume: punctele de pe conturele aparente și punctele de cotă maximă și minimă.

e) Se va construi tangenta la curba de intersecție a celor două corpuri în punctul din planul orizontal, care are depărtarea cea mai mare.

Datele numerice sunt în milimetri.

Datele se vor trasa în negru, rezultatele în albastru; liniile de construcție se vor trasa cu roșu neîntrerupte, liniile de rapel (de ordine) se vor desemna în roșu punctat.

Se va anexa o legendă explicativă.

2. Se consideră două cercuri de centre O, O′ și raze R și R′, situate în același plan.

a) Se cere să se determine *grafic* un punct M, în planul cercurilor, astfel ca tangentele ce se pot duce din M la cele două cercuri, să fie egale între ele și egale cu o lungime dată L.

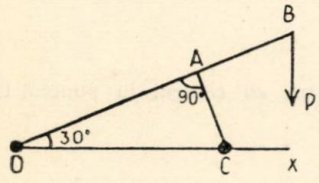
Se va examina cazurile de posibilitate ale problemei, după valorile lui R, R′, L și după poziținea relativă a celor două cercuri O și O′.

b) Să se arate că pentru punctele M ce au proprietatea de mai sus, există relaţia :

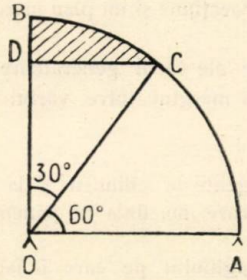
$$\overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = R^2 - R'^2.$$

IV. MECANICA

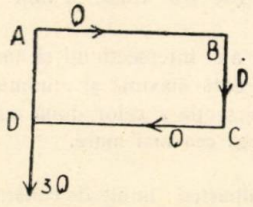
1. Se dă, într'un plan vertical, o bară OAB articulată în O şi făcând cu orizontala OX un unghiu de 30°, în A bara e sprijinită cu o proptea AC pe direcţia barei, propteaua e articulată în punctul fix C pe orizontala OX, în B e aplicată forţa verticală P. Se cer reacţiunile lui O şi C, neglijind greutăţile proprii ale barelor OAB şi AC; se va nota $OA = a$, $AB = b$. In ce caz articulaţia din C se poate înlocui cu un simplu reazem al proptelei pe orizontala OX ?



2. O placă omogenă în formă de sfert de cerc OAB, de rază r şi greutate P, este situată într'un plan vertical, simplu rezemată în punctele O şi A situate pe aceiaşi orizontală. Se cer presiunile din O şi A. Ce devin aceste presiuni când din placă se scoate prin tăere jumătatea de segment BCD ? CD paralelă cu OA unghiul $AOC = 60°$.



3. O placă omogenă dreptunghiulară ABCD, de dimensii $AB = 2a$ şi $BC = a$, se reazimă pe un plan orizontal; după laturile AB, BC şi CD sunt îndreptate 3 forţe egale fie care cu Q, iar după latura AD o forţă 3Q, sensul forţelor e acel indicat de ordinea literilor. Se cere ce forţă H mai trebue aplicată plăcei ca ea să rămâie în echilibru, în ipotezele următoare : *a)* placa şi planul orizontal, pe care se reazemă, sunt perfect lustruite ; *b)* între placă şi plan avem frecare coeficient de frecare f, greutatea plăcei P, în acest caz se va aplica când $P = 6Q$, iar pentru f se va lua succesiv valorile $f = 0{,}1$ şi $f = 0{,}6$.



(Presiunea pe plan, rezultând din greutatea plăcei, se repartizează uniform).

V. CHIMIE GENERALĂ

1. Să se arate care sunt elementele clasificate ca metaloizi şi metale trivalente, iar apoi să se descrie, în ordinea clasificării, compuşii acestor elemente cu halogenii.

2. Despre esteri.

VI. FIZICA

1. Acromatismul lentilelor.
2. Densitatea vaporilor (Metoda Dumas).
3. Tuburi capilare (Fenomene şi Teorie).
4. O suprafaţă are forma unui triunghiu echilateral de latură a. Această suprafaţă se găseşte aşezată vertical într'un lichid de densitate d aşa ca una din laturi să fie orizontală.

Să se calculeze în sistemul C. G. S. forţa exercitată asupra acestei suprafeţe, suprafaţa liberă a lichidului trecând prin vârful triunghiului.

Se dă:

$$a = 20 \text{ cm.}$$

$$d = 1$$

Care e valoarea acestei forţe în sistemul *mm — mgr — sec.*

VII. GEOLOGIE, MINERALOGIE ŞI PETROGRAFIE

1) Densitatea pământului prin metoda balanţei de torsiune.
2) Grupa micelor.
3) Despre argile.
4) Manifestaţiuni post-vulcanice.

(Toate chestiunile obligatorii — Timp acordat: 4 ore)

ANUL I

(Sesiunea Septemvrie 1934)

GEOMETRIE ANALITICĂ

Construcţii

1°. Să se studieze în vecinătatea originei curba definită de ecuaţia:

$$y^2 = \frac{x^2}{x+1}.$$

2°. Se dau două drepte fixe Ox şi Oy şi un punct fix P prin care trece o secantă variabilă AB. Se cere locul geometric al punctului M, mijlocul segmentului AB, determinat pe secanta variabilă de Ox şi Oy.

Electromecanica

1°. Se consideră curba:

$$x^3 + y^3 = 1$$

şi se cere:

a) să se indice forma generală
b) asimptotele
c) punctele de inflexiune.

2°. Se consideră un triunghiu MAB în care A şi B sunt două puncte fixe iar diferenţa unghiurilor $\sphericalangle MAB$ şi $\sphericalangle MBA$ este un unghiu drept.

Se cere locul geometric al punctului M.

M i n e

1°. Să se construiască curba dată de ecuaţiile:

$$x = \frac{1}{1-t^2} \qquad y = \frac{t^2}{1-t^2}$$

2°. Să se arate că într'o iperbolă echilaterală dacă unim un punct oarecare M depe curbă cu extremităţile A, B ale unui diametru fix, diferenţa unghiurilor formate în A şi B e constantă.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Volumul XL. No. 7. Iulie 1934. New-York. Adunarea dela Berkeley din Iunie, de T. M. PUTNAM. Opera ştiinţifică a lui ELIAKIM HASTINGS MOORE, de G. A. BLISS. BAUER despre teoria grupurilor, de H. WEYL.

Idem. No. 8. August 1934. Soluţiile asimptotice ale ecuaţiilor diferenţiale lineare de al doilea ordin cu referire specială la fenomenul lui STOKES, de R. E. LANGER. Compunerea identităţilor aritmetice de E. T. BELL. Fracţii continui şi grupuri anarmonice de transformaţiuni CREMONA, de H. S. WALL. O proprietate minimală a funcţiunii armonice, de E. J. MCSHANE. Simplificarea şirului de postulate WHITEHEAD-HUNTINGTON pentru algebra logicei, de A. H. DIAMOND. O funcţiune analitică cu părţi pozitive imaginare, de J. L. DOOB & B. O. KOOPMAN. Transformări punctuale metrice tranzitive, de M. H. MARTIN. Teoria reţelelor de ideale, de G. BIRKHOFF. O proprietate metrică a transformărilor unui şir de puncte, de D. MONTGOMERY. Câmpuri ciclice de gradul p^n peste F de caracteristica p, de A. A. ALBERT. Desvoltarea coeficienţilor funcţiunilor u/snu şi u^2/sn^2u, de R. D. JAMES.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXVII. Fascicola III. Martie 1934, Buenos Aires.

Boletin Matematico. *Suplimento informativo.* Anul II. No. 8. August 1934. Buenos Aires.

The Mathematical Gazete. Vol. XVIII. No. 230. Octomvrie 1934. Londra. Geometria în şcolile secundare, de R. M. CAREY. Teoreme introductorii în conicele geometrice, de B. E. LAWRENCE. Câteva idei despre energie şi cantitate de mişcare, de H. E. PIGGOT. Problema distribuţiunii, de G. N. WATSON. Societatea matematică din Edinburgh: Colloquium St. Andrews, de G. C. MCVITTIE. Organizarea şi interrelaţiunile şcoalelor. Memorand matematic pentru Asociaţiunea matematică, de J. H. BURDON. M. HAMMOND, B. A. HOWARD, E. M. READ, A. W. RILEY, şi W. J. LANGFORD. Asupra triunghiului isoscel de V. THÉBAULT. Sir THOMAS MUIR, de E. H. M. Trasarea curbelor cubice, de E. H. NEVILLE.

Journal de Mathématiques Élémentaires publie par H. VUIBERT. Anul 59. No. 1. Octomvrie 1934. Paris.

Idem. No. 2. Octomvrie 1934. Paris.

Revista matematică din Timişoara. Anul XIV. No. 8. Octomvrie 1934. Timişoara. Puncte colineare remarcabile, de C. IVĂNESCU.

Ştiinţă şi Progres. Anul I. No. 5. Octomvrie 1934. Bucureşti. Târgul Mureş. Despre calculul rădăcinei patrate, de TIBERIU POPOVICIU.

Natura. Anul XXII. No. 8. Octomvrie 1934. Bucureşti. Congresul interbalcanic de matematici dela Atena, de O. ONICESCU.

J. H. M. WEDDEBURN. *Lectures on matrices.* (Vol. XVII din *Colloquim publications* ale *Societăţii matematice Americane*). New-York 1934.

In un volum de 200 pagini autorul publică lecţiunile pe care le-a făcut la Universitatea Princeton din 1920 încoace, urmate de Note şi de Bibliografie de 22 pagini. E o carte care pune în curent pe cititor cu teoriile şi aplicaţiunile privitoare la matrice.

Cartea conţine următoarele Capitole: I. Matrice şi Vectori. II. Operaţiuni algebrice cu matrice. Ecuaţia caracteristică. III. Factori invarianţi şi divizori elementari. IV. Polinominale vectoriale. Polinominale de matrice singulare. V. Matrice compuse. VI. Matrice simetrice, strâmbe şi hermiţiane. VII. Matrice comutative. VIII. Funcţiuni de matrice. IX. Transformarea automorfică a unei forme biliniare. X. Algebre linear asociative.

I. I.

G. VERRIEST. *Evariste Galois et la théorie des équations algébriques.* Louvain. 1934.

P. SERGESCU. *Aperçu sur les mathématiques en Roumaine au XX-e siècle.* Praga 1934.

P. SERGESCU. *Sur l'organisation de l'enseignement mathématique en Roumaine.* Praga 1934.

MAIOR I. LINTEŞ. *Practica rezolvării problemelor de Balistică interioară.* Contribuţiuni la *«Studiul construcţii gurilor de foc».* Timişoara 1934

GH. T. GHEORGHIU. *Sur les fonctions métasphériques.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de Paris). Paris 1934.

D. BARBILIAN. *Die Bewegungstheorie der Septuoren.* (Extras din *Bulletin mathématique de la Société roumaine des sciences*). Bucureşti 1934.

C. NOICA. *Mathesis sau Bucuriile simple.* Bucureşti 1934.

Deşi această carte nu e de matematici, totuşi are aprecieri interesante despre rolul acestor ştiinţe în afară de utilizările ei practice. O recomandăm în special celor care nu le plac matematicile.

I. I.

Gazeta Matematică. *Supliment cu exerciţii.* Anul I. N. 1. Octomvrie 1934. Cuvânt înainte, de I. IONESCU. Exerciţii pentru clasele IV—VII liceale. Instrucţiuni.

Pentru a se desvolta mai mult gustul pentru matematici la elevii din Liceele noastre, Societatea *Gazeta Matematică*, a început o publicaţiune lunară pe lunile Octomvrie-Iunie, apărând la începutul fiecărei luni, în care se propun exerciţii în măsura înaintării cursurilor matematice în Licee. Numele rezolvitorilor se vor publica cât mai repede, fără a se da soluţiuni, afară de unele indicaţiuni la cele ce vor avea puţini rezolvitori sau vor rămâne nerezolvate.

Abonamentul la acest Supliment, pentru 9 numere, este de 50 lei şi se vor trimite D-lui Lt. Comandor GR. ZAPAN, pe adresa: Casa *«Gazeta Matematică»*, Calea Griviţei. No. 158. Bucureşti II.

I. I.

CERERI

241. Universitatea din Iaşi pregăteşte un istoric al Învăţământului superior în Moldova, cu ocaziunea serbărilor centenarului Academiei Mihăilene. Printre profesorii dela Facultatea filosofică dela acea Universitate, întemeiată în Octomvrie 1860, şi anume la „despărtimântul matematic", a fost şi A. CĂLINESCU pentru *«Analisul superior»*. Lipsesc date asupra vieţii şi activităţii acestui profesor. Un inginer cu acest nume se găseşte menţionat ca membru al Societăţii de Ingineri şi Architecţi care a fost întemeiată la Bucureşti în 1876, dar care Societate nu a durat mult.

Dacă cineva ştie ceva precis despre acest profesor este rugat a face cunoscut D-lui A. MYLLER dela Facultatea de Ştiinţe din Iaşi, la adresa Seminarului Matematic al acelei Facultăţi.

Pentru înlesnirea cercetărilor adaog că localităţi cu numele de **Călineşti** se găsesc în judeţele Bălţi, Botoşani, Dorohoi, Mehedinţi, Muscel, Olt, Prahova, Roman, Romanaţi, Teleorman, Vâlcea,

I. I.

DIVERSE

Societatea Română de matematici, Secţiunea Matematică şi-a reluat şedinţele sale în seara zilei de 15 Octomvrie. D-l Preşedinte G. ŢIŢEICA a făcut o dare de seamă asupra Congresului interbalcanic de matematici dela Atena şi apoi o comunicare asupra reţelelor cu invarianţi constanţi. D-l MIRON NICULESCU a făcut o comunicare asupra unei extensiuni a teoremei lui HARNACK la funcţiunile poliarmonice.

Sporirea Bibliotecei

L. B. FRANCOEUR. *Cours complet de mathématiques* dédié à Sa M. ALEXANDRE I-er, Empereur de Russie. Troisième édition. Paris 1928.
Donaţiune făcută de D-l Inginer MIHAIL VASILIU.

Recreaţii ştiinţifice. Vol. II. Iaşi 1884.
Donaţiune făcută de D-l I. IONESCU Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2481. *Se dau două puncte fixe* A *şi* B *şi unul mobil* M. *Prin mijloacele lui* MA *şi* MB, *se duc două drepte, înclinate respectiv pe* MA *şi* MB, *care taie o dreaptă* D *după un segment constant. Se cere:*

1. Locul geometric al lui M.

2. Să se deducă teorema lui LAGUERRE.

D. PERIEŢEANU.

1. Luăm origina în A şi pe AB ca axă de x. Fie M (x, y) un punct al locului. Notăm cu λ şi μ unghiurile pe care le fac cu MA şi MB două drepte care trec prin mijloacele C şi E ale lui MA şi MB iar cu F şi G intersecţiile acelor drepte cu D. Unghiurile λ, μ sunt măsurate în senzul invers acelor unui ceasornic, începând dela dreptele CF şi EG. Dacă B $(a, 0)$ atunci avem evident

$$C\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \text{ şi } E\left(\frac{x+a}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

Fie V_1, V_2 înclinările dreptelor AM, BM şi λ_1, λ_2 înclinările dreptelor CF, EG pe Ox. Se găseşte imediat pe o figură că

$$\lambda_1 = \pi + (V_1 - \lambda) \text{ şi } \lambda_2 = \pi + (V_2 - \mu)$$

de unde se deduce

$$\operatorname{tg}\lambda_1 = \frac{\operatorname{tg}V_1 - \operatorname{tg}\lambda}{1 + \operatorname{tg}V_1 \operatorname{tg}\lambda} \quad , \quad \operatorname{tg}\lambda_2 = \frac{\operatorname{tg}V_2 - \operatorname{tg}\mu}{1 + \operatorname{tg}V_2 \operatorname{tg}\mu} .$$

Punând

$$\operatorname{tg}\lambda = m \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg}\mu = n$$

şi observând că

$$\operatorname{tg}V_1 = \frac{y}{x} \quad ; \quad \operatorname{tg}V_2 = \frac{y}{x-a}$$

se găseşte

$$\operatorname{tg}\lambda_1 = \frac{y - mx}{x + my} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg}\lambda_2 = \frac{y - nx + an}{x + ny - a} .$$

Cu acestea, ecuaţiile dreptelor CF şi EG vor fi:

$$(1) \qquad Y - \frac{y}{2} = \frac{y - mx}{x + my}\left(X - \frac{x}{2}\right)$$

$$(2) \qquad Y - \frac{y}{2} = \frac{y - nx + an}{x + ny - a}\left(X - \frac{x+a}{2}\right) .$$

Intersecţiile lor cu dreapta D de ecuaţie

$$(3) \qquad Y = \alpha X + \beta$$

se obţin rezolvând sistemele (1), (3) şi apoi (2), (3). Se găseşte în ce priveşte abscisele

$$X_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{mx^2 + my^2 - 2\beta(x + my)}{(\alpha + m)x + (\alpha m - 1)y}$$

$$X_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(y - 2\beta)(x + ny - a) - (x + a)(y - nx + an)}{(\alpha + n)x + (\alpha n - 1)y - a(\alpha + n)} .$$

Notând cu Y_1, Y_2 ordonatele corespunzătoare ale acestor puncte şi cu b segmentul constant FG vom avea, conform enunţului

$$(4) \qquad \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2} = b.$$

Dar introducând în (3) în loc de X succesiv pe X_1 şi X_2 şi scăzând rezultatele se găseşte

$$Y_1 - Y_2 = \alpha(X_1 - X_2)$$

care dus în (4) dă

$$(X_1 - X_2)\sqrt{1 + \alpha^2} = b.$$

Inlocuind aici pe X_1, X_2 prin valorile lor şi notând, pentru prescurtare, pe $\sqrt{1+\alpha^2}$ prin k, găsim că ecuaţia lui M este *cubica*

$$\frac{(y-2\beta)(x+m)-x(y-mx)}{(\alpha+m)x+(\alpha m-1)y} - \frac{(y-2\beta)(x+ny-a)-(x+a)(y-nx+an)}{(\alpha+n)x+(\alpha n-1)y-a(\alpha+n)} = kb$$

care trece prin A şi B.

2. Dacă dreptele CF, EG sunt continuu perpendiculare pe AM BM atunci

$$m=\infty \quad \text{şi} \quad n=\infty$$

şi ecuaţia precedentă se reduce la *conica*

$$k[a^2(x+\alpha y)-a(x^2+y^2-2\beta y)]=2b(x+\alpha y)(x+\alpha y-a)$$

sau

$$(5)\quad (ak+2b)x^2+4\alpha bxy+(ka+2\alpha^2 b)y^2-(ka^2+2ab)x - [(a^2\alpha+2a\beta)k+2b\alpha]=0.$$

Direcţiile axelor unei conice de ecuaţie generală

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

se ştie că sunt date de ecuaţia

$$(6)\qquad Bm^2+(A-C)m-B=0.$$

Pentru conica (5) avem

$$B=2\alpha b$$

$$A-C=2b(1-\alpha^2)$$

aşa că înlocuind în (6) se găseşte că direcţiile axelor conicei (5) sunt

$$m_{1,2}=\frac{\alpha^2-1\pm\sqrt{(1-\alpha^2)^2+4\alpha^2}}{2\alpha}$$

$$\therefore\quad m_1=\alpha \quad \text{şi} \quad m_2=-\frac{1}{\alpha}.$$

Adică axele conicei (5) sunt una paralelă şi alta perpendiculară pe dreapta D.

Să căutăm axa paralelă cu m_1. Ecuaţia ei va fi

$$\alpha f'_x - f'_y = 0 \tag{7}$$

în care $f(x, y)$ este membrul I al ecuaţiei (5). Avem

$$f'_x = 2(ak + 2b)x + 4\alpha by - (a^2k + 2ab)$$

$$f'_y = 2(ak + 2\alpha^2 b)y + 4\alpha bx - [(a^2\alpha + 2a\beta)k + 2ab\alpha]$$

şi înlocuind în (7), se găseşte după efectuarea tuturor calculelor,

$$y = \alpha x + \beta$$

adică tocmai ecuaţia dreptei D. Am ajuns deci la concluzia că *dacă* M *descrie conica (5) atunci perpendicularele pe mijloacele lui* AM *şi* BM *determină segmente constante pe axa* D *a conicei.*

Se ajungea la aceeaşi concluzie dacă se considera axa perpendiculară pe D.

Ori aceasta este tocmai teorema lui LAGUERRE: *perpendicularele pe mijloacele segmentelor* MA, MB, *când* M *se mişcă pe o conică iar* A *şi* B *sunt puncte fixe ale acelei conice, interceptează pe o axă a conicei un segment de lungime constantă.*

Notă. 1°. Soluţia aceasta a fost trimisă de D-l LOCOT. M. I. FOCŞENEANU, când era Sub-Locotenent-elev la Şcoala Specială a Artileriei.

2°. După ce s'a arătat că D este paralelă cu o axă a conicei (5) se putea rezolva sistemul

$$f'_x = 0 \quad , \quad f'_y = 0$$

ale cărui rădăcini verifică dreapta D ceeace conducea tot la concluzia că D este o axă a conicei.

GH. B.

PROBLEMA 3282. *Se cere patratul de cinci cifre, având primele patru, sau ultimele patru cifre consecutive.*

N. TEODORESCU.

1°. *Primele 4 cifre sunt consecutive.* Luăm grupurile de 2 cifre cu care se poate termina un patrat:

00 ; 01 ; 04 ; 09 ; 16 ; 21 ; 24 ; 25 ; 36 ; 41 ; 44 ; 49 ; 56 ; 61 ; 64 ; 69 ;

76 ; 81 ; 84 ; 89 ; 96.

date în **Culegere de Probleme, Aritmetica** XXXIX. 1. Examinăm pe rând toate cazurile care se pot întâmpla cu fiecare grupă. Să considerăm de exemplu grupa 61. Cu ea se pot forma următoarele numere de 5 cifre, cu primele 4 cifre consecutive :

34561 ; 35461 ; 43561 ; 45361 ; 53461 ; 54361 ;

45761 ; 47561 ; 54761 ; 57461 ; 74561 : 75461 ;

57861 ; 58761 ; 75861 ; 78561 ; 85761 ; 87561 ;

78961 ; 79861 ; 87961 ; 89761 : 98761 ; 97861 .

Examinăm acum, după diferite criterii de divizibilitate, de terminațiuni de patrate, de extragere de rădăcini, de descompuneri în factori etc., pe fiecare din aceste numere, reținând numai pe acele pe care le găsim pătrate. In unul din aceste moduri găsim că din cele 20 numere terminate în 61 numai 78961 este patrat și soluție a problemei.

Procedând în acest fel cu toate grupele enumărate mai sus, se găsesc următoarele soluțiuni pentru cazul 1^0 :

$$152^2 = \mathbf{23104} \quad ; \quad 213^2 = \mathbf{45369} \quad ; \quad 281^2 = \mathbf{78961}.$$

2^0. *Ultimele 4 cifre sunt consecutive.* Din terminațiile de 2 cifre ale unui patrat se aleg numai

01 ; 21 ; 24 ; 25 ; 36 ; 41 ; 56 ; 64 ; 69 ; 76 ; 89 ; 96 ;

care au cifrele diferite între ele și care nu diferă mai mult decât cu 3. Examinăm ca la 1^0 toate aceste grupe. Să considerăm de exemplu grupa 56; cu ea se pot forma următoarele numere de 5 cifre având ultimele 4 cifre consecutive:

$a\,3456$; $a\,4356$; $a\,4756$; $a\,7456$; $a\,7856$; $a\,8756$.

Examinăm pe fiecare din aceste numere spre a găsi valoarea lui a pentru care ele sunt patrate. Așa de exemplu

$$a\,3456 = x^2$$

cu

$$99 < x < 317. \qquad (1)$$

După tabelul din *Gazeta Matematică,* Vol. XXXVII, pag. 368, numerele ale căror patrate se termină în 456 sunt

$$x = 500n \pm 116.$$

Ţinând seamă de (1) se vede că n nu poate fi decât zero şi atunci rezultă

$$x = 116$$

$$\therefore \quad a \times 10000 + 3456 = 116 \times 116$$

$$\therefore \quad a \times 625 + 216 = 29 \times 29$$

membrul întâi este divizibil prin 29 numai când a este 1; dar atunci găsim

$$625 + 216 = 29 \times 29$$

şi deci soluţia

$$116^2 = 13456.$$

Procedând la fel cu toate cele 6 numere de mai sus, găsim pentru 2^0 soluţiile:

$$116^2 = 13456 \; ; \quad 126^2 = 15876 \; ; \quad 137^2 = 18769 \; ;$$

$$182^2 = 33124 \; ; \quad 234^2 = 54756.$$

Notă. 1. D-l R. SPATHY a dat 2 soluţii pentru cazul 1^0 şi 3 soluţii pentru cazul 2^0.

2. Dacă se caută, pe căi analoage, patratele de 5 cifre care au 4 cifre oarecare consecutive, se găsesc pe lângă soluţiile problemei 3282, încă următoarele soluţiuni:

$$118^2 = 13924 \; ; \quad 179^2 = 32041 \; ; \quad 185^2 = 34225 \; ; \quad 186^2 = 34596 \; ;$$

$$214^2 = 45796 \; ; \quad 232^2 = 53824 \; ; \quad 252^2 = 63504 \; ; \quad 286^2 = 81796.$$

3. Patratele de 5 cifre consecutive sunt:

$$152^2 = 23104 \; ; \quad 179^2 = 32041.$$

4. Soluţiile problemei 3282 sunt cuprinse în acelea ale problemei 3517 rezolvată la pag. 58, Vol. XXXIX, unde s'au dat patratele de 5 cifre care au 2, 3, 4 sau 5 cifre consecutive.

GH. B.

PROBLEMA 3390. *Ce fel de curbă ar trebui să se rostogolească pe una din laturile unui triunghiu, pentru ca două puncte fixe ale ei să descrie celelalte două laturi?*

MAIOR I. LINTEŞ.

Când *baza* şi *ruleta* sunt două drepte, se demonstrează că trebue să se rostogolească o «spirală logaritmică» (vezi *„Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitisimal"* ed. II pag. 263).

In consecinţă, dacă pe o dreaptă se rostogoleşte o spirală logaritmică, atunci două puncte ale ei pot descrie două drepte.

D-l LT. FOCŞENEANU face însă observaţia că dacă rostogolirea se face dealungul laturei unui triunghiu, cele două puncte fixe nu pot descrie complect celelalte două laturi, decât în cazul teoremei lui «LA HIRE», în care caz condiţia ca baza să fie o dreaptă, face problema imposibilă.

A rezolvat problema în primul caz D-l GH. CONSTANTINESCU.

I. L.

PROBLEMA 4178. *Să se rezolve sistemul de ecuaţiuni:*

$$x^6 - y^6 + x^2y^4 - x^4y^2 = 51$$

$$x^8y^4 + x^4y^8 = 272.$$

IOAN CURCHI.

Soluţia. Observăm că ecuaţiile sistemului dat se mai poate scrie sub forma:

$$(x^2 - y^2)(x^4 + y^4) = 51 \quad , \quad x^4y^4(x^4 + y^4) = 272$$

care prin împărţire ne dau:

$$\frac{x^2 - y^2}{x^4y^4} = \frac{3}{16}.$$

Să notăm pentru simplificarea scrisului:

$$x^2 - y^2 = X \quad , \quad x^2y^2 = Y.$$

Sistemul dat se poate înlocui prin:

$$Y^2(X^2 + 2Y) = 272 \quad , \quad 16X = 3Y^2$$

unde am înlocuit pe $x^4 + y^4$ prin: $X^2 + 2Y$. Inlocuind în prima ecuaţie pe X scos din a doua găsim că Y satisface ecuaţiei:

$$9Y^6 + 512Y^3 - 69632 = 0$$

de unde scoatem:

$$Y^3 = 64 \quad \text{şi} \quad Y^3 = -\frac{1088}{9}$$

sau încă:

$$Y = 4\varepsilon \quad \text{şi} \quad Y = -4\varepsilon\sqrt[3]{\frac{17}{9}}$$

unde ε este o rădăcină a ecuaţiei binome:

$$x^3 - 1 = 0$$

adică:

$$\varepsilon = 1 \,,\, \tfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3}).$$

Pentru fiecare din aceste valori ale lui Y vom avea respectiv:

$$X = 3\varepsilon^2 \quad \text{şi} \quad X = \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{289}{3}}\,.$$

Distingem de aci înainte două cazuri:

1. $$X = 3\varepsilon^2 \quad , \quad Y = 4\varepsilon,$$

care se mai pot scrie, ţinând seamă de notaţiile făcute:

$$x^2 - y^2 = 3\varepsilon^2 \quad , \quad x^2y^2 = 4\varepsilon$$

care ne spune că x^2 şi $-y^2$ sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$Z^2 - 3\varepsilon^2 Z - 4\varepsilon = 0$$

şi care ne dă:

$$Z = \frac{3\varepsilon^2 \pm \sqrt{9\varepsilon^4 + 16\varepsilon}}{2} = \frac{3\varepsilon^2 \pm \sqrt{9\varepsilon^4 + 16\varepsilon^4}}{2} = \frac{3\varepsilon^2 \pm 5\varepsilon^2}{2}$$

deoarece, ţinând seamă de cine este ε, avem $\varepsilon^3 = 1$, care înmulţită cu ε ne dă: $\varepsilon = \varepsilon^4$. Deci avem sistemul de soluţii:

$$x^2 = 4\varepsilon^2 \,,\, y^2 = \varepsilon^2 \;;\; x^2 = -\varepsilon^2 \,,\, y^2 = -4\varepsilon^2$$

de unde scoatem:

$$x \pm 2\varepsilon \quad , \quad y = \pm\varepsilon \;;\; x = \pm\varepsilon i \quad , \quad y = \pm 2\varepsilon i$$

unde i este ca deobiceiu $\sqrt{-1}$. Acest prim caz ne dă în total, ţinând seamă că ε are trei valori, *24 de soluţii.*

2. $$X = \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{289}{3}} \quad , \quad Y = -4\varepsilon\sqrt[3]{\frac{17}{9}},$$

care se mai pot scrie:

$$x^2 - y^2 = \varepsilon^2 \sqrt[3]{\frac{289}{3}} \quad , \quad x^2 y^2 = -4\varepsilon \sqrt[3]{\frac{17}{9}}$$

adică x^2 şi $-y^2$ sunt soluţiile ecuaţiei:

$$Z^2 - \varepsilon^2 \sqrt[3]{\frac{289}{3}} Z + 4\varepsilon \sqrt[3]{\frac{17}{9}} = 0.$$

Procedând ca la primul caz se găseşte:

$$x^2 = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{289}{3}} + \sqrt[6]{\frac{17}{9}}\right), \; y^2 = -\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{289}{3}} - \sqrt[6]{\frac{17}{9}}\right);$$

$$x^2 = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{289}{3}} - \sqrt[6]{\frac{17}{9}}\right), \; y^2 = -\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{289}{3}} + \sqrt[6]{\frac{17}{9}}\right)$$

de unde:

$$x = \pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt[3]{\frac{289}{3}} + \sqrt[6]{\frac{17}{9}}}, \; y = \pm \frac{\varepsilon i}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt[3]{\frac{289}{3}} - \sqrt[6]{\frac{17}{9}}}$$

$$x = \pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt[3]{\frac{289}{3}} - \sqrt[6]{\frac{17}{9}}}, \; y = \pm \frac{\varepsilon i}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt[3]{\frac{289}{3}} + \sqrt[6]{\frac{17}{9}}}$$

care ne dau încă *24 de soluţii.*

Problema admite deci în total *48 de soluţii.*

— Au rezolvat problema găsindu-i toate soluţiile D-nii: P. C. MAZILU (lic. Internat din Iaşi) şi SUB.-LT. I. C. SAVIN (student Iaşi).

Observări. 1. Au dat soluţii parţiale unele conţinând şi greşeli de calcul, D-nii: SUB.-LT. I. PAREPEANU, E. MEREUŢĂ, E. MAREŞ, D. MAVRODIN, I. SAGER, H. IONESCU-BISS, V. GHIOCEL, I. PETRESCU, CHIRIŢĂ, V. CEAUŞESCU, T. PREDOESCU.

2. D-rele: D. FABIUS şi M. LÉBER şi D-nii: SUB.-LT. C. AVRAM, V. GODEANU, M. ZIFF, M. PREDOIESCU au scris sistemul sub forma:

$$(x^2 - y^2)(x^4 + y^4) = 3 \cdot 17 \quad , \quad x^4 y^4 (x^4 + y^4) = 16 \cdot 17$$

de unde au dedus că *trebue* să avem:

$$x^2 - y^2 = 3 \quad , \quad x^4 y^4 = 16 \quad , \quad x^4 + y^4 = 17.$$

Procedând astfel nu este de mirat că n'au găsit toate soluţiile problemei.

3. D-l H. IONESCU-BISS observă că problema nu diferă de pr. 969 din „R. M. T." decât prin constantele din membrul al doilea şi prin faptul că necunoscutele din problema citată sunt înlocuite cu pătratele lor.

4. D-l I. C. SAVIN obsearvă că problema se poate generaliza cerându-se să se rezolve sistemul:

$$x^{3n} - y^{3n} + x^n y^{2n} - x^{2n} y^n = a \quad , \quad x^{4n} y^{2n} + x^{2n} y^{4n} = b$$

dar nu duce calculele până la sfârşit.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4243. *Să se găsească 2 cuburi consecutive de câte 9 cifre, ştiind că numerele de 3 cifre cu care încep ambele cuburi sunt consecutive şi că numărul de 3 cifre cu care se termină unul din aceste numere, este egal cu numărul de 3 cifre cu care începe celălalt cub.*

COL. GH. BUICLIU.

Din enunţ rezultă că unul din cuburile căutate începe şi se termină cu numere consecutive de câte 3 cifre. Căutarea acestor numere s'a făcut în soluţia problemei 3631 la pag. 73, Vol. XXXIV, *Gazeta Matematică*. S'a găsit acolo, că

$$537^3 = 154854153 \quad , \quad 666^3 = 295408296$$

sunt singurele cuburi de 9 cifre care încep şi se termină cu numere consecutive de câte 3 cifre.

Pentru rezolvarea problemei de faţă, este destul a examina cuburile numerilor 536, 538 şi 665, 667 care încadrează pe cele 2 cuburi găsite. Din examinarea aceasta rezultă că problema are următoarele 2 grupe de soluţii:

$$\begin{cases} 536^3 = 153990656 \\ 537^3 = 154854153 \end{cases} \text{şi} \quad \begin{cases} 666^3 = 295408296 \\ 667^3 = 296409963 \end{cases}$$

Notă. 1°. D-l D. D. MAVRODIN (Lic. M. Eminescu Bucureşti), a dat soluţiile exacte, utilizând tablele lui CLAUDEL de cuburi perfecte. Acesta însă nu e un mod de a rezolva problemele de aritmetică.

2°. Am compus problema 4243 după ce am propus problema 4142, rezolvată la pag. 354, Vol. XXXVIII, unde ceream cubul de 9 cifre format din numărul 408 încadrat de 2 numere consecutive de câte 3 cifre.

GH. B.

PROBLEMA 4328. α, β, γ *fiind arce oarecari, există relaţia:*

$$\frac{1+\cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma-4\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma}{1+\cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma+4\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma}$$
$$=\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)\operatorname{tg}(\alpha-\beta-\gamma)\operatorname{tg}(\beta-\gamma-\alpha)\operatorname{tg}(\gamma-\alpha-\beta).$$

C. IONESCU-BUJOR.

1°. *Soluţia I.* Expresia

$$E_1=8\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(\alpha-\beta-\gamma)\sin(\beta-\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\alpha-\beta) \quad (1)$$

devine, aplicând formula

$$2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$$

produselor primelor două şi ultimelor două sinusuri:

$$E_1=2[\cos 2(\beta+\gamma)-\cos 2\alpha][\cos 2(\beta-\gamma)-\cos 2\alpha]$$
$$=2\{\cos^2 2\alpha-[\cos 2(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)]\cos 2\alpha+\cos 2(\beta+\gamma)\cos 2(\beta-\gamma)\}.$$

Şi cum

$$2\cos^2\alpha=1+\cos 4\alpha\ ,\quad \cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$$

urmează

$$E_1=1+\cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma-4\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma. \quad (2)$$

Analog,

$$E_2=8\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos(\alpha-\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma-\alpha)\cos(\gamma-\alpha-\beta) \quad (3)$$

devine

$$E_2=[\cos 2(\beta+\gamma)+\cos 2\alpha][\cos 2(\beta-\gamma)+\cos 2\alpha]$$
$$=2\{\cos^2 2\alpha+[\cos 2(\beta+\gamma)+\cos 2(\beta-\gamma)]\cos 2\alpha+\cos 2(\beta+\gamma)\cos 2(\beta-\gamma)\}$$
$$=1+\cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma+4\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma. \quad (4)$$

Dacă în membrul II al relaţiei propuse se introduc formele (2), (4) ale expresiilor (1), (3), relaţia e dovedită.

Au soluţionat astfel problema însă transformând şi membrul I cu formula lui MOIVRE D-nii: CEAUŞESCU VASILE şi ŞTIRBU GH. (Liceul Militar Iaşi).

2°. *Soluția II.*

Aplicând relațiile

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x \quad \text{și} \quad \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

respectiv primilor doi și următorilor doi termeni ai numărătorului membrului I, iar în ultimul termen punând

$$2\cos 2\beta \cos 2\gamma = \cos 2(\beta+\gamma) + \cos 2(\beta-\gamma),$$

numărătorul devine

$$2\cos^2 2\alpha - 2\cos 2\alpha[\cos 2(\beta+\gamma)+\cos 2(\beta-\gamma)] + 2\cos 2(\beta+\gamma)\cos 2(\beta-\gamma)$$
$$= 2\cos 2\alpha[\cos 2\alpha - \cos 2(\beta+\gamma)] - 2\cos(\beta-\gamma)[\cos 2\alpha - \cos 2(\beta+\gamma)]$$
$$= 2[\cos 2\alpha - \cos 2(\beta+\gamma)][\cos 2\alpha - \cos 2(\beta-\gamma)]$$

și cum

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}, \text{ iar } \sin(-x) = -\sin x$$

numărătorul ia forma:

$$8\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(\alpha-\beta-\gamma)\sin(\beta-\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\alpha-\beta). \quad (1)$$

Analog se transformă numitorul:

$$2\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha[\cos 2(\beta+\gamma)+\cos 2(\beta-\gamma)] + 2\cos 2(\beta+\gamma)\cos 2(\beta-\gamma)$$
$$= 2\cos 2\alpha[\cos 2\alpha + \cos 2(\beta+\gamma)] + 2\cos 2(\beta-\gamma)[\cos 2\alpha + \cos 2(\beta+\gamma)$$
$$= 2[\cos 2\alpha + \cos 2(\beta+\gamma)][\cos 2\alpha + \cos 2(\beta-\gamma)].$$
$$= 8\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos(\alpha-\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma-\alpha)\cos(\gamma-\alpha-\beta). \quad (2)$$

Inlocuirea în membrul I a numărătorului și a numitorului prin expresiile echivalente (1) și (2), aduce dovedirea egalității propuse.

Soluții analoage date de Domnișoara PREDUȚA D. BUNGEȚIANU și Domnii: VARLAM M. PETRE (Școala Politehnică, București), S.-LT. AUREL EM. BĂDESCU (Fontainebleau), NEGREA A. MIRCEA LEONTE (Brăila), MAVRODIN D. DUMITRU (Lic. M. Eminescu), PETRESCU C. O. (Lic. Internat, Iași), GRIGORESCU VINTILĂ, DAN MARIN, DOBRESCU PAUL, MĂNAC M. (Lic. Militar «N. Filipescu»), GAVRILESCU N. C. (Lic. Militar, Iași), NICOARĂ D. C., APOSTOL VALERIAN, AMĂRICĂ I. TIBUL, HARET V. CONST., ILIESCU B. D., POPESCU GREACA VLAD, TRĂSNITU N., VASILIU I. MIRCEA, VASILIU A. CONST,. VERENCA SILVIU, VASILESCU C. NICOLAE (Lic. Militar Cernăuți) și STOICESCU T.

3°. *Soluția III.*

Domnul IVĂNESCU CEZAR (Bârlad) deduce din relația

$$1 + 2\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma - \cos^2 2\alpha - \cos^2 2\beta - \cos^2 2\gamma$$
$$= 4\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(-\alpha+\beta+\gamma)\sin(\alpha-\beta+\gamma)\sin(\alpha+\beta-\gamma),$$

pe care o stabilește, relația

$$1 + \cos 4\alpha + \cos 4\beta + \cos 4\gamma - 4\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma$$
$$= 8\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(\alpha-\beta-\gamma)\sin(\beta-\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\alpha-\beta)$$

unde înlocuind α prin $\frac{\pi}{2} - \alpha$, obține

$$1 + \cos 4\alpha + \cos 4\beta + \cos 4\gamma + 4\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma$$
$$= 8\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos(\alpha-\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma-\alpha)\cos(\gamma-\alpha-\beta).$$

4°. *Soluții* cu calcule numeroase au dat D-nii: CARDARA GH. (Corabia) și MARTÉȘ V. GR. (Lic. Militar, Chișinău).

5°. *Note:* Diverse ipoteze făcute asupra relațiilor stabilite

$$1 + \cos 4\alpha + \cos 4\beta + \cos 4\gamma - 4\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma$$
$$= 8\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(\alpha-\beta-\gamma)\sin(\beta-\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\alpha-\beta) \quad (1)$$

$$1 + \cos 4\alpha + \cos 4\beta + \cos 4\gamma + 4\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma$$
$$= 8\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos(\alpha-\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma-\alpha)\cos(\gamma-\alpha-\beta) \quad (2)$$

conduc la relații interesante.

a) Dacă $\alpha+\beta+\gamma = k\pi$ (k intreg)

din (1) se deduce

$$1 + \cos 4\alpha + \cos 4\beta + \cos 4\gamma = 4\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma \quad (3)$$

din (2)

$$1 + \cos 4\alpha + \cos 4\beta + \cos 4\gamma + 4\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma$$
$$= (-1)^k 8\cos(\alpha-\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma-\alpha)\cos(\gamma-\alpha-\beta). \quad (4)$$

Alăturând relațiile (3) și (4), se obțin,

$$1+\cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma = (-1)^k 4\cos(\alpha-\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma-\alpha)\cos(\gamma-\alpha-\beta) \quad (5)$$

și $$\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma = (-1)^k \cos(\alpha-\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma-\alpha)\cos(\gamma-\alpha-\beta). \quad (6)$$

In particular, pentru $k = 1$, α, β, γ sunt unghiurile unui triunghiu A B, C și se află

$$1 + \cos 4A + \cos 4B + \cos 4C = 4\cos 2A \cos 2B \cos 2C$$
$$= -4\cos(A+B+C)\cos(B+C-A)\cos(C+A-B) \quad (7)$$

D-l CEZAR IVĂNESCU, la finele soluției semnalează prima dintre aceste două relații.

b) Dacă $\alpha-\beta-\gamma = k\pi$ (k intreg).

Din (1) și (2) rezultă

$$1 + \cos 4\alpha + \cos 4\beta + \cos 4\gamma = 4\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma \quad (8)$$

$$1 + \cos 4\alpha + \cos 4\beta + \cos 4\gamma + 4\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma$$
$$= (-1)^k 8\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma-\alpha)\cos(\gamma-\alpha-\beta) \quad (9)$$

de unde:

$$1+\cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma=(-1)^k\, 4\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma-\alpha)\cos(\gamma-\alpha-\beta). \quad (10)$$

$$\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma=(-1)^k\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma-\alpha)\cos(\gamma-\alpha-\beta). \quad (11)$$

c) Pentru $\alpha+\beta+\gamma=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (k întreg),

relaţiile (1) şi (2) devin

$$1+\cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma-4\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma$$
$$=(-1)^k\, 8\sin(\alpha-\beta-\gamma)\sin(\beta-\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\alpha-\beta) \quad (12)$$

$$1+\cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma=-4\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma. \quad (13)$$

din care urmează

$$1+\cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma=(-1)^k\, 4\sin(\alpha-\beta-\gamma)\sin(\beta-\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\alpha-\beta) \quad (14)$$

$$\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma=(-1)^{k+1}\sin(\alpha-\beta-\gamma)\sin(\beta-\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\alpha-\beta). \quad (15)$$

d) Analog pentru

$$\alpha+\beta-\gamma=(2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k \text{ întreg})$$

$$1+\cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma=(-1)^k\, 4\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\alpha-\beta) \quad (16$$

$$\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma=(-1)^{k+1}\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\alpha-\beta). \quad (17)$$

e) Pentru $\gamma=0$, relaţia propusă devine:

$$\frac{2+\cos 4\alpha+\cos 4\beta-4\cos 2\alpha\cos 2\beta}{2+\cos 4\alpha+\cos 4\beta+4\cos 2\alpha\cos 2\beta}=\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta) \quad (18)$$

iar pentru $\beta=\gamma=0$,

$$\frac{3+\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha}{3+\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha. \quad (19)$$

După culegerea problemei s'a primit soluţia D-lui GEORGE SILAŞ (student, Cluj). C. I. B.

PROBLEMA 4372. *Să se găsească numărul de două cifre al cărui patrat şi cub coprind, la un loc, toate cifrele, luate o singură dată.*

MAIOR I. LINTEŞ.

Pentru ca N^2 şi N^3 să cuprindă toate cifrele, luate o singură dată, va trebui să avem:

$$46 < N < 100.$$

1) Eliminăm numerile cari se termină cu *0, 1, 5* şi *6*, cari se repetă şi la patrat şi la cub.

2) Pentru ca N^2 şi N^3 să înceapă cu aceeaşi cifră, va trebui să avem condiţiile:

$$10\cdot\sqrt{10\cdot\alpha} \leqslant N < 10\cdot\sqrt{10\cdot(\alpha+1)}$$

şi

$$10\cdot\sqrt[3]{100\cdot\alpha} \leqslant N < 10\cdot\sqrt[3]{100\cdot(\alpha+1)}$$

α fiind prima cifră cu care încep ambele numere.

Rezultă dar că va trebui să eliminăm şi numerele:

89, 93, 94, 97, 98 şi 99.

3) Pentru ca N^2 să înceapă cu aceeaşi cifră cu care se termină N^3, analog vom deduce că N va trebui să aibă valorile:

48, 57, 64, 75, 76, 92, 99

pe cari le vom elimina.

4) Pentru ca N^2 să se termine cu cifra cu care începe N^3, va trebui ca N să aibă valorile:

49, 51, 78, 86, 97, 99

pe care iarăşi le vom elimina.

5) Pentru ca N^2 să aibă forma $\alpha\alpha ab$, va trebui ca N să aibă valorile:

34, 47, 58, 67, 88, 94

pe care le vom elimina.

6) Pentru ca N^3 să aibă forma $\alpha\alpha abcd$ sau $abcd\alpha\alpha$, va trebui ca N să ia respectiv valorile:

48, 49, 61, 82, 92, 96

şi

71, 77, 64, 53, 92, 99.

7) Servindu-ne de tabelul ultimelor trei sau patru cifre cu care se termină un patrat perfect («G. M.» XXXIII, 138 şi XXXV, 134) mai eliminăm pe acele al căror patrat cuprinde de două sau trei ori aceeaşi cifră.

* * *

Cu aceasta, după eliminare, ne mai rămâne pentru N valorile:

52, 54, 59, 69, 72, 73, 74, 79, 84, 87.

Ridicând la cub aceste numere observăm că vom avea două cifre identice pentru:

52, 54, 72, 79, 87.

Apoi dintre numerele rămase, ridicându-le la cub şi la patrat, vedem că satisface enunţului numai: **69**, căci:

$$69^2 = 4761 \text{ şi } 69^3 = 328509.$$

Au rezolvat problema făcând mai puţine eliminări D-nii: M. AMĂRĂŞTEANU, V. CEAUŞESCU, P. DOBRESCU, P. MAZILU, D. MAVRODIN şi I. ŢIŢEICA.

I. L.

EXERCIŢII

14. Suma cuburilor a şase numere consecutive este divizibilă prin suma acestor numere.

M. I. PREDOESCU.

R. Fie x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$, şi $x+5$ cele şase numere consecutive.

Trebue arătat că:

$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+(x+3)^3+(x+4)^3+(x+5)^3 = \text{Mult}\,(6x+15)$

pentru aceasta efectuând puterile şi strângând termenii asemenea avem:

$(6x^3+45x^2+125x+225) : (6x+15) = x^2+5x+15.$ c. c. t. v.

Pentru $x = 0, 1, 2, 3$ şi 4 avem problema 1225 din „R. M. T.".

PROBLEME PROPUSE

4045 [1]). Se consideră o foaie dreptunghiulară ABCD de hârtie (vârfurile A şi C sunt opuse). Vârfurile B şi C rămânând fixe, se îndoaie foaia de hârtie astfel încât vârful A să vină într'un punct oarecare A′ de pe latura CD. Vârful D va ocupa poziţia D′; intersecţiile respective ale liniei de îndoire cu laturile AB şi CD se vor nota cu M şi N. Să se arate:

1. Că dreptele AD, MN, A′D′ sunt concurente.

2. Punctul A′ fiind presupus variabil pe dreapta CD (prelungită indefinit), să se afle înfăşurătorile dreptelor A′M, MN, ND′.

3. Se scoboară perpendiculara A′B′ pe latura AB. Pentru care poziţie a punctului A′, pentagonul A′B′MND′ are cel mai mare număr de laturi egale? Să se calculeze unghiurile pentagonului astfel obţinut.

Se vor da soluţii geometrice.

MIRON NICOLESCU.

4439. Cu ce cifre nu se pot termina sumele a două bipatrate?

I. IONESCU.

4440. Care e cel mai mic cub care se termină cu 659659?

V. THÉBAULT.

1) Enunţ rectificat.

4441. Să se găsească forma generală a cuburilor care se termină prin cubul ultimei cifre a rădăcinii cubice respective.

Să se înlocuiască cubul prin o altă putere.

M. GHERMĂNESCU.

4442. a, b, c fiind trei numere întregi şi pozitive, să se rezolve în numere întregi şi pozitive sistemul

$$x + a = x(a - y)\ ,\ y + b = y(b - z)\ ,\ z + c = z(c - x).$$

TIBERIU POPOVICIU.

4443. Intr'un patrulater inscriptibil ABCD avem relaţiile

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{AM} + \overline{AD}\cdot\overline{BM}}{\overline{BC}\cdot\overline{DM} + \overline{AD}\cdot\overline{CM}}\ ;\ \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CD}\cdot\overline{BM} + \overline{AB}\cdot\overline{BM}}{\overline{CD}\cdot\overline{AM} + \overline{AB}\cdot\overline{DM}}$$

unde punctul M este intersecţia diagonalelor.

AVRAM N. CONSTANTIN.

4444. In trapezul ABCD, cu bazele paralele AD şi BC, se ia pe latura AB un punct oarecare M. Paralela dusă prin A la CD întâlneşte dreapta MC în N, iar paralela dusă prin B la CD întâlneşte dreapta MD în P. Să se arate că:

1°. Suma $\overline{AN} + \overline{BP}$ este constantă, oricare ar fi M pe AB.

2°. Paralelele duse prin A şi B, respectiv dreptelor MC şi MD, se întâlnesc într'un punct pe dreapta CD.

N. BOTEA.

4445. Fie M, N două puncte reciproce în raport cu triunghiul de referinţă ABC şi $M_a M_b M_c$, $N_a N_b N_c$ triunghiurile formate prin intersecţia laturilor triunghiului ABC cu paralelele duse prin M, N la medianele corespunzătoare.

Laturile respective ale triunghiurilor $M_a M_b M_c$ şi $N_a N_b N_c$, întâlnindu-se, formează un triunghiu omologic cu ABC, centrul de omologie fiind la infinit.

CONST. IONESCU BUJOR.

4446. Fie A' şi A" respectiv picioarele înălţimei şi bisectoarei vârfului A dintr'un triunghiu ABC. Din A_1 mijlocul segmentului A'A" se scoboară perpendiculare respectiv pe AC şi AB în M şi N. Să se găsească condiţiunea ca M să fie mijlocul lui AC. La ce condiţie trebuie să satisfacă laturile b şi c, ca un astfel de triunghiu să existe?

Laturile b şi c fiind date, câte triunghiuri putem construi cu ele? Să se arate că în acest caz avem relaţia

$$\tfrac{1}{2}c - \overline{BN} = \frac{(b-c)\,[a^2+(b+c)^2]}{4c\,(b+c)}\,.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

4447. Să se elimine $x, y, z,$ din următoarele trei ecuaţiuni:

$$\frac{\sqrt{x-y}}{x-y} + \frac{\sqrt{x-z}}{x-z} = A$$

$$\frac{\sqrt{y-z}}{y-z} + \frac{\sqrt{y-x}}{y-x} = B$$

$$\frac{\sqrt{z-x}}{z-x} + \frac{\sqrt{z-y}}{z-y} = C.$$

Să se generalizeze. GH. VASILIU.

4448. Să se demonstreze că determinantul

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} - \sin\alpha_3\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} & \cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} - \cos\alpha_3\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} & \sin\frac{2\alpha_3-\alpha_1-\alpha_2}{2} \\ \sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2} - \sin\alpha_1\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2} & \cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2} - \cos\alpha_1\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2} & \sin\frac{2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}{2} \\ \sin\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2} - \sin\alpha_2\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2} & \cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2} - \cos\alpha_2\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2} & \sin\frac{2\alpha_2-\alpha_3-\alpha_1}{2} \end{vmatrix}$$

este nul oricare ar fi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. COL. GH. BUICLIU.

4449. Să se demonstreze că dreapta lui EULER a triunghiului ABC este normală la curba

$$\alpha^2 + 2\beta\gamma - 3R^2 = 0$$

în care $\overline{MA} = \alpha$, $MB = \beta$; $\overline{MC} = \gamma$, M fiind un punct al curbei, iar R raza cercului circumscris triunghiului dat ABC.

M. NICOLAU.

4450. Cât ar cântări pe Neptun un corp care pe Marte cântăreşte 50 kgr?

AL. A. ROŞU.

Rectificare. La problema 4418 Vol. XL, pag. 47 se va suprima π^2.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu F. M. (4296, 317, 18, 34, 75, 92, 403, 10, 23); *Avram N. Const. Subloc.* (4408); *Boborodea I.* (4373); *Boiangiu I. Gh.* (4261, 392, 419); *Boitan P. N.* (4418); *Ceauşescu V.* (4273); *Chiriac I. C.* (4392, 410); *Cocea Th.* (P); *Cseke W.* (4432, 34); *Dobrescu A.* (4418, 19); *Dobrescu D. P.* (4397); *Gavrilescu C.* (4373); *Georgescu C.* (P); *Grigorescu V.* (4386, 429, 33, 34); *Ivănescu C.* (A, N, P); *Lebădă D.* (4325, 53, 94, A); *Măgala I. G.* (4418); *Mănac M.* (4317, 92, 432, 34); *Margulius M.* (4273, 312, 17, 25, 53, 64, 74, 408, 19, 32); *Mavrodin D. D.* (4410, 33, 34, 36); *Mazilu C. P.* (4161, 305, 69, 82, 409); *Mihăilescu Gh.* (4419); *Mihalcea Oct.* (4394); *Năstase M.* (4353); *Negrea A. M. L.* (4300, 12, 410, 24, 33, 34, 35, 36); *Petrescu C. O.* (4410); *Petrescu I. I.* (4187, 409); *Postelnicu M. C.* (4345); *Predoescu I. M.* (4394); *Roman I. N.* (4418); *Rotaru Gh.* (4418); *Runceanu C.* (4418); *Şabac Gh. I.* (4215, 54, 96, 367, 83); *Sager N. I.* (4312, 67, 86, 419, 24); *Savovici F.* (4418); *Stănciulescu Gh.* (4418); *Stoicescu T.* (4279, 305, 88, P); *Ţiţeica I. I.* (4318, E); *Vusatiuc D. M.* (4418).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XL

NUMĂRUL 4. — DECEMVRIE 1934

SUMARUL

1. Sur les bissectrices du triangle . . . *V. Thébault*
2. Cărţi vechi de matematică . . . . . *I. Ionescu*
3. Câţiva determinanţi . . . . . *Nicolae Ciorănescu*
4. Asupra mediilor aritmetice şi geometrice . . . . . *Tiberiu Popoviciu*
5. O problemă de calculul variaţiunilor *D. Georgescu*
6. Asupra teoremei lui Salmon . . . *Lt. Mihail I. Focşeneanu*
7. Premiul „Inginer H. Capriel".
8. Premiul „Inginer Al. Roşu".
9. Note matematice: 18 — 21.
10. Bibliografie.
11. Cereri: 242.
12. Diverse.
13. Probleme rezolvate: 3354, 3356, 3450, 4161, 4244, 4296, 4392, 4397.
14. Exerciţii: 15 — 17.
15. Probleme propuse: 4451 — 4462.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1934

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 27, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 65, 66, 68, 70, 76, 80, 84, 89, 90, 91, 93, 95, 96, 98, 99, 400, 01, 04, 05, 06, 12, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 38, 40, 41, 42, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

SUR LES BISSECTRICES DU TRIANGLE

Soient un triangle ABC, (BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$); Q_a, Q_b, Q_c les pieds des bissectrices intérieures; (O) le cercle circonscrit de rayon R; (I), (I_a), (I_b), (I_c) les cercles tritangents de rayons r, r_a, r_b, r_c; φ, φ_a, φ_b, φ_c les points de FEUERBACH. Posons $\overline{OI} = d$, $\overline{OI_a} = d_a$, $\overline{OI_b} = d_b$, $\overline{OI_c} = d_c$.

1. La formule

$$Q_b\overline{Q_c^2} = \frac{abc}{(c+a)^2\,(a+b)^2}\,|\,abc + 8p\,(p-b)\,(p-c)\,| \qquad (1)$$

et ses analogues pour $Q_c\overline{Q_a^2}$; $Q_a\overline{Q_b^2}$, que nous avons données dans un précédent article [1]), conduisent aux suivantes:

$$\begin{aligned} Q_b\,Q_c &= \frac{4S}{(c+a)\,(a+b)}\sqrt{R\,(R+2r_a)} \\ Q_c\,Q_a &= \frac{4S}{(a+b)\,(b+c)}\sqrt{R\,(R+2r_b)} \qquad (2) \\ Q_a\,Q_b &= \frac{4S}{(b+c)\,(c+a)}\sqrt{R\,(R+2r_c)}\,. \end{aligned}$$

2. La relation de DOSTOR

$$S_1 = \frac{2abc\,S}{(b+c)\,(c+a)\,(a+b)}, \qquad (3)$$

que nous avons rappelée [2]), et qui exprime l'aire S_1 du triangle $Q_a\,Q_b\,Q_c$, combinée avec les relation (2), donne les valeurs suivantes des hauteurs h'_a, h'_b, h'_c, du triangle $Q_a\,Q_b\,Q_c$

$$\begin{aligned} h'_a &= \frac{abc}{(b+c)\,d_a} = \frac{4S}{b+c}\sqrt{\frac{R}{R+2r_a}} \\ h'_b &= \frac{abc}{(c+a)\,d_b} = \frac{4S}{c+a}\sqrt{\frac{R}{R+2r_b}} \qquad (4) \\ h'_c &= \frac{abc}{(a+b)\,d_c} = \frac{4S}{a+b}\sqrt{\frac{R}{R+2r_c}}\,. \end{aligned}$$

1) G. M. 1934 p.
2) G. M. 1934 — 482.

De plus, R_1 étant le rayon du cercle circonscrit au triangle $Q_a Q_b Q_c$, la formule

$$R_1 = \frac{Q_b Q_c \cdot Q_c Q_a \cdot Q_a Q_b}{4S_1}$$

donne, en vertu de (2) et (3).

$$R_1 = \frac{2S}{R} \cdot \frac{d_a d_b d_c}{(b+c)(c+a)(a+b)} . \tag{5}$$

Enfin, si r', r'_a, r'_b, r'_c désignent les rayons des cercles tritangents du triangle $Q_a Q_b Q_c$, la relation classique

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{h'_a} + \frac{1}{h'_b} + \frac{1}{h'_c},$$

et ses analogues pour r'_a, r'_b, r'_c, conduisent aux suivantes:

$$\begin{aligned}
r' &= \frac{abc}{(b+c)\,d_a + (c+a)\,d_b + (a+b)\,d_c} \\
r'_a &= \frac{abc}{-(b+c)\,d_a + (c+a)\,d_b + (a+b)d_c} \\
r'_b &= \frac{abc}{(b+c)\,d_a - (c+a)\,d_b + (a+b)\,d_c} \\
r'_c &= \frac{abc}{(b+c)\,d_a + (c+a)\,d_b - (a+b)\,d_c} .
\end{aligned} \tag{6}$$

3. Les distances Δ_a, Δ_b, Δ_c du centre O du cercle circonscrit au triangle fondamental aux droites $Q_b Q_c$, $Q_c Q_a$, $Q_a Q_b$, ont été données par J. NEUBERG [1]). On a

$$\begin{aligned}
\Delta_a &= (R - r_a)\sqrt{\frac{R}{R+2r_a}} = \frac{R(R-r_a)}{d_a} \\
\Delta_b &= (R - r_b)\sqrt{\frac{R}{R+2r_b}} = \frac{R(R-r_b)}{d_b} \\
\Delta_c &= (R - r_c)\sqrt{\frac{R}{R+2r_c}} = \frac{R(R-r_c)}{d_c} .
\end{aligned} \tag{7}$$

1) *Mathesis*, 1882 — 111.

N. B. Les droites OI_a, OI_b, OI_c sont perpendiculaires sur $Q_b Q_c$, $Q_c Q_a$, $Q_a Q_b$.

Si, dans un triangle, $R = r_a$, par exemple, le centre O du cercle circonscrit est sur la droite $Q_b Q_c$ qui joint les pieds de deux bissectrices intérieures [1]).

4. Les distances δ_a, δ_b, δ_c du centre I du cercle inscrit aux côtés du triangle $Q_a Q_b Q_c$ s'obtiennent en considérant, par exemple, l'expression

$$\Sigma = \tfrac{1}{2} IQ_b \cdot IQ_c \sin Q_b I Q_c = -\tfrac{1}{2} IQ_b \cdot IQ_c \cos \tfrac{1}{2} A,$$

de l'aire du triangle $Q_b I Q_c$, dans laquelle

$$IQ_b = \frac{b}{c+a}\sqrt{\frac{(p-b)ca}{p}}, \quad IQ_c = \frac{c}{a+b}\sqrt{\frac{(p-c)ab}{p}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

On trouve

$$\delta_a = -r\sqrt{\frac{R}{R+2r_a}}, \tag{8}$$

et, par analogie,

$$\delta_b = -r\sqrt{\frac{R}{R+2r_b}}, \quad \delta_c = -r\sqrt{\frac{R}{R+2r_c}}, \tag{8}$$

puis cette relation

$$d_a \delta_a = d_b \delta_b = d_c \delta_c = -Rr. \tag{9}$$

5. La formule

$$\varphi_b \varphi_c^2 = \frac{R^2 (b+c)^2}{(R+2r_b)(R+2r_c)},$$

et ses analogues pour $\varphi_c \bar{\varphi}_a^2$, $\varphi_a \bar{\varphi}_b^2$, que nous avons obtenues [2]),

---

1) V. THÉBAULT, *Mathesis* 1922 — 206.

2) *Mathesis* 1922 — 118.

permettent d'écrire cette expression de l'aire Σ_1 du triangle $\varphi_a\varphi_b\varphi_c$:

$$\Sigma_1 = \frac{R^2(b+c)(c+a)(a+b)}{2(R+2r_a)(R+2r_b)(R+2r_c)} . \qquad (10)$$

Dès lors, en vertu de (3) et (10), on obtient cette relation entre les aires des triangles ABC, $Q_aQ_bQ_c$, $\varphi_a\varphi_b\varphi_c$,

$$\frac{S_1 \cdot \Sigma_1}{S^2} = \left| \frac{2R^2}{d_a d_b d_c} \right|^2 . \qquad (11)$$

N. B. Les relations qui précédent peuvent être étendues aux distances qui séparent les pieds de deux bissectrices extérieures ou ceux d'une bissectrice intérieure et d'une bissectrice extérieure ainsi qu'aux triangles ayant pour sommets le pied d'une bissectrice intérieure et les pieds des bissectrices extérieures des deux autres sommets.

V. THÉBAULT.
Le Mans (France).

CĂRȚI VECHI DE MATEMATICĂ

(A se vedea *Gazeta Matematică,* Anul XL pag. 52).

O altă carte din Biblioteca D-lui Inginer D. LEONIDA, este o algebră apărută în prima jumătate a Secolului XVIII, întitulată :

«Stern und Kern | der | **Algebrae** | anzeigend | wie nicht allein die gemeinen, sondern auch | die *binomi*schen und *polynomi*schen Wurzeln, | aus denen niedrigen und höhern *Aequation*en, vermittelst | einer *demonstr*irten *general-Regul* auf eine ganz | neue und leichte Weise heraus zu | ziehen | ; desgleichen | wie alle figürliche, flache und cörperliche Zah | len, und deren unendliche *Aggregata* nach einer | bewiesenen *Universal-Regul* können berechnet, | und *cos*sische *Bilanc*en darauf | *formi*reterden, | Nebst kurtzer doch gnugsamer *Solucion* | der Beschluss-Aufgabe | des **Arithmetischen Kunst-Spiegels.** | Dem *Publico* zum Dienst | das andere mahl aufgeleget, | und um ein ziemliches vermehrt | und verneuert von | HEINRICH MEISSNERN, | weyl. gewesenem Schreib-Rechen-und Ober-Meister der | *St. Jacobi* Kirchen-Schule in Hamburg. | Hamburg. | bey Michael Ludolph Völckers, in *St. Nicolai* Kirche».

In fața paginei cu titlul acesta este alăturatul portret al autorului făcut la 1740.

Cartea are pagini de formatul 75 × 145 mm, partea tipărită; ea are o prefață de 12 pagini nenumerotate, o introducere de 32 pagini numerotate cu cifre romane și 520 pagini de text. Prefața

acestei ediții (a doua) este datată 29 Martie 1740. Acolo vorbește de științe, de matematici, de matematicianii ARCHIMEDE, LEIBNIZ, NEWTON, vorbește de Societatea „*Kunst-Rechnungs-übenden Gesellschaft*“ întemeiată la 1690, din care făcea parte. (A se vedea *Nota Matematică* No. 29, Anul XXXIX, pag. 29).

Din introducere pare a reeşi că prima ediţie a cărţii a apărut la 1692. Autorul face un istoric al publicaţiunilor sale matematice şi al Algebrei de care ne ocupăm. Spune că la alcătuirea ei a avut în vedere maxima: *„Wer im Richten will bestehen, Sol vorher dem Grund besehen"*. Intreaga matematică are la bază *Aritmetica,* care are ca chintezenţă *Algebra* sau *Aritmetica Filosofică;* celelalte ramuri fiind *Geometria, Cosmografia, Uranoscopia,* la care se ataşează *Sferica, Theorica, Chronologia, Astrologia;* apoi *Geografia, Architectonica, Muzica, Optica, Statica.* In introducere dă diverse demonstraţiuni teoremei lui PITAGORA, dă problema mediei şi extremei raţii; dă apoi câteva probleme de aritmetică şi o listă a membrilor Societăţii de care am vorbit mai sus.

Algebra începe cu întrebarea: *„Ce este Coss sau la ce servă calculul algebric?* Prin *coss* se înţelegea pe atunci în multe locuri *„Algebra"*, numirea venind dela italianul *cosa* cu care se numiau necunoscutele. A doua întrebare este următoarea: *Aşi ţine să ştiu procedeurile sau mânuirea acestei ştiinţe.* In a treia întrebare cititorul cere să i se spună ce cuprinde algebra?

Partea întâia este **Numeratio** sau *Algebra numerosa.* Se arată semnele cu care se notează exponenţii de azi. Primul semn este ℟ (un R tăiat) numit *Radix,* un *z* german este *Zensus,* un C german caligrafic este *Cubus.*, etc. Introducerea literilor în calcule duce la *Algebra speciosa.* Se studiază apoi operaţiunile *Additio, Substractio, Multiplicatio, Divisio, Extractio,* (rădăcini patrate şi cubice), *Surd. Species* (radicale). Această din urmă chestiune are o desvoltare foarte întinsă. Dela pag. 125 înainte se începe cu *Reductio Aequationum,* ocupându-se de ecuaţiile de primele trei grade şi de cele bipatrate. Expunerea şi calculele sunt greoaie.

La pag. 221 se începe tratarea numerelor prime, *incompositi,* cu o tabelă până la 10000. Urmează descompunerea numerelor în factori primi. Aceste teorii se aplică la reducerea ecuaţiilor. Astfel rezolvă ecuaţia:

$$1\,C \div 1\,z \div 23\ ℟\ \text{gl.}\,0. \qquad (\text{gl} = \textit{gleich},\ \text{egal})$$

care se scrie azi:

$$x^3 - x^2 - 23\,x + 35 = 0.$$

Cu căutarea rădăcinilor ecuaţiilor autorul merge departe. Pe poarta unei uşi, el scrisese: *„Der Meister, so bewohnt diess Haus, Der zieht hie die Wurzeln aus:"*

$1 . x^{10} \div 28x^9 + 341x^8 \div 2368x^7$

$+ 10322x^6 \div 29272x^5 + 54082x^4 \div 63264x^3$

$43818xx \div 15648x + 2022$ gl. 0.

Dela pag. 298 începe *aritmetica figurata,* unde se ocupă pe larg de numerele poligonale, mergând până la cel de rangul 100000 numit *Centmill-Angular* sau *Decakismyriagonal!* Se ocupă de numerele central-poligonale; de cele piramidale, columnare, pirgoidale; apoi tetraedrale, hexaedrale, octoedrale, dodecaedrale, icosaedrale. Cu chestiuni de această natură se merge până la pag. 484. Mai dă unele probleme şi încheie Algebra cu cuvinte din Psalmul 115: *„Nicht uns Herr, sonder dir allein, Soll Ruhm, Preiss, Lob und Ehre seyn“.*

I. IONESCU.

CÂŢIVA DETERMINANŢI

1. In articolul de faţă voi arăta cum se poate obţine, în mod unitar valoarea câtorva determinanţi strâns legaţi de determinantul VANDERMONDE.

Fie $V_{n+1}(\alpha_0 , \alpha_1 , \ldots , \alpha_n)$ determinantul VANDERMONDE al numerilor $\alpha_0 , \alpha_1 , \ldots \alpha_n$. Se ştie că:

(1) $V_{n+1}(\alpha_0 , \alpha_1 , \ldots \alpha_n) = \Pi (\alpha_k - \alpha_i)$ $(k > i : i, k = 0,1,\ldots,n)$ produsul conţinând prin urmare C_{n+1}^2 factori.

Să ne propunem să calculăm determinantul:

$$(2)\quad \Delta_{n+1}^n = \begin{vmatrix} (x_0-a_0)^n & (x_0-a_1)^n \ldots (x_0-a_n)^n \\ (x_1-a_0)^n & (x_1-a_1)^n \ldots (x_1-a_n)^n \\ \vdots & \vdots \\ (x_n-a_0)^n & (x_n-a_1)^n \ldots (x_n-a_n)^n \end{vmatrix} = \| (x_i : -a_k)^n \| .$$

Zic că:

$$(3)\quad \Delta_{n+1}^n = k_n V_{n+1}(a_0 , a_1 , \ldots a_n) V_{n+1}(x_0 , x_1 , \ldots x_n).$$

In adevăr, Δ_{n+1}^n este un polinom omogen în a_k şi x_i de grad $n(n+1)$. Pe de altă parte Δ_{n+1}^n se anulează dacă facem $x_k = x_i$ sau $a_s = a_r$. Prin urmare el conţine factorii de forma $x_k - x_i$ şi $a_s - a_r$, şi cum produsul tuturor factorilor de această formă dau un polinom de grad $n(n+1)$, rezultă că factorul k_n este o constantă independentă de x_i sau a_k.

Putem găsi valoarea constantei observând că :

$$\Delta_{n+1}^{n} = \| x_i^j \| \cdot \| (-1)^j C_n^j a_k^{n-j} \|.$$

Dar valoarea ultimului determinant din produs este

$$C_n^1 C_n^2 \ldots C_n^{n-1} V_{n+1}(a_0, a_1, \ldots a_n).$$

Prin urmare :

$$(4) \qquad k_n = C_n^1 C_n^2 \ldots C_n^{n-1} = \frac{(n!)^{n-1}}{[1!\ 2! \ldots (n-1)!]^2}$$

Dacă în determinantul Δ_{n+1}^{n} schimbăm semnele câtimilor a_i obţinem :

$$(5) \quad D_{n+1}^{n} = \| (x_i + a_k)^n \| =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} k_n V_{n+1}(a_0, \ldots a_n) V_{n+1}(x_0, \ldots x_n).$$

Un caz particular interesant al acestor doi determinanţi, se obţine făcând $x_i = a_i$. Obţinem atunci, de ex. din Δ_{n+1}, pătratul unui determinant VANDERMONDE sub forma :

$$(6) \quad C_n^1 C_n^2 \ldots C_n^{n-1} V_{n+1}^2(a_0, a_1, \ldots a_n)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & (a_0 - a_1)^n & (a_0 - a_2)^n \ldots (a_0 - a_n)^n \\ (a_1 - a_0)^n & 0 & (a_1 - a_2)^n \ldots (a_1 - a_n)^n \\ (a_2 - a_0)^n & (a_2 - a_1)^n & 0 \quad \ldots (a_2 - a_n)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ (a_n - a_0)^n & (a_n - a_1)^n & (a_n - a_2)^n \ldots 0 \end{vmatrix}.$$

Dacă $a_0, a_1, \ldots a_n$ sunt rădăcinile unei ecuaţii algebrice de gradul $n + 1$, avem în (6) o altă formă, în afară de un factor numeric, a discriminantului acelei ecuaţii.

Determinanţii (2) şi (6) sunt simetrici dacă n este par, simetrici strâmbi dacă n este impar.

2. Prin operaţii de derivare se pot obţine din Δ_{n+1} sau din determinantul (5) alţi determinanţi. Iată câteva cazuri simple :

a) Avem că :

$$\frac{\partial^n V_{n+1}(x_0, x_1, \ldots x_n)}{\partial x_0^n} = (-1)^n n!\, V_n(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Să derivăm atunci relația (3) de n ori în raport cu x_0 și de n ori în raport cu a_0. Obținem astfel:

$$(7)\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (x_1-a_1)^n & (x_1-a_2)^n & \dots & (x_1-a_n)^n \\ 1 & (x_2-a_1)^n & (x_2-a_2)^n & \dots & (x_2-a_n)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (x_n-a_1)^n & (x_n-a_2)^n & \dots & (x_n-a_n)^n \end{vmatrix} = (-1)^n k_n V_n(a_1, \dots a_n)\, V_n(x_1, \dots x_n).$$

Sau dacă punem pe $k_{n-1} V_n(a_1, \dots a_n)\, V_n(x_1, \dots x_n)$ sub forma unui determinant de ordinul n, ca în (2), avem atunci relația următoare:

$$(7')\quad n! \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (x_1-a_1)^n & (x_1-a_2)^n & \dots & (x_1-a_n)^n \\ 1 & (x_2-a_1)^n & (x_2-a_2)^n & \dots & (x_2-a_n)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (x_n-a_1)^n & (x_n-a_2)^n & \dots & (x_n-a_n)^n \end{vmatrix}$$

$$= (-n)^n \begin{vmatrix} (x_1-a_1)^{n-1} & (x_1-a_2)^{n-1} & \dots & (x_1-a_n)^{n-1} \\ (x_2-a_1)^{n-1} & (x_2-a_2)^{n-1} & \dots & (x_2-a_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n-a_1)^{n-1} & (x_n-a_2)^{n-1} & \dots & (x_n-a_n)^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Putem deriva relația (7) sau (7') de $n-1$ ori în raport cu x_1 și de $n-1$ ori în raport cu a_1, obținând astfel valoarea unui alt determinant de ordinul $n+1$, exprimat cu $V_{n-1}(a_2, \dots a_n)\, V_{n-1}(x_2, \dots x_n)$.

b) Este evident că:

$$\frac{\partial^m V_{n+1}(x_0, x_1, \dots x_n)}{\partial x_0^{\alpha_0}\, \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = 0$$

dacă $\alpha_i \neq 0$. ($m = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ deci $\geqslant n+1$).

Rezultă atunci din (3) că determinantul:

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} (x_0-a_0)^{m_0} & (x_0-a_1)^{m_0} & \dots & (x_0-a_n)^{m_0} \\ (x_1-a_0)^{m_1} & (x_1-a_1)^{m_1} & \dots & (x_1-a_n)^{m_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n-a_0)^{m_n} & (x_n-a_1)^{m_n} & \dots & (x_n-a_n)^{m_n} \end{vmatrix} = 0$$

dacă întregii m_p sunt $< n$, oricare ar fi x_i şi a_k.

Se poate obţine un determinant analog derivând în raport şi cu a_i. Demonstraţia directă se face imediat de altfel observând că în raport cu a_0 de ex. acest determinant este un polinom de grad $\leqslant n-1$ care se anulează pentru $a_0 = a_1$, $a_0 = a_2$, ... $a_0 = a_n$.

c) Este uşor de văzut că:

$$\frac{\partial^{\frac{n(n+1)}{2}} V_{n+1}(x_0, x_1 \dots x_n)}{\partial x_0^n \, \partial x_1^{n-1} \dots \partial x_{n-1}} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} 1!\,2!\,3! \dots n!$$

Derivând atunci relaţia (5) de n ori în raport cu x_0, de $n-1$ ori în raport cu x_1, ... de $n-p$ ori în raport cu x_p, şi suprimând factorii constanţi ce introduce derivarea, avem pentru determinantul VANDERMONDE de ordinul $n+1$, o expresie ce conţine n câtimi arbitrare, n *„elemente moarte“* ce nu influenţează valoarea determinantului:

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+a_0 & x_1+a_1 & \dots & x_1+a_n \\ (x_2+a_0)^2 & (x_2+a_1)^2 & \dots & (x_2+a_n)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n+a_0)^n & (x_n+a_1)^n & \dots & (x_n+a_n)^n \end{vmatrix} = V_{n+1}(a_0, a_1 \dots a_n).$$

Un caz particular al acestui determinant [1]) se obţine făcând

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = x \text{ iar } a_0 = 0.$$

1) A fost considerat de MALTEZOS K. Bulletin de la Soc. Math, de Grèce t. 13 No. p. 24. Citez după Zentralblatt für Mathematik 6 Band Hf 3. 1933 p. 99: Über eine merkwürdige Determinant. Valoarea dată în acest referat, care nu ştiu de-i şi cea dată de autor este greşită. [Se dă ca valoare: $1!\,2! \dots n!$ Valoarea sa este cum se vede: $V_{n+1}(0, a_1, a_2, \dots a_n)$].

Determinantul precedent poate să fie sursa şi a altor determinanţi remarcabili. Mai consider numai un exemplu: Să facem în (9) $x_1 = -a_1$, $x_2 = -a_2$, . . . $x_n = -a_n$.

Avem:

$$(10)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_0 - a_1 & 0 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ (a_0 - a_2)^2 & (a_1 - a_2)^2 & 0 & \dots & (a_n - a_1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_0 - a_n)^n & (a_1 - a_n)^2 & (a_2 - a_n)^n & \dots & 0 \end{vmatrix} = V_{n+1}(a_0 , a_1 , , . . a_n) .$$

care-i o altă formă sub care putem pune determinantul VANDERMONDE a $n + 1$ mărimi.

Iată câteva din consecinţele ce se pot trage din relaţiile (3) şi (4). Intr'un articol viitor ne propunem să calculăm alţi determinanţi analogi, însă mai puţin simpli.

NICOLAE CIORĂNESCU.

ASUPRA MEDIILOR ARITMETICE ŞI GEOMETRICE

1. Fie a_1 , a_2 , . . . , a_n n numere pozitive, A media lor aritmetică şi G cea geometrică. Se ştie că $A \geqslant G$ egalitatea neputând avea loc decât dacă toate numerile a_i sunt egale. Cu alte cuvinte raportul $\frac{A}{G}$ are un minimum egal cu 1 care nu poate fi atins decât dacă toate numerile a_i sunt egale.

Să presupunem acum că numerile a_i rămân cuprinse (în sens larg) între două numere pozitive a şi b. Atunci raportul $\frac{A}{G}$ are un maximum pozitiv, căci putem scrie

$$\frac{A}{G} \leqslant \text{max.} \left(\frac{a}{b} , \frac{b}{a} \right) .$$

Acest maximum este o funcție de a și b și se vede ușor, prin considerațiuni de continuitate, că e neapărat atins de cel puțin un sistem de valori date numerilor a_i.

Ne propunem a determina acest maximum.

2. Pentru fixarea ideilor să presupunem că $a < b$. Să presupunem că am avea $a < a_1 \leqslant a_2 < b$. Să lăsăm pe $a_3, a_4, \ldots, a_n$ neschimbați, iar pe a_1, a_2 să-i înlocuim prin $a_1 - c$, $a_2 + c$, c fiind un număr pozitiv mai mic decât *min.* $(b - a_2, a_1 - a)$. Fie A_1 noua medie aritmetică și G_1 noua medie geometrică, vom avea $A_1 = A$ și $G_1 < G$, de unde $\frac{A_1}{G_1} > \frac{A}{G}$. Putem dar enunța proprietatea:

Maximul nu poate fi atins pentru un sistem de numere a_i dintre cari doi cel puțin sunt în interiorul (în sens strict) *intervalului (a, b).*

Maximul este deci de căutat printre valorile lui $\frac{A}{G}$ ce se obțin luând

$$A = \frac{ka + (n - k - 1)\, b + x}{n}, \quad G = \sqrt[n]{a^k\, b^{n-k-1}\, x}, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Raportul $\frac{A}{G}$, afară de un factor independent de a și b, devine

$$\frac{ka + (n - k - 1)\, b}{\lambda} + \lambda^{n-1} \qquad \lambda = \sqrt[n]{x}.$$

Luând derivata a doua, se vede imediat că această funcție de λ este *convexă* pentru $\lambda > 0$, deci maximul ei va fi atins pentru una din valorile $x = a$ sau $x = b$. Prin urmare:

Maximul nu poate fi atins decât dacă toate numerile a sunt egale cu a sau b.

3. Să ridicăm acum restricțiune $a < b$ (o facem pentru a avea mai multă simetrie în rezultate) și să punem

$$R_k = \frac{ka + (n - k)\, b}{n \sqrt[n]{a^k\, b^{n-k}}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

dintre cari putem suprima pe R_0, și R_n.

Avem făcând calculele

$$R_k - R_{k+1} = \frac{1}{n\,\rho^{k+1}}\left[k\,\rho^{n+1} - (k+1)\,\rho^n + (n-k)\,\rho - (n-k-1)\right]$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-2$$

unde am pus $$\rho = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,.$$

Ecuația

$$g_k(\rho) = k\,\rho^{n+1} - (k+1)\,\rho^n + (n-k)\,\rho - (n-k-1)$$

are rădăcina dublă 1 şi încă o rădăcină pozitivă ϑ_k. Avem deci

$$R_k - R_{k+1} \gtrless 0 \quad \text{după cum} \quad \rho \gtrless \vartheta_k\,.$$

4. Avem

$$g_k(\rho) - g_{k+1}(\rho) = \rho^{n+1} - \rho^n - \rho + 1 = (\rho - 1)(\rho^n - 1 \geqslant 0,\ \rho > 0$$

deci $\vartheta_k \leqslant \vartheta_{k-1}$, egalitatea nefiind posibilă decât dacă $\vartheta_{k-1} = \vartheta_k = 1$ ceeace atrage după sine n impar şi $k = \dfrac{n-1}{2}$. Avem prin urmare

$$\vartheta_{n-2} < \vartheta_{n-3} < \ldots < \vartheta_2 < \vartheta_1$$

şi

$$\vartheta_{\frac{n-1}{2}} = \vartheta_{\frac{n-3}{2}}$$

dacă n este impar.

Punând $\vartheta^n_{k=\alpha_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n-2$ şi $\alpha_0 = \infty$, $\alpha_{n-1} = 0$ avem

$$\alpha_{n-1} < \alpha_{n-2} \ldots < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_0$$

şi deci din cele ce preced rezultă că

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ fiind n numere cuprinse între numerile pozitive a şi b avem

$$1 \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \leqslant \frac{k\,a + (n-k)\,b}{n\sqrt[n]{a^k\,b^{n-k}}}$$

unde k este determinat astfel ca să avem

$$\alpha_k \leqslant \frac{a}{b} \leqslant \alpha_{k-1}\,.$$

5. Odată stabilite proprietățile dela Nr. 2, putem găsi o limitație superioară a raportului $\frac{A}{G}$ în felul următor: Să scriem

$$R_k = \frac{\frac{k}{n}\frac{a}{b} + \left(1 - \frac{k}{n}\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k}{n}}} = \frac{\lambda\gamma + (1-\lambda)}{\gamma^{\lambda}} = h(\lambda)\ ,\ \gamma = \frac{a}{b}\ ,\ \lambda = \frac{k}{m}$$

Să presupunem că λ este o variabilă continuă dela 0 la ∞ și să căutăm maximul acestui raport. Se găsește ușor că

$$h'\lambda = \frac{(\gamma - 1\log\gamma) - \lambda(\gamma - 1)\log\gamma}{\gamma^{\lambda}}$$

și se vede imediat că $h(\lambda)$ își atinge maximul pentru

$$\lambda = \frac{\gamma - 1 - \log\gamma}{(\gamma - 1)\log\gamma}\ ,\ \max_{(0,\ \infty)} h(\lambda) = \frac{\gamma - 1}{\gamma^{\frac{\gamma - 1 - \log\gamma}{(\gamma-1)\log\gamma}} \cdot \log\gamma}\ .$$

Ținând seamă de valoarea lui γ și făcând calculele găsim

$$\frac{A}{G} \leqslant r(a\ .\ b)$$

unde

$$(1) \qquad r(a,\ b) = \frac{a - b}{(\log a - \log b)\ .\ \left(\frac{b^a}{a^b}\right)^{\frac{1}{a-b}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\log a - \log b}}}$$

Se poate verifica pe această formulă că $r(a,\ b)$ nu depinde decât de raportul $\frac{a}{b}$ și că nu se schimbă când permutăm pe a și b.

6. Să considerăm acum o funcție $f(x)$ continuă definită în intervalul $(x_0,\ x_1)$. Să presupunem că valorile funcției rămân cuprinse între numerile pozitive a și b.

Se știe că dacă punem

$$f_{\nu n} = f(x_0 + \nu\,\delta_n) \quad ,\quad \delta_n = \frac{x_1 - x_0}{n}$$

atunci fiecărui număr $\varepsilon > 0$ corespunde un număr N aşa ca pentru $n > N$ să avem

$$\left| \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{f_{1n} + f_{2n} + \ldots + f_{nn}}{n} \right| < \varepsilon$$

$$\left| e^{\frac{1}{x_1 - x_0}\int_{x_0}^{x_1} \log f(x)\,dx} - \sqrt[n]{f_{1n} \cdot f_{2n} \ldots f_{nn}} \right| < \varepsilon.$$

A doua integrală are o valoare pozitivă, putem dar spune că fiecărui $\varepsilon > 0$ corespunde un N astfel ca pentru $n > N$ să avem

$$\left| \frac{\frac{1}{x_1 - x^0} \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx}{e^{\frac{1}{x_1 - x_0}\int_{x_0}^{x_1} \log f(x)\,dx}} - \frac{f_{1n} + f_{2n} + \ldots + f_{nn}}{n\sqrt[n]{f_{1n} \cdot f_{2n} \ldots f_{nn}}} \right| < \varepsilon.$$

Rezultă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$

$$\frac{\frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx}{e^{\frac{1}{x_1 - x_0}\int_{x_0}^{x} \log f(x)\,dx}} \leqslant r(a, b) + \varepsilon$$

prin urmare

Dacă $f(x)$ este definită şi continuă în intervalul (x, x) şi dacă valorile acestei funcţiuni rămân cuprinse între două numere pozitive a şi b, avem

$$1 \leqslant \frac{\frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x^0}^{x_1} f(x)\,dx}{e^{\frac{1}{x_1 - x^0}\int_{x_0}^{x_1} \log f(x)\,dx}} \leqslant r(a, b)$$

unde $r(a, b)$ este expresiunea definită de relaţia (1).

7. Prima inegalitate este bine cunoscută şi se transformă într'o egalitate numai dacă funcţia se reduce la o constantă. A doua inegalitate nu se poate înlocui printr'o egalitate când funcţia este continuă. Se poate însă arăta că inegalitatea este adevărată pentru *orice funcţie integrabilă* (chiar pentru toate funcţiunile *sumabile*, dacă integralele sunt luate în sensul D-lui LEBESGUE).

Atunci egalitatea poate totdeauna avea loc de exemplu pentru funcţiunea

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{pentru } (x_0 \leqslant x \leqslant \lambda) \\ b & \text{pentru } (\lambda < x \leqslant x_1) \end{cases} \qquad (x_0 < x_1)$$

unde

$$\lambda = \frac{(x_1 - x_0)(a - b) + (a x_0 - b x_1)(\log a - \log b)}{(a - b)(\log a - \log b)} .$$

TIBERIU POPOVICIU.

O PROBLEMĂ DE CALCULUL VARIAŢIUNILOR

Fie $\varphi(x, y, z)$ o funcţiune continuă de coordonatele carteziene ale unui punct definit într'o regiune a spaţiului în care vor fi situate toate curbele de care ne ocupăm. Insemnând cu r distanţa unui punct al acestei regiuni la origina O a coordonatelor, ne propunem să găsim care sunt curbele ce unesc două puncte fixe A şi B de-alungul cărora integrala:

$$I = \int_{(A\ B)} \varphi(r)\, ds$$

e minimă.

Această chestiune revine la următoarea chestiune de mecanică: Să considerăm un punct material M supus la acţiunea unei forţe constant dirijată către un centru fix O funcţiune de distanţă r, şi ni se cere să găsim curba pe care trebue să o urmeze punctul material, sub acţiunea acestei forţe, pentru ca să ajungă dela un punct dat la altul în timpul cel mai surt. Această curbă e cunoscută sub numele de *Curba brahistocronă absolută* în cazul când punctul e liber. lar când punctul e obligat să rămână pe o suprafaţă, curba găsită va fi or curbă *brahistocronă* în raport cu orice altă curbă de pe suprafaţa considerată dusă între cele două puncte de pe suprafaţă.

Curbele căutate sunt date, după cum se ştie, de ecuaţiile diferenţiale:

$$(1)\qquad \begin{aligned} d\left(\varphi\frac{dx}{ds}\right) &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,ds \\ d\left(\varphi\frac{dy}{ds}\right) &= \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,ds \\ d\left(\varphi\frac{dz}{ds}\right) &= \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,ds \end{aligned}$$

pentru care prima variaţiune a integralei I este nulă.

Sistemul de ecuaţii (1) reprezintă şi ecuaţiile de echilibru ale unui fir flexibil şi inextensibil supus la acţiunea unei forţe F ce derivă dintr'o funcţiune de forţe $(-\varphi)$, tensiunea firului fiind φ.

Pentru integrarea ecuaţiilor (1) APPELL a arătat, într'un articol publicat în *Compte Rendu* (Vol. 96), cum pot fi reduse la forma canonică ca să le putem aplica apoi teoremele de integrare ale lui JACOBI.

In cazul particular când $\varphi(r) = r^{2m}$ am arătat, în *Gazeta Matematică* Anul XV, pag. 294 cum se poate găsi prin metodele obişnuite integrala ecuaţiilor rezultate.

In cele ce urmează îmi propun să arăt că acelaşi procedeu poate fi aplicat şi *în cazul unei funcţiuni oarecare de distanţa* r.

Considerând proecţiunea curbei căutate pe planul xOy şi raportând această curbă la un sistem de axe rectangulare, ecuaţiile (1) ne dau:

$$(2)\qquad \begin{aligned} d(\varphi(r)\cos\alpha) &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,ds \\ d(\varphi(r)\sin\alpha) &= \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,ds \end{aligned}$$

în care α reprezintă unghiul tangentei în punctul M cu axa Ox.

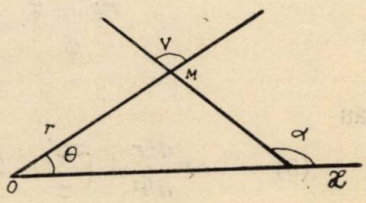
Dacă luăm derivatele sistemului (2), ridicăm rezultatele la pătrat şi le adunăm, găsim:

$$\varphi'^2(dr^2 - ds^2) + \varphi^2 d\alpha^2 = 0$$

sau în coordonate polare:

$$(3)\qquad \varphi^2 d\alpha^2 - r^2\varphi'^2 d\theta^2 = 0.$$

Insemnând cu V unghiul tangentei în M cu raza rectoare OM,



vom avea: $\alpha = \theta + V$ de unde $d\alpha = d\theta + dV$, iar ecuația (3) devine:

$$\varphi^2 (d\theta + dV)^2 - r^2 \varphi'^2 d\theta^2 = 0.$$

Ecuație pe care o descompunem în:

$$\varphi (d\theta + dV) - r\varphi' d\theta = 0$$

și

$$\varphi (d\theta + dV) + r\varphi' d\theta = 0.$$

Pentru a integra prima ecuație, observăm că avem:

$$\varphi dV = (r\varphi' - \varphi) d\theta$$

$$\therefore \frac{dV}{d\theta} = \frac{r\varphi' - \varphi}{\varphi}.$$

Pentru a calcula pe $\frac{dV}{d\theta}$ considerăm relațiunea cunoscută

$$\operatorname{tg} V = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$$

care derivată în raportul cu θ ne dă:

$$\frac{\frac{dV}{d\theta}}{\cos^2 V} = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

și înlocuind pe:

$$\cos^2 V = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 V} = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}$$

găsim ecuația diferențială:

$$\frac{r\varphi' - \varphi}{\varphi} = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}$$

sau

$$(5) \qquad r\frac{d^2r}{d\theta^2} + \left(\frac{r\varphi'}{\varphi} - 2\right)\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{r\varphi'}{\varphi} - 1\right)r^2 = 0.$$

Pentru a integra această ecuație, punem:

$$\frac{dr}{d\theta} = p \quad \therefore \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = p\frac{dp}{dr}$$

astfel ecuația (4) devine:

$$rp\frac{dp}{dr} + \left(\frac{r\varphi'}{\varphi} - 2\right)p^2 + \left(\frac{r\varphi'}{\varphi} - 1\right) = 0$$

ecuație omogenă care poate fi integrată făcând: $d = ur$ și care devine:

$$ur\frac{du}{dr} + \left(\frac{r\varphi'}{\varphi} - 1\right)(u^2 + 1) = 0$$

sau

$$\left(\frac{r\varphi'}{\varphi} - 1\right)\frac{dr}{r} = -\frac{u\,du}{u^2+1}$$

de unde:

$$\frac{dr}{r} - \frac{\varphi'\,dr}{\varphi} = \frac{u\,du}{u^2+1}$$

care integrală ne dă:

$$\frac{r}{\varphi} = C(1 + u^2)^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \quad r^2 = C^2\varphi^2(1 + u^2)$$

și prin urmare:

$$u = \pm\frac{\sqrt{r^2 - C^2\varphi^2}}{C\varphi}$$

și cum

$$\frac{dr}{d\theta} = ur$$

obținem:

$$d\theta = \frac{C\varphi\,dr}{r\sqrt{r^2 - C^2\varphi^2}}$$

care ne dă:

I. $$\theta - \theta_0 = \int_{(A\ B)} \frac{C\varphi\,dr}{r\sqrt{r^2 - C^2\varphi^2}}.$$

In acelaşi mod, din ecuaţia:

$$\varphi\,(d\theta + dV) + r\varphi' d\theta = 0$$

găsim:

$$d\theta = \frac{C\,dr}{r\sqrt{r^2\varphi^2 - C^2}} \quad \therefore$$

II $$\theta - \theta_0 = \int_{(A\ B)} \frac{C\,dr}{r\sqrt{r^2\varphi^2 - C^2}} \,.$$

Dacă facem $\varphi = r^{2m}$ în integralele (I) şi (II) obţinem rezultatele găsite în articolul citat din *Gazeta Matematică* şi particularizând pe φ, integralele (I) şi (II) ne vor da proecţiunile pe planul xOy a curbelor căutate.

În cazul când A şi B vor fi pe o suprafaţă, curba va fi perfect determinată de ecuaţia suprafeţei şi integralele (I) şi (II).

D. GEORGESCU
Profesor, Piteşti.

ASUPRA TEOREMEI LUI SALMON

Se cunoaşte teorema lui SALMON, referitoare la trei cercuri descrise pe trei coarde concurente, ca diametre. Aceste cercuri se taie câte două în trei puncte pe o dreaptă.

Vreau să dau câteva complectări ale acestei teoreme.

Fie M punctul comun celor 3 coarde şi ω_a, ω_b, ω_c centrele cercurilor descrise ca diametre pe ele. Fie ABC triunghiul anticomplimentar al lui $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ şi A′, B′, C′ punctele în care se taie câte două, cele trei cercuri. Coardele comune taie liniile centrelor în A_1, B_1, C_1 şi fie H ortocentrul triunghiului $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$.

1°. *Dreapta* A′B′C′ *de intersecţie ale cercurilor descrise pe 3 coarde concurente ca diametre, trece prin ortocentrul triunghiului format de centrele lor.*

In adevăr, punctul M fiind pe cercul $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ punctele A_1, B_1, C_1, fiind proecţiile lui M pe laturile lui $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ sunt pe dreapta lui

SIMSON a lui M şi care trece prin mijlocul lui HM. Dreapta A'B'C' e simetrica lui M faţă de $A_1B_1C_1$ care va trece chiar prin H.

2°. M *este ortopolul dreptei* A'B'C' *faţă de triunghiul anticomplimentar* ABC.

In adevăr AA', BB', CC' sunt perpendiculare pe A'B'C'. Unghiul $\widehat{B'MA'}$ e egal cu $\widehat{\omega_a\,\omega_c\,\omega_b}$ sau cu $\hat{C}$, iar $\widehat{C'MA'}$ este egal cu $\widehat{\omega_c\,\omega_b\,\omega_a}$ sau cu $\hat{B}$. Unghiul $\widehat{B'MC'} = \pi - \hat{A}$. Arcul B'MC' în cercul ω_a are ca măsură de 2 ori unghiul $\hat{A}$ şi deci unghiul $\widehat{B'\omega_a C'}$ este $2\hat{A}$. Pe de altă parte unghiurile $\widehat{C'B'\omega_a}$ şi $\widehat{B'C'\omega_a}$ sunt egale cu $\frac{\pi}{2} - \hat{A}$.

Cum şi unghiurile $\widehat{H\,\omega_c\,\omega_a}$ şi $\widehat{H\,\omega_b\,\omega_a}$ sunt egale cu $\frac{\pi}{2} - \hat{A}$, rezultă că punctele B' şi C' sunt respectiv pe cercurile $H\omega_c B\omega_a$ şi $H\omega_b C\omega_a$, de diametre $\overline{HB}$ şi $\overline{HC}$.

Deci BB' şi CC' sunt perpendiculare pe A'B'C'. La fel AA'. Dar A'M, B'M, C'M sunt perpendiculare pe $\omega_b\,\omega_c$, $\omega_c\,\omega_a$ şi $\omega_a\,\omega_b$, adică pe BC, CA, AB şi prin urmare M e ortopolul lui A'B'C' faţă de ABC.

3°. Cum se observă cercurile $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ sunt cercurile ortopolare ale dreptei Δ. Ele taie laturile lui ABC pe dreptele SIMSOM ce trec prin ortopolul M, de oarece A'B'C' e diametru în triunghiul ABC. Ceva mai mult aceste drepte SIMSOM sunt perpendiculare. Se poate deci enunţa următoarea teoremă generală:

Cercurile descrise ca diametre pe trei coarde concurente, ale aceluiaş cerc, se taie câte două în trei puncte pe o dreaptă ce trece prin ortocentrul triunghiului centrelor lor.

Aceste cercuri taie laturile triunghiului anticomplimentar al triunghiului centrelor, pe două drepte ce trec prin punctul comun al coardelor şi sunt perpendiculare între ele.

Punctul comun al coardelor este ortopolul dreptei de intersecţie a celor trei cercuri, în raport de triunghiul anticomplimentar triunghiului centrelor.

LOCOT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

PREMIUL „INGINER H. CAPRIEL“

In conformitate cu prevederile Regulamentului fondului «Inginer H. CAPRIEL», în numărul de față urma să se publice rezultatul acestui premiu.

Societatea neprimind nici o lucrare până la 1 Mai 1934, premiul pe anul 1934 nu se acordă și se adaugă la fondul respectiv.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII.

PREMIUL „INGINER AL. ROȘU“

Subsemnații cercetând volumul XXXIX al *Gazetei Matematice* am constatat că niciun articol, notă sau problemă originală de geometrie elementară nu îndeplinește condițiunile premiului INGINER AL. ROȘU publicate în Vol. XXXIX, pag. 257.

Având în vedere că regulamentul acestui premiu prevede în caz de neîndeplinirea condițiunilor impuse, ca premiul să se acorde celui mai harnic corespondent al Gazetei elev de liceu, am hotărît în urma unor minuțioase cercetări să acordăm premiul «INGINER AL. ROȘU» în valoare de 500 lei pentru cea mai rodnică activitate avută în Vol. XXXIX, D-lui DUMITRU MAVRODIN elev cl. 7 liceul «Mihail Eminescu» din București.

D-l D. MAVRODIN s'a desprins din grupul celorlalți corespondenți elevi de liceu, rezolvând un număr destul de mare de probleme și dând dovadă pentru unele de o înțelegere deosebită.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „INGINER. AL. ROȘU“:

N. BOTEA, AL. A. ROȘU, O. N. ȚINO.

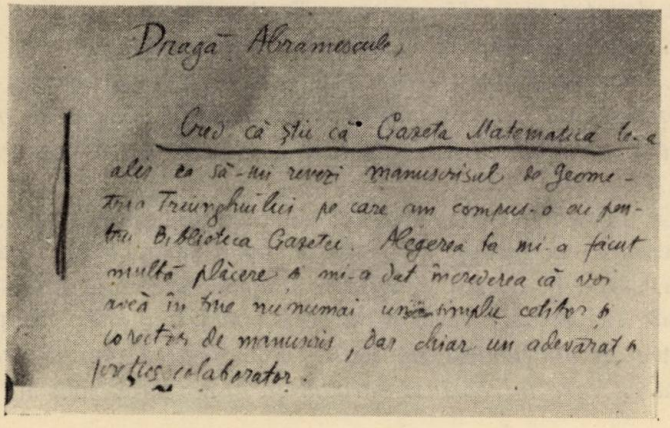
Acest raport s'a citit și aprobat în ședința din 28 Noemvrie 1934.

NOTE MATEMATICE

18. *Geometria triunghiului de* TRAIAN LALESCU. Inainte de războiul trecut, regretatul TRAIAN LALESCU, Membru al Societăţii *Gazeta Matematică,* pregătise pentru tipărirea în Biblioteca *Gazeta Matematică,* o *Geometrie a triunghiului.* Asupra acestei publicaţii am avut cu LALESCU mai multe convorbiri, şi între altele l'am sfătuit să o publice în limba franceză pentru că altfel desfacerea, numai la noi în ţară, ar dura prea mult, iar pentru revizuire să se adreseze D-lui N. ABRAMESCU, care a scris articolele de Geometria Triunghiului în *Gazeta Matematică,* după care a şi tipărit o broşură. In acest scop în o Adunare a membrilor *Gazetei Matematice* s'a şi hotărît să fie rugat D-l N. ABRAMESCU ca să primească a se ocupa de acea Geometrie.

Din convorbirile avute cu LALESCU nu mi-a rămas nimic; noi domiciliind în Bucureşti toate tratativele au fost făcute verbal, iar nu în scris. De aceea am rugat pe D-l N. ABRAMESCU să caute corespondenţa avută cu TRAIAN LALESCU în privinţa acelei Geometrii a Triunghiului. D-sa a binevoit a-mi pune la dispoziţiune acea corespondenţă, pentru a demonstra celor mai neîncrezători că dorinţa lui TRAIAN LALESCU a fost de a publica acea Geometrie în Biblioteca *Gazetei Matematice,* şi de a face ca să se respecte această dorinţă a defunctului matematician.

Iată reprodus aci începutul scrisorii lui TRAIAN LALESCU din 3 Septemvrie 1915 :



Dragă Abramescule,

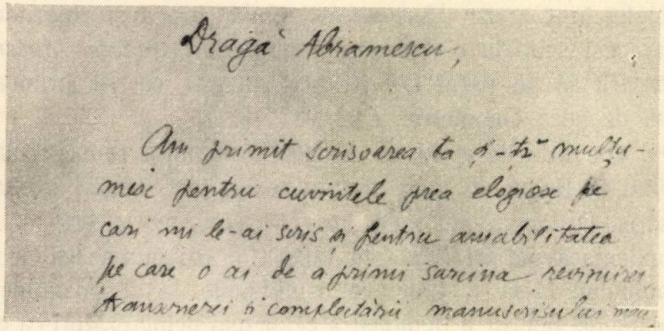
Cred că ştii că Gazeta Matematică te-a ales ca să-mi revezi manuscrisul de Geometria Triunghiului pe care am compus-o ou pentru Biblioteca Gazetei. Alegerea ta mi-a făcut multă plăcere şi mi-a dat încrederea că voi avea în tine nu numai un simplu cetitor şi corector de manuscris, dar chiar un adevărat şi perfect colaborator.

După aceste rânduri urmează imediat:

„Iţi trimit deocamdată Manuscrisul care conţine textul complet al Cărţii, afară însă de Note şi Exerciţii pe care le-am ataşat la fiecare capitol“.

Urmează apoi detalii de cum să se facă revizuirea, verificările, figurile etc.

După ce D-l N. ABRAMESCU i-a răspuns că primeşte această însărcinare, la 6 Septemvrie 1915, LALESCU îi scrie o nouă scrisoare în care începe astfel:


Dragă Abramescu,

Am primit scrisoarea ta şi-ţi mulţumesc pentru cuvintele prea elogioase pe care mi le-ai scris şi pentru amabilitatea pe care o ai de a primi sarcina revizuirei transcrierei şi completării manuscrisului meu

Acolo îi spune că manuscrisul trebue transcris în franţuzeşte, căci a aranjat să apară în dubla editură Socec-Nony. Scrisoarea se încheie cu cuvintele:

„Iţi mulţumesc încă odată, dragă prietene, pentru serviciul ce mi-l faci şi te rog să mă crezi cu cele mai sincere sentimente al tău devotat şi vechiu prieten, TR. LALESCU“.

In scrisoarea din 11 Octomvrie 1915, se spune:

„Am primit manuscrisul tău şi-ţi mulţumesc pentru grija şi atenţiunea cu care ai transcris primele două capitole precum şi pentru micile modificări de text şi demonstraţii pe care le-ai făcut“.

La 2 Noemvrie 1915 LALESCU mulţumeşte D-lui N. ABRAMESCU că a terminat cu bine şi a revăzut în toate amănuntele ei partea a doua a Cărţii. In o carte postală îi mulţumeşte pentru *„grija meticuloasă“* cu care a revăzut şi transcris textul. In o altă carte postală îi spune: *Iţi mulţumesc din toată inima pentru voinicia şi priceperea cu care întreprinzi sarcina ta“.* In cartea postală de la

15 Ianuarie 1916 LALESCU scrie D-lui N. ABRAMESCU: *„Ne apropiem de începutul sfârşitului"*.

Lipsa de fonduri pentru tipărire şi frământările dela noi din ţară dinaintea războiului, au făcut ca lucrarea să nu se dea la tipar până la începutul războiului. In urmă, alte preocupări ale lui LALESCU şi tipărirea în *Biblioteca Gazetei Matematice* a cursului său de *Geometrie Analitică,* au făcut să se amâne tipărirea Geometriei Triunghiului. După moartea sa, D-l N. ABRAMESCU a cerut familiei să caute manuscrisul la care muncise foarte mult şi redijase mult din el.

De curând însă ni s'a adus la cunoştinţă că acea Carte se va tipări de «Institutul Român de Matematici». Am trimis atunci pe D-l Inginer I. CHIŢULESCU, finul lui LALESCU, să întrebe familia de acel manuscris şi i-a spus că s'a procedat în conformitate cu testamentul lui LALESCU.

Noi, dela *Gazeta Matematică* ştiam că lucrurile stau cu totul altfel, după cum am arătat mai sus, şi pentru ca să nu se zică că noi nu am îndeplinit dorinţa defunctului, am dat aci fragmente din scrisorile lui. Cu modul acesta, dacă vreodată corespondenţa lui TRAIAN LALESCU va fi publicată, se va vedea că noi nu am fost de vină că nu i s'a respectat dorinţa şi că am lăsat să fie nedreptăţit colaboratorul lui, D-l N. ABRAMESCU.

I. IONESCU.

19. *Patrate cu toate cifrele consecutive.* In *Gazeta Matematică,* Vol. XXIX, am propus problema 3123 în care ceream patratele de 4 cifre consecutive, scrise într'o ordine oarecare. Cu ocazia redijării soluţiei acestei probleme, publicată la pag. 354, Vol. XXIX, am căutat, tot pe calea indicată în acea soluţie şi am găsit toate patratele de 3, 4, . . . 9 şi 10 cifre consecutive, cu intenţia de a propune o problemă analoagă cu 3123 însă pentru alt număr de cifre. Astăzi însă renunţ la aceasta pentru că în numărul de pe Octomvrie 1934 al revistei *Mathesis,* D-l V. THÉBAULT a publicat în supliment un tabel al tuturor patratelor formate din cifre diferite, tabel care conţine implicit şi patratele formate numai din cifre consecutive. Dau în cele ce urmează rezultatele pe care le-am obţinut cu ocazia redijării problemei 3123 în anul 1924, rezultate care concordă cu tabloul citat şi publicat de D-l V. THÉBAULT. Patratele

de 3, 4 şi 5 cifre au fost date cu ocazia redijării problemei 3123, ele sunt:

$$18^2 = 324 \; ; \; 24^2 = 576 \; ; \; 66^2 = 4356 \; ; \; 74^2 = 5476$$

$$152^2 = 23104 \; ; \; 179^2 = 32041.$$

Patrate de 6 şi 7 cifre consecutive nu există.

Patratele de 8 cifre consecutive sunt următoarele:

$3678^2 = 13527684$; $3698^2 = 13675204$; $4175^2 = 17430625$
$4616^2 = 21307456$; $5904^2 = 34857216$; $5968^2 = 35617024$
$6596^2 = 43507216$; $7532^2 = 56731024$; $8082^2 = 65318724$
$8559^2 = 73256481$; $9024^2 = 81432576.$

Patrate formate din 9 cifre consecutive:

$10128^2 = 102576384$; $10278^2 = 105637284$; $11826^2 = 139854276$
$12363^2 = 125843769$; $12543^2 = 157326849$; $12582^2 = 158306724$
$13278^2 = 176305284$; $13434^2 = 180472356$; $13545^2 = 183467025$
$13698^2 = 187635204$; $14442^2 = 208571364$; $14766^2 = 218034756$
$15681^2 = 245893761$; $15963^2 = 254817369$; $16854^2 = 284057316$
$17529^2 = 307265841$; $17778^2 = 316057284$; $18072^2 = 326597184$
$19023^2 = 361874529$; $19377^2 = 375468129$; $19569^2 = 382945761$
$19629^2 = 385297641$; $20316^2 = 412789856$; $20754^2 = 430728516$
$21744^2 = 472801536$; $21801^2 = 475283601$; $22887^2 = 523814769$
$23019^2 = 529874361$; $23178^2 = 537219684$; $23439^2 = 549386721$
$23682^2 = 560837124$; $23889^2 = 570684321$; $24009^2 = 576432081$
$24237^2 = 587432169$; $24276^2 = 589324176$; $24441^2 = 597362481$
$24807^2 = 615387249$; $25059^2 = 627953481$; $25572^2 = 653927184$
$25941^2 = 672935481$; $26409^2 = 697435281$; $26733^2 = 714653289$
$27129^2 = 735982641$; $27273^2 = 743816529$; $27984^2 = 783104256$
$28731^2 = 825470361$; $29034^2 = 842973156$; $29106^2 = 847159236$
$29208^2 = 853107264$; $30384^2 = 923187456.$

Patratele scrise cu 10 cifre consecutive sunt următoarele:

$32043^2 = 1026753849$; $32286^2 = 1042385796$; $33144^2 = 1098524736$;
$35172^2 = 1237069584$; $35337^2 = 1248703569$; $35757^2 = 1278563049$;
$35853^2 = 1285437609$; $37176^2 = 1382054976$; $37905^2 = 1436789025$;
$38772^2 = 1503267984$; $39147^2 = 1532487609$; $39336^2 = 1547320896$;
$40545^2 = 1643897025$; $42744^2 = 1827049536$; $43902^2 = 1927385604$;
$44016^2 = 1937408256$; $45567^2 = 2076351489$; $45624^2 = 2081549376$;
$46587^2 = 2170348569$; $48852^2 = 2386517904$; $49314^2 = 2431870596$;
$49353^2 = 2435718609$; $50706^2 = 2571098436$; $53976^2 = 2913408576$;
$54918^2 = 3015986724$; $55446^2 = 3074258916$; $55524^2 = 3082914576$;
$55581^2 = 3089247561$; $55626^2 = 3094251876$; $56532^2 = 3195867024$;
$57321^2 = 3285697041$; $58413^2 = 3412078569$; $58455^2 = 3416987025$;
$58554^2 = 3428570916$; $59403^2 = 3528716409$; $60984^2 = 3719048256$;
$61575^2 = 3791480625$; $61866^2 = 3827401956$; $62679^2 = 3928657041$;
$62961^2 = 3964087521$; $63051^2 = 3975428601$; $65634^2 = 4307821956$;
$65637^2 = 4308215769$; $66105^2 = 4369871025$; $66276^2 = 4392508176$;
$67677^2 = 4580176329$; $68763^2 = 4728350169$; $68781^2 = 4730825961$;
$69513^2 = 4832057169$; $71433^2 = 5102673489$; $72621^2 = 5273809641$;
$75759^2 = 5739426081$; $76047^2 = 5783146209$; $76182^2 = 5803697124$;
$77346^3 = 5982403716$; $78072^2 = 6095237184$; $78453^2 = 6154873209$;
$80361^2 = 6457890321$; $80445^2 = 6471398025$; $81222^2 = 6597013284$;
$81945^2 = 6714983025$; $83919^2 = 7042398561$; $84648^2 = 7165283904$;
$85353^2 = 7285134609$; $85743^2 = 7351862049$; $85803^2 = 7362154809$;
$86073^2 = 7408561329$; $87639^2 = 7680594321$; $88623^2 = 7854036129$;
$89079^2 = 7935068241$; $89145^2 = 7946831025$; $89355^2 = 7984316025$;
$89523^2 = 8014367529$; $90144^2 = 8125954736$; $90153^2 = 8127563409$;
$90198^2 = 8135679204$; $91248^2 = 8326197504$; $91605^2 = 8391476025$;
$92214^2 = 8503421796$; $94695^2 = 8967143025$; $95154^2 = 9054283716$;
$96702^2 = 9351276804$; $97779^2 = 9560732841$; $98055^2 = 9614783025$;
$98802^2 = 9761835204$; $99066^2 = 9814072356$.

Sunt caracteristice, în aceste tablouri, numerele:

$$12543^2 = 157326849 \quad \text{şi} \quad 46587^2 = 2170348569$$

la care şi rădăcinile şi patratele sunt formate numai din cifre consecutive.

COL. GH. BUICLIU.

20. *Asupra Notei No. 10 G. M. No. 2 (XL).*

Soluția ce o obținem egalând produsul cosinusurilor cu $-\frac{1}{2}$ și pe care o dă D-l R. GOORMAGHTIGH, corespunde în mod evident triunghiului având un unghiu obtus — deci tot unui triunghiu real; căutarea acestei soluții am cerut-o corespondenților în *„Nota"* de la finele rezolvării problemei 3785 (G. M. XXXIX, pag. 465) și anume în penultimul aliniat al acestei note, pentru a primi dela aceștia soluția pe care a indicat-o autorul Notei No. 10, la care ne referim. Dar acum problema se consideră închisă.

LT. C-DOR. GH. N.

21. *Asupra exercițiului No. 5 (G. M., XL, 91).*

Iată două extinderi ale acestui exercițiu.

1. *Suma cuburilor a* n *numere consecutive este divizibilă prin suma lor.*

In adevăr fie $p - q = n$, atunci însemnând cu S_3 suma cuburilor și S_1 suma lor, avem :

$$S_3 = \left[\frac{p\,(p+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{q\,(q+1)}{2}\right]^2$$

și

$$S_1 = \left[\frac{p\,(p+1)}{2}\right] - \frac{q\,(q+1)}{2}\,.$$

Prin urmare :

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{p\,(p+1)}{2} + \frac{q\,(q+1)}{2}\,.$$

2. In G. M. XXVII, 249, la problema No. 2844, am arătat că :

Dacă a, b, c, . . . l *sunt* n *termeni ai unei progresii aritmetice, și dacă :*

$$S_3 = a^3 + b^3 + \ldots + l^3$$

$$S_1 = a + b + \ldots + l$$

atunci S_3 *este divizibil cu* S_1.

Iar câtul lor am arătat că este :

$$\frac{S_3}{S_1} = a\,(a - r) + r\,.S_1$$

r fiind rația progresiei.

Tot în rezolvarea problemei No. 2844 s'a arătat că în cazul termenilor unei progresii geometrice S_3 este divizibil cu S_1 dacă $n = M3 \pm 1$.

Observaţii.

1. Dacă în loc de suma cuburilor am presupune suma puterilor a *5-a,* atunci avem :

$$S_5 = \frac{p^2(p+1)^2}{12} \cdot [2p(p+1)-1] - \frac{q^2(q+1)^2}{12} \cdot [2q(q+1)-1]$$

care de asemenea este divizibilă cu suma numerilor, căci avem :

$$\frac{3S_5}{S_1} = 4\left[\frac{p(p+1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2}\right]^2 - p \cdot (p+1) \cdot q(q+1) - \left[\frac{p(p+1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2}\right].$$

2. Analog se poate deduce că :

$$\frac{5S_4}{S_2} = 6 \cdot S_1 - 1.$$

Apoi :

$$2S_5 + S_3 = 3(S_2)^2 \text{ şi } S_7 + S_5 = 2(S_4)^2.$$

MAIOR I. LINTEŞ.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine. Année XVI. No. 8–9. Bucureşti 1934. Sur l'unité des méthodes directes, par G. BOULIGAND. Sur une conséquence de l'hypotèse du continu, par W. SPIERPINSKI. Sur une propiété générale des courbes planes fermées et ses applications, par N. CIORĂNESCU.

Idem. No. 10. Sur la distribution des zéros des certains polynomes minimisants, par T. POPOVICIU. Sur une classe de transformations de réseaux quadratiques à invariants égaux d'une espace à trois dimensions, par AL. PANTAZI. Etude expérimentale du coefficient du frottement de la chute des corps sur un plan incliné : méthode pour la détermination d'une valeur approchée pour l'intensité de la gravitation, par C. SĂLCEANU.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XL. No. 9. Septemvrie 1934. New-York. Cercetările Secretarului asociat M. H. INGRAHAM în interesul Societății, de M. H. INGRAHAM. HOPFNER asupra geodesiei, de W. D. LAMBERT. Rezumate de comunicări.

Idem. Vol. XL. No. 10. Octomvrie 1934. New-York. Unele contribuțiuni la geometria algebrică, de V. SNYDER. Iterația funcțiunilor, de M. WARD. O nouă demonstrație a teoremei lui DENJOY, YOUNG și SAKS, de E. H. HANSON. Notă asupra uzului integrării fracționale a funcțiunilor lui BESSEL, de H. P. THIELMAN. Notă referitoare la grupurile de postulate, de R. GARVER. Operațiuni funcționale lineare având discontinuități de prima categorie, de H. S. KALTENBORN. Cercuri magice, de C. G. P. KUSCHKE. Conversa problemei lui WARING, de L. E. DICKSON. Extensiuni hipertranscendentale a câmpurilor parțiale diferențiale, de H. W. RAUDENBUSH. O clasă de teoreme de existență în geometria diferențială, de T. Y. THOMAS & J. LEVINE. Relațiune între implicarea strictă a lui LEWIS și algebra boleană, de E. V. HUNTINGSON. Invarianții integrali ale sistemelor ne-holomonice dinamice, de A. E. TAYLOR. Sumarea seriilor polinomiale ortogonale, de D. JACKSON. O metodă de a genera părți din aritmetică fără uzul logicei intuitive, de W. V. QUINE. O proprietate caracteristică a suprafețelor de curbură negativă, de E. P. BECKENBACH.

Universidad Nacional de la Plata. *Anuario para el Ano* 1934. La Plata. (Publicaciones de la Faculdad de Ciencias fisicomatematicas).

American Mathematical Society. *List of members and officers* New-York 1934.

Revista Matematică din Timișoara. Anul XIV, No. 9. Noemvrie 1934. Timișoara. Sur le point de NAGEL d'un triangle, par V. THÉBAULT. Figura polară anarmonică a unui punct relativ la o conică sau la o cuadrică, de B. I. BAIDAFF.

Știință și Progres. Anul I. No. 6. Noemvrie 1934. Târgul Mureș.

Natura. Anul XXIII. No. 9. Noemvrie 1934. București. Congresul Interbalcanic de matematică dela Atena, de O. ONICESCU.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 59. No. 3. Noemvrie 1934. Paris.

Idem. No. 4. Noemvrie 1934.

P. SERGESCU. *Matematica la Români.* Vălenii de Munte 1934.

P. SERGESCU. *Sur une classe particulière d'équations :*

$$\sum_{k=0}^{k=n} (1 + kr)^p \, x^k = 0.$$

(Extras din Comptes rendus de la 57-e Session de *l'Association française pour l'avancement des sciences*). Paris 1933.

M. GHERMANESCO. *Sur le troisième théorème de* FREDHOLM. (Extras din *Bulletin de la classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique*). Bruxelles 1934.

Bulletin de Mathématiques et de Physique Pures et Appliquée de l'Ecole Polytechnique Roi Carol II. Anul V. No. 1. Bucureşti 1934. Remarques sur le thèorème de la moyenne, par D. POMPEIU. Sur une propriété caractéristique des polynômes à une variable, par L. BRUWIER. Une comparaison des différentes méthodes de quadrature par approximation, par AL. GUTZU. Relation statistique entre la résistance, l'allongement et la contraction d'une barre d'acier, par C. C. TEODORESCO. Beitrag zur Kenntnis der Stossdauer beim longitudinalen Stoss zylindrischer Stahlstäbe, von I. IS. NICULESCU. Note sur la méthode d'analyse d'une fonction périodique basée par les incidents géométriques de la courbe représentative, par C. BUDEANU. Sur la méthode de THOMPSON et la métode des discontinuités pour l'analyse des harmoniques des fonctions périodiques, par E. ABASON. Sur la détermination précise des grandes distances focales pour les lentilles, par D. TEODORESCU. Sur une série de corps isomorphes dans le système $CaO - Al_2O_3 - Fe_2O_3$, par S. SOLACOLU. Visite de M. EMILE BOREL en Roumanie, par D. POMPEIU.

Prof. ISIS WEISS. *Divizibilitatea unui număr decadic prin 7.* Pe un carton de 131×154 autorul a tipărit o regulă de divizibilitate prin 7. La fine există cuvintele: *«Toate drepturile rezervate»* aşa că nu putem reproduce aci acea regulă. Putem însă spune că regula dată cere mai multe calcule de efectuat decât metoda clasică, care nu cere decât înmulţiri cu 2 şi cu 3. Apoi metoda dă loc la scăderi imposibile, ca de exemplu dacă s'ar aplica la numărul 4081.

Autorul nu dă demonstraţiunea regulii, dar ea se poate deduce imediat dacă se aplică metoda clasică de demonstraţie la îndoitul unui număr dat, şi reducem multiplicatorii autorului la resturile împărţirii lor prin 7.

Cine doreşte să cunoască regula să se adreseze autorului la Cernăuţi, Caliceanca 338.

I. I.

Professeur SERGE de GLASENAPP. *Tables de logarithmes des nombres et des fonctions trigonométriques à quatre décimales.* Paris 1934. Editura Gauthier-Villars,

Tablele au un format mic (67×110 mm) şi coprind 126 pag. Ele au o prefaţă scrisă de D-l H. DESLANDRES, membru al Academiei de Ştiinţe din Paris, care le recomandă ca fiind reduse pe cât a fost posibil, transportabile uşor, în buzunar, scrise cu caractere clare, uşor de citit, şi foarte comode pentru calcule pe teren. Ele sunt suficiente pentru multe calcule tehnice.

I. I.

G. GRIGERCSIK. Die kombinierte Ausgleichung der unmittelbaren Beobachtungen. (Extras din *Memoriile secţiunii Ştiinţifice ale Academiei Române*). Bucureşti 1934.

M. NICOLESCO. *Deux remarques sur l'unicité de la solution du problème de Dirichlet pour les équations différentielles linéaires du second ordre.* (Extras din *Bulletin des Sciences mathématiques*). Paris 1934.

M. NICOLESCO. *Réprésentation des fonctions continus de plusieurs variables par des séries uniformément convergentes de fonctions polyharmonique.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de Paris). Paris 1934.

M. NICOLESCO. *Sur une propriété caractéristique des fonctions harmoniques d'ordre* p *et sur l'existence des laplaciens des divers ordres.* (Extras din *Buletinul Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi*). Cernăuţi 1934.

M. NICOLESCO. *Sur l'unicité de la représentation des fonction harmoniques d'ordre* p *au moyen des fonctions harmoniques d'ordre un.* (Extras din *Bulletin mathématique de la Société Roumaine des Sciences*). Bucureşti 1934.

R. ESTÈVE & H. MITAULT. *Elements de géométrie plane* à l'usage des classes de 4-e et 3-e de l'enseignement sécondaire. Tome II. *La Similitude et les aires.* Paris. Gauthier-Villars, Editeurs. 1934.

Cartea conţine următoarele capitole de geometrie: I. Noţiuni fundamentale. Raportul a două segmente. Impărţirea segmentelor. II. Teorema lui THALES, construcţiuni referitoare. III. Asemănarea poligoanelor. IV. Relaţii metrice în cerc şi triunghiu. Aplicaţii. Construcţii. V. Lungimea cercului. Aci e interesant că autorii, deşi francezi, nu utilizează cuvântul circonferenţă. VI. Arii. Urmează apoi o colecţiune de 13 exerciţii relative la chestiunile tratate.

Chestiunile sunt clar expuse. Cartea e de folos pentru începătorii în studiul geometriei elementare.

I. I.

V. THÉBAULT. *Sur les carrés parfaits.* Gembloux 1934. (Supliment la *Mathesis*).

Mathesis. Tomul XLVIII. No. 8. Octomvrie 1934. Gembloux. Rezolvarea unei probleme cu două curbe pentru ecuaţia semiparabolică de ordinul al treilea şi de categoria IV, de M. WINANTS. Asupra unei teoreme analoage cu a lui STEWART, de R. GOORMAGHTIGH. Asupra câtorva transformaţiuni biraţionale cubice ale spaţiului, de LINSMAN. Asupra geometriei triunghiului, de J. LEEMANS. Asupra triunghiurilor triplu ortologice, de CL. SERVAIS.

Gazeta Matematică. *Supliment cu exerciţii.* Anul I. No. 2. Noemvrie 1934.

CERERI

242. Ce se ştie despre ION GURCOVICI, profesor de matematici şi Botanică la Şcoala de silvicultură din Bucureşti, care a funcţionat în 1852?

I. I.

DIVERSE

Secţiunea Matematică a Societăţii române de Ştiinţe a ţinut şedinţă în seara zilei de 29 Octomvrie. D-l M. GHERMĂNESCU a făcut o comunicare asupra teoremei lui PICARD şi D-l GH. T. GHEORGHIU asupra funcţiunilor metasferice de mai multe variabile.

In seara zilei de 5 Noemvrie au făcut comunicări D-l O. ONICESCU despre funcţiune de punct în spaţiul cu două şi trei dimensiuni şi D-l Maior I. LINTEŞ asupra câtorva chestiuni de matematici în legătură cu tehnica militară.

Academia de Ştiinţe din Paris, pe baza raportului Preşedintelui său, D-l EMILE BOREL, a acordat D-lui P. SERGESCU premiul H. DE PARVILLE de Istoria şi filosofia Ştiinţei, pentru Cartea sa: *«Les sciences mathématiques»*, despre care am vorbit în *Gazeta Matematică* Anul XXXIX, pag. 145. Premiul este de 2.000 franci francezi şi dă autorului dreptul de a purta titlul de Laureat al Institutului Franţei. I. IONESCU.

Sporirea Bibliotecei

ETTORE BORTOLLOTTI. *I cartelli di matematica disfida e la personalità psichica e morale di* GIROLAMO CARDANO. Imola 1933.
Donată de D-l P. SERGESCU.

Rendinconti del Seminairo Matematico della R. Universita di Padova Anno III. No. 1, 2. Padova 1932.
Donată de D-l P. SERGESCU.

M. BARZIN & A. ERRERA. *La logique de* M. BROUVER. Etat de question. Bucureşti 1933.
Donată de D-l P. SERGESCU.

A. ERRERA. *Un problème de géométrie infinitésimale.* Bruxelles 1933.
Donată de D-l P. SERGESCU.

A. HEYTING, BARZIN et ERRERA. *Sur la logique intuitioniste.* Paris 1932.
Donată de D-l P. SERGESCU.

A. ROSENBLATT. *Sur les théorèmes de* M. PICARD *dans la théorie des équations aux dérivés partielles non linéaires du type elliptique.* Paris.
Donată de D-l P. SERGESCU.

A. ROSENBLATT. *Sur les théorèmes de* M. PICARD *dans la théorie des équations différentielles du second ordre non linéaires.* Atena 1933.
Donată de D-l P. SERGESCU.

CAÍUS JACOB. *Sur une problèmes concernant les jets gazeux.* Cluj 1934.
Donată de D-l P. SERGESCU.

Portretele matematicianilor THALES, PITAGORA, EUCLIDE, ARCHIMEDE, FIBONACCI, TARTAGLIA, CARDAN, VIÈTE, NEPER, GALILEO, DESCARTES, CAVALIERI, FERMAT, PASCAL, BROWN, NEWTON, LEIBNIZ, JACOB BERNOULLI, L'HÔSPITAL, IOAN BERNOULLI, EULER, LAGRANGE, MONGE, LAPLACE, GAUSS.
Donate de I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3354. *Să se arate că pentru* $n \geqslant 5$ *indicatorul lui* $n!$ *este divizibil cu cel puțin* 2^n.

MAIOR I. LINTEȘ.

1. Admitem că $(n+1)$ este prim cu $n!$, atunci verificând dacă problema este adevărată pentru $n = 5, 6, 7 \ldots$, ne rămâne să arătăm că, dacă este adevărată pentru n, va fi și pentru $(n+1)$.

In adevăr avem:

$$\varphi[(n+1)!] = \varphi(n!) \cdot \varphi(n+1)$$

căci am spus că $(n+1)$ este prim cu $n!$; atunci cum:

$$\varphi(n!) = M2^n$$

și cum $\varphi(n+1)$ este *par,* urmează că avem:

$$\varphi[(n+1)!] = M2^{n+1}$$

c. c. e. d. d.

2. Admitem apoi că:

$$(n+1) = A \cdot B$$

unde A reprezintă un grup de factori primi (cu puterile respective) cari se găsesc printre factorii lui $n!$, iar B reprezintă un grup de factori primi (deasemenea cu puterile lor respective), cari nu se găsesc printre factorii lui $n!$

Verificând, ca la punctul 1, vedem că:

$$\varphi[(n+1)!] = \varphi(n! \cdot A) \cdot \varphi(B).$$

Grupul factorilor lui $\varphi(n!)$ sunt aceeași ca și ai lui $\varphi(n! \cdot A)$, numai la cel din urmă puterile unora din factori vor fi sporite, așa dar puterea lui *2* va fi sau aceiași, sau sporită. Apoi cum $\varphi(B)$ este *par,* urmează că:

$$\varphi[(n+1)!] = M2^{n+1}$$

c. c. e. d. d.

In sensul soluției *1* a rezolvat problema D-l PETRE I. GHIȘOIU, fără a arăta că $(n+1)$ trebue să fie prim cu $n!$

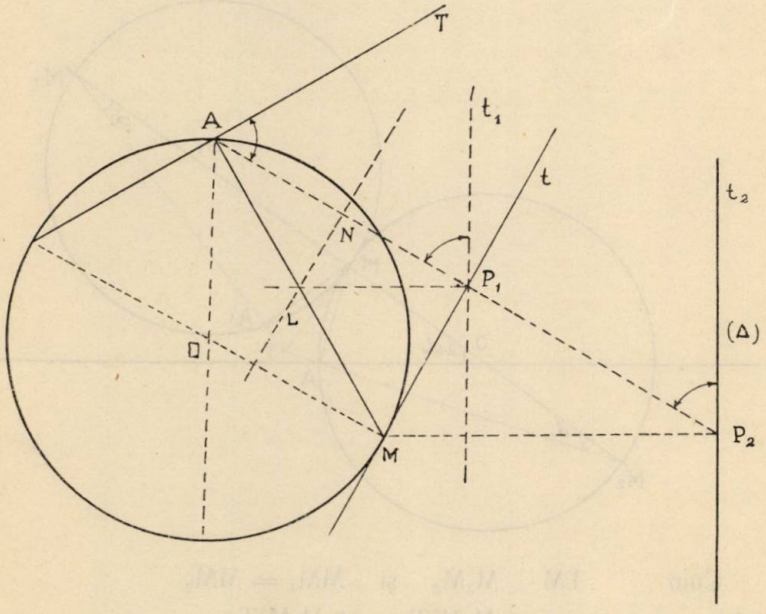
MAIOR I. LINTEȘ.

PROBLEMA 3356. *Pe un cerc fix* O, *se ia un punct fix* A *şi un punct mobil* M. *Fie* AT *perpendiculara în* A, pe coarda AM *şi* Δ *simetrica lui* AT *faţă de tangenta în* M *la cercul* O. *Să se demonstreze că dreapta* Δ *înfăşoară o* **cardioidă.**

MIHAIL I. FOCŞENEANU.

Soluţia I-a.

Fie Mt tangenta în M la cercul O; P_1 proecţia punctului A pe Mt şi P_2 intersecţia (AP_1, Δ). Se ştie că P_1 descrie curba podară a cercului în raport cu A, cardioida (C_1) având punctul A, ca punct dublu. Punctul P_2 fiind simetricul lui A faţă de P_1 va descrie o cardioidă (C_2), omotetică cu (C_1).



Tangentele lor P_1t_1 şi P_2t_2 sunt paralele deci. Rămâne să arătăm că

$$\sphericalangle P_1AT = \sphericalangle AP_1t_1.$$

Pentru aceasta fie L mijlocul coardei AM. Se ştie că LP_1 este normală în P_1 la cardioida (C_1) şi în triunghiul dreptunghic AP_1M, $\overline{AL} = \overline{LP_1}$.

Deci dreptele AL și LP_1 fac cu AP_1 unghiuri egale

$$\sphericalangle LAP_1 = \sphericalangle LP_1A$$

și ca urmare

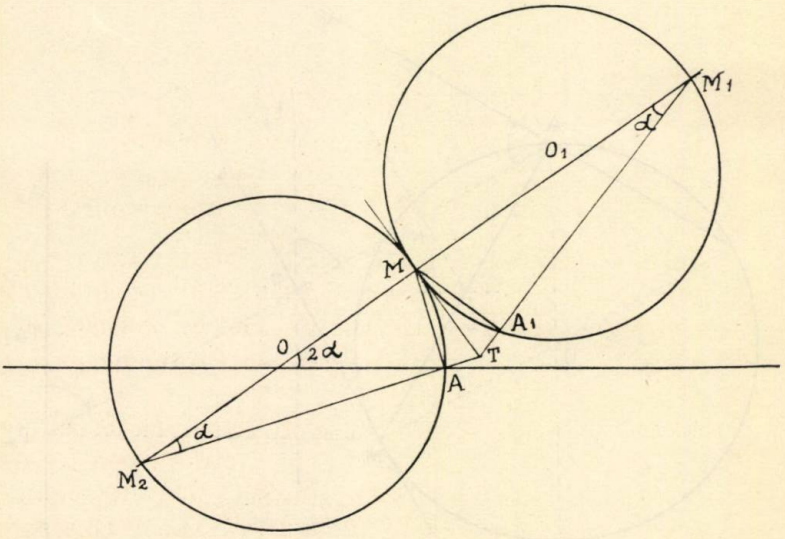
$$\sphericalangle TAP_1 = 90^0 - \sphericalangle LAP_1 = 90^0 - \sphericalangle LP_1A = AP_1t_1.$$

ALEXANDRU NICULESCU
Student Matematici

I. V. CHIRILĂ, LUPU AVRAM
(Lic. Internat Iași)

Soluția II-a.

Duc cercul (O_1), tangent în M la (O) și cu rază egală cu OA. Fie M_1 punctul unde OM taie a doua oară cercul (O_1) și T intersecția tangentei în M la (O) cu AT. Fie A_1 punctul unde M_1T taie cercul (O_1) și M_2 diametral opus lui M în cercul (O).



Cum $TM \perp M_1M_2$ și $\overline{MM_1} = M\overline{M_2}$

rezultă $\sphericalangle M_1M_2T = \sphericalangle M_2M_1T.$

Deci arc $\overset{\frown}{MA}$ = arc $\overset{\frown}{MA_1}$. Centrul instantaneu de rotație al cercului (O_1) este M. Punctul de contact al dreptei Δ adică M_1T, va fi perpendiculara din M pe Δ, adică tocmai A .

Locul lui A_1, este al unui punct fix de pe cercul mobil (O_1), care se rostogolește, fără alunecare pe un cerc egal (O), care este *o cardioidă* cu punct dublu A și axă de simetrie OA.

Dreapta Δ *înfăşoară deci, această cardioidă.*

I. C. VASILIU (Student Şc. Politechnică Buc.), N. TEODORESCU (Student Matematici), ULPIU M. FLORESCU (Craiova), AURELIAN I. STAN (Elev cl. VII, Lic. Mil. Iaşi).

Generalizare. *Fiind dată o curbă plană* (C) *şi un punct* A *fix în planul ei, iar* M *un punct mobil pe acea curbă, simetrica perpendicularei în* A *la* AM, *faţă de tangenta în* M *la curba* (C), *înfăşoară o curbă de genul podarei curbei* (C) *în raport de punctul* A.

Demonstraţia e analoagă cu cea dela soluţia I-a. Se vede foarte uşor că înfăşurătoarea este omotetica de raport **2** faţă de A, a podarei curbei (C), în raport de acelaş punct A.

Notă. D-l N. N. MIHĂILEANU a dat o soluţie insuficientă.

D-l AL. NICULESCU a dat o generalizare a reciprocei teoremei enunţate în problema 3356.

LOCOT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

PROBLEMA 3450. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x = m.$$

N. AGRONOMOF
(Wladivostok).

Asupra acestei probleme s'a publicat Nota No. 20 în G. M., XXXII, pag. 134, de către răposatul V. CRISTESCU, membru fondator al *Gazetei Matematice.* In acea notă se arată că problema se găseşte propusă şi rezolvată în **Culegerea de Probleme** — *Trigonometrie,* Cap. XI, pag. 385 şi 457.

S'au primit soluţii anterior publicărei acelei note de la D-nii: I. C. BOIAN, A. I. CĂLIN, GH. M. CĂLIN, CEZAR COŞNIŢĂ, I. CRISTESCU, C. N. DRÂMBĂ, C. V. COSTĂCHESCU, GH. BALABAN, N. DINULESCU, E. GRÜNSTEIN, N. A. BURICOVICI, GH. I. GHEORGHIU, P. I. GHIŞOIU, EM. MORŢUN, GH. M. PĂUN, N. POPOVICI-CORODEANU, GR. I. RÂMNICEANU, EM. N. SAULEA, I. C. SAVIN, I. C. NICOLAU-DOBRIDOR, din cari o mare parte au menţionat că problema e cunoscută şi se află propusă şi rezolvată în *Culegerea de Probleme* locul citat mai sus, precum şi în *Exercices de Trigonométrie F. G. M.,* pag. 99, No. 167 (Ed. 1915), precum şi propusă în *Trigonométrie* par CARLO BOURLET pag. 160.

COL. G. I. LITEANU.

PROBLEMA 4161. *Un dulap are şase sertare care se încheie cu 6 chei de acelaşi tip. Cheile fiind amestecate, care este numărul minimum şi numărul maximum de încercări ce trebuiesc făcute pentru a le descuia pe toate, când sunt închise ? Se va presupune mai întâi că cheile sunt toate diferite şi apoi că unele se potrivesc la mai multe sertare.*

I. IONESCU.

Consider cazul mai general când am avea de încuiat n sertare cu n chei.

Numărul minimum de încercări în ambele ipoteze, este evident n, când eventual de la prima încercare am nemerit cheia fiecărui sertar. In cazul problemei am avea dar de făcut minimum 6 încercări.

Pentru a găsi numărul maximum, în prima ipoteză, observăm că avem cazul cel mai defavorabil atunci când o cheie se încearcă la toate sertarele rămase nedescuiate. Astfel, prima cheie ar putea fi încercată la toate cele n sertare până să se potrivească; a doua la $(n-1)$ sertare; a treia la $(n-2)$ sertare, etc., iar ultima la ultimul sertar. Deci avem $[n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1] = \frac{1}{2}n(n+1)$ încercări. In cazul problemei am avea $\frac{1}{2}\times 6\times 7 = 21$ încercări.

In a doua ipoteză, fie a_i chei identice care se potrivesc la acelaşi număr a_i de sertare. Astfel a_1 ar fi numărul cheilor care se potrivesc numai la câte un sertar; a_2 al cheilor care se potrivesc la câte două sertare; ...; a_n al cheilor care se potrivesc la toate sertarele. Trebue să avem :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_i + \ldots + a_n = n,$$

unele din numerele din partea întâia a egalităţii putând fi şi nule. Luând o cheie din grupul a_1, cele mai numeroase încercări le-am face atunci când am încerca acea cheie la cele $(n-a_1)$ sertare la care nu se potriveşte şi apoi la unul din cele la care ea se potriveşte; deci am face $(n+1-a_1)$ încercări. Acelaşi număr de încercări l'am face cu cele a_1 chei ce se potrivesc la a_1 sertare; deci în total cu ele vom face $a_1(n+1-a_1)$ încercări. Cu grupul de chei a_2 procedăm la fel, numai că de data aceasta avem

libere numai $(n - a_1)$ sertare. Deci numărul încercărilor va fi $a_2\,(n + 1 - a_1 - a_2)$. Dacă notăm cu N numărul de încercări, găsim:

$$N = a_1\,(n + 1 - a_1) + a_2\,(n + 1 - a_1 - a_2) + \ldots$$

$$\ldots + a_i\,(n + 1 - a_1 - \ldots - a_i) + \ldots +$$

$$a_n\,(n + 1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_i - \ldots a_n),$$

$$\therefore N = (n+1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - \Sigma a_i^2 - \Sigma a_i\,a_k\,,\ (i \neq k)$$

$$\therefore N = (n+1)\,n - (\Sigma a_i^2 + 2\Sigma a_i\,a_k) + \Sigma a_i\,a_k$$

$$= (n+1)\,n - (\Sigma a_i)^2 + \Sigma a_i\,.\,a_k\,,$$

$$\therefore N = n^2 + n - n^2 + \Sigma a_i\,a_k = n + \Sigma a_i\,a_k\,. \qquad (i \neq k).$$

In demonstrație am presupus că cheile se încearcă în o anumită ordine. Rezultatul fiind simetric, ne arată că am fi obținut același lucru ori în orice ordine procedam. Deci rezultatul este independent de ordinea încercărilor.

In cazul problemei formula se reduce la:

$$N = 6 + \Sigma a_i\,a_k\,.$$

PANAIT C. MAZILU
(Elev-inginer)
Școala Politehnică din București.

O soluție bună și o generalizare a dat și D-l M. MARGULIS (Școala Politehnică, București); rezultatul nefiind pus însă sub o formă simplă.

Notă. Dacă nu considerăm ca încercare, reușita deschiderii unui sertar, atunci minimum se reduce la 0; maximum, în prima ipoteză, la $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$ și în a doua la $\Sigma a_i\,a_k$. In această din urmă ipoteză, și cu interpretarea dată aci enunțului, numărul maximum de încercări este 0 dacă toate cheile sunt identice; 5 dacă avem 5 chei identice și 1 deosebită; 8 dacă sunt 4 chei de un fel și 2 de alt fel; 9 dacă sunt 3 chei de un fel și 3 de alt fel sau 4 de un fel și celelalte diferite; 11 dacă sunt 3 chei de un fel, 2 de altul și 1 deosebită de ele; 12 dacă câte 2 chei identice sau 3 de un fel și celelalte deosebite; 13 dacă sunt 2 chei de un fel, 2 de alt fel și celelalte diferite; 14 dacă sunt 2 chei identice și celelalte diferite și 15 încercări, cel mult, dacă toate cheile sunt diferite.

I. I.

PROBLEMA 4244. *Dacă* B, C, D', C', A *sunt punctele în care o dreaptă taie două cercuri şi axul lor radical, să se demonstreze relaţiile:*

$$\frac{AB}{AC}\cdot\frac{AB'}{AC'}=\frac{\overline{BB'}^2}{\overline{CC'}^2},\quad \frac{AB}{AC}:\frac{AB'}{AC'}=\frac{\overline{BC'}^2}{\overline{CB'}^2}.$$

N. BOTEA.

Soluţie dată de D-rele MARIA DRĂGUŢ şi ELIZA MOISE (Studente, Cluj) şi D-nii: S.-LT. CONSTANTIN AVRAM (din Geniu), S.-LT. AUREL BĂDESCU (Reg. 2 Art. Grea), NICOLAE BORZA (Cl. VII. Cluj), VILHELM CSEKE (student, Cluj), PAUL DOBRESCU, OVIDIU MARCEL ELEFTERESCU, VINTILĂ GRIGORESCU, M. MĂNAC (elevi Lic. Militar N. Filipescu), DAN MARIN (Cl. VI. Lic. Militar N. Filipescu), PANAIT C. MAZILU (bacalaureat, Iaşi), N. N. MIHĂILEANU, MIRCEA LEONTE NEGREA (Brăila), MIRCEA POSTELNICESCU, ION ŞABAC (elevi Lic. Militar N. Filipescu), GEORGE SILAŞ (student, Cluj), MIHAIL STĂNEŞTI, ALEXANDRU D. STOICA (Lic. «Marele Voevod Mihai» Buc.), MARTIN S. ZIFF.

Axul radical a două cercuri fiind locul geometric al punctelor ce au puteri egale în raport cu cele două cercuri, vom avea:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{AB'}\cdot\overline{AC'}$$

egalitate ce se mai poate scrie sub formele:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}=\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}},\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}}=\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}}$$

sau aplicând proprietăţile cunoscute ale rapoartelor egale:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}=\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BC'}}{\overline{B'C}},\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}}=\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BB'}}{\overline{C'C}}$$

din care se deduce că:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}}\cdot\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BB'}^2}{\overline{CC'}^2}\quad\text{şi}\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}\cdot\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}:\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}=\frac{\overline{BC'}^2}{\overline{CB'}^2}.$$

Observaţie. D-l CEZAR IVĂNESCU (Bârlad) a dat o altă soluţie folosind proprietatea:

Diferenţa puterilor unui punct în raport cu două cercuri date e egală cu de două ori produsul distanţei centrelor celor două cercuri prin distanţa punctului dăt la axul radical al cercurilor *(Culegere de probleme de geometrie IX. 80).* N. B.

PROBLEMA 4296. *Să se arate că :*

$$\frac{\cos(3\alpha+\beta)+2\cos 2(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+3\beta)}{\cos 4\alpha+4\cos(3\alpha+\beta)+6\cos 2(\alpha+\beta)+4\cos(\alpha+3\beta)+\cos 4\beta}=\frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\frac{\cos(4\alpha+\beta)+3\cos(3\alpha+2\beta)+3\cos(2\alpha+3\beta)+\cos(\alpha+4\beta)}{\cos 5\alpha+5\cos(4\alpha+\beta)+10\cos(3\alpha+2\beta)+10\cos(2\alpha+3\beta)+5\cos(\alpha+4\beta)+\cos 5\beta}$$

$$=\frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

N. C.

Soluţie dată de D-ra BUNGEŢIANU PREDUŢA (Buc.) şi de D-nii : CEAUŞESCU V., COTEANU V., COZMA VIC., DĂSCĂLESCU C., HARABUZ GH., GAVRILESCU C., GHIBAN N., LEBĂDĂ I. D., MERCUREANU I., NEGOIŢĂ C. L., PETRESCU OCT., PRESADĂ P., RUSU GH., STĂNCULESCU GH., ŞTIRBU GH., STUPKANU EM., TEODOR D. şi VASILESCU M. (dela L. M. Iaşi); AMĂRICĂ T., APOSTOL V., CĂŞNEANU C., HARET I. C., ILIESCU D., NICOARĂ C., POPESCU GH. VL., TRĂSNITU N., VASILESCU C. N., VASILIU A. C., şi VASILIU MIRCEA (dela L. M. Cernăuţi); DOBRESCU P., GRIGORESCU V., MĂNAC M., MARIN DAN şi I. ŞABAC (dela L. M. «N. F.»), COŞOVLIU ŞT., FLORESCU HAR., MARTEŞ GR. MILLU N. şi MITACHE H. (L. M. Chişinău); G. SILAŞ şi VIL. CSEKE (student, Cluj); S.-LT. A. BĂDESCU (Fontainbleau); CHIRIAC C. (Şcoala Navală): COANDĂ VIRGIL, MAVRODIN D., AMĂRĂŞTEANU M. (Craiova); CORDOVA GH. (Corabia); RADA D. (Arad); GOLDENBERG M. E. (Brăila); STĂNESCU EM. şi M. S. NICHIFOR (Şc. Polit. Buc.).

Să considerăm prima expresie, care s'o numim E. Grupând şi la numărător şi la numitor, termenii echidistanţi de extremi împreună, şi aplicând formulele calculabile prin logaritm, avem:

$$E=\frac{2\cos 2(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\cos 2(\alpha+\beta)}{2\cos 2(\alpha+\beta)\cos 2(\alpha-\beta)+8\cos(\alpha-\beta)\cos 2(\alpha+\beta)+6\cos 2(\alpha+\beta)}$$

sau simplificând cu $2\cos 2(\alpha+\beta)$ $\left(\text{presupunând } \alpha+\beta\neq k\pi\pm\frac{\pi}{4}\right)$:

$$E=\frac{1+\cos(\alpha-\beta)}{\cos 2(\alpha-\beta)+4\cos(\alpha-\beta)+3}=\frac{1+\cos(\alpha-\beta)}{2\cos^2(\alpha-\beta)+4\cos(\alpha-\beta)+2}$$

$$=\frac{1}{2[1+\cos(\alpha-\beta)]}=\frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Procedând în acelaş mod cu cea de a doua expresie E', ce se poate scrie:

$$E' = \frac{2\cos\frac{5}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{3}{2}(\alpha-\beta)+6\cos\frac{5}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\cos\frac{5}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{5}{2}(\alpha-\beta)+10\cos\frac{5}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{3}{2}(\alpha-\beta)+20\cos\frac{5}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

$$= \frac{\cos\frac{3}{2}(\alpha-\beta)+3\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{5}{2}(\alpha-\beta)+5\cos\frac{3}{2}(\alpha-\beta)+10\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

$$= \frac{\left[\cos\frac{3}{2}(\alpha-\beta)+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]+2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\left[\cos\frac{5}{2}(\alpha-\beta)+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]+5\left[\cos\frac{3}{2}(\alpha-\beta)+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]+4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\frac{[1+\cos(\alpha-\beta)]\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{[4\cos(\alpha-\beta)+2\cos^2(\alpha-\beta)+2]\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{1}{2[1+\cos(\alpha-\beta)]} = \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}} \text{ Q.E.D.}$$

D-l AL. MATEI (abs. Şc. Sup. meserii, Buc.) transformă numitorii astfel încât pune în evidenţă numărătorii.

D-nii: D. MAVRODI, PANAIT MAZILU, M. S. NICHIFOR, T. STOICESCU şi N. N. VELICESCU generalizează relaţiile date, stabilind relaţia:

$$\frac{\sum_{p=1}^{n-1} C_{n-2}^{p-1}\cos[(n-p)\alpha+p\beta]}{\sum_{p=0}^{n} C_n^p\cos[(n-p)\alpha+p\beta]} = \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Cu ajutorul formulelor lui EULER (D-l T. STOICESCU pe o cale puţin diferită) pentru $n = 4$ şi $n = 5$ avem expresiile E şi E'.

D-nii P. MAZILU şi N. VELICESCU stabilesc şi relaţia:

$$\frac{\sum_{p=1}^{n-1} C_{n-1}^{p-1}\sin[(n-p)\alpha+p\beta]}{\sum_{p=0}^{n} C_n^p\sin[(n-p)\alpha+p\beta]} = \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

D-l P. C. MAZILU semnalează că pentru $n=2$ identitatea este stabilită de D-l V. ALACI în R. M. T., Anul XIII, pag. 130.

N. C.

PROBLEMA 4392. *Să se găsească numărul* N *de 2 cifre, ştiind că numărul de 6 cifre, ce se obţine scriind după* 2N *pe* N *şi apoi pe* 2N, *este patrat perfect.*

COL. GH. BUICLIU.

Soluţia I, dată de D-nii: P. C. MAZILU (Elev inginer, Bucureşti) şi V. CSEKE (Student, Cluj).

Dacă x^2 este patratul căutat, trebue să avem

$$x^2 = 2N \times 10000 + N \times 100 + 2N = 2 \times 19 \times 23^2 \times N$$

care arată că N trebue să fie de forma

$$N = 2 \times 19 \times m^2.$$

Cum N este de 2 cifre nu se poate lua decât $m=1$ şi atunci N este 38 aşa că patratul căutat este

$$x^2 = 763876 = 874^2.$$

Soluţia II, dată de D-nii: P. C. MAZILU, M. I. PREDOESCU, (Şc. Politehnică, Bucureşti); G. SILAŞ (Student, Cluj); O. I. MIHALCEA (Buzău); V. CEAUŞESCU, E. STUPCANU (Lic. Militar, Iaşi): I. I. ŢIŢEICA, GH. I. BOIANGIU, M. NĂSTASE, P. D. DOBRESCU (Lic. Militar, Târgovişte); M. AMĂRĂŞTEANU (Lic. Craiova); L. M. A. NEGREA (Brăila); D. D. MAVRODIN (Bacalaureat); C. I. CHIRIAC (Şc. Navală); T. STOICESCU şi M. MĂNAC.

2N fiind număr pereche de 2 cifre, terminaţie de pătrat perfect poate avea una din următoarele valori din şirul terminaţiunilor de 2 cifre ale unui patrat perfect:

00 , 04 , 16 , 24 , 36 , 44 , 56 , 64 , 76 , 84 , 96.

Formăm cu fiecare din aceste grupe, numere în condiţiile enunţului şi eliminăm prin descompunere în factori primi sau extrageri de rădăcini pe acelea care nu sunt patrate perfecte. Se găseşte astfel soluţia

$$874^2 = 763876.$$

Notă. 1°. D-l P. C. MAZILU a mai rezolvat pe calea de la soluţia I, o serie de alte probleme analoage. Astfel dacă N 2N şi 4N sunt numere de 2 cifre:

a) Patratele de forma N . 2N . N sunt $101^2 . m^2$ în care m este 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

b) Patratele de forma 4N . 4N . N sunt $201^2, m^2$ unde m este 1, 2, 3, 4.

c) Nu există patrate de forma N . N . N; N . 2N . 3N; N . 2N . 4N; 4N . 2N . N; 3N . 2N . N.

2°. O problemă analoagă cu aceasta este problema 420 din *Revista Matematică din Timişoara* în care ceream pătratul de forma N . 2N . 6N. Problema are numai soluţia

$$378^2 = 142884$$

şi s'a publicat la pag. 26 şi 37 Vol. VI al acelei reviste.

GH. B.

PROBLEMA 4397. *Să se găsească două ecuaţii de gradul II cu o rădăcină comună, care să fie semisuma rădăcinilor necomune.*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: G. SILAŞ (Student, Cluj), G. MARGULIES, D. MAVRODIN, V. N. BUCUR şi P. D. DOBRESCU.

Fie $2a$, $2b$ rădăcinile necomune şi deci $(a + b)$ rădăcina comună. Ecuaţiile cerute sunt:

$$\begin{cases} (x - 2a)\,[x - (a + b)] = 0, \\ (x - 2b)\,[x - (a + b)] = 0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x^2 - (3a + b)\,x + 2a\,(a + b) = 0, \\ x^2 - (a + 2b)\,x + 2b\,(a + b) = 0. \end{cases}$$

Au dat soluţii bune, dar pe căi mai lungi, D-ra GELLA BĂLĂCEANU (Studentă, Bucureşti), D-nii P. C. MAZILU şi M. I. PREDOIESCU (Şcoala Politehnică, Bucureşti), D-l CSEKE WILHELM (Student, Cluj), M. POSTELNICESCU, M. MĂNUC şi I. I. ŢIŢEICA (Liceul Militar, Monastirea Dealului), GH. GH. POPESCU (Craiova), V. I. C. VISARION, V. I. COANDĂ (Şcoala militară).

D-l A. DOBRESCU (Profesor, Râmnicul-Sărat) a tratat problema mai generală: *«Care sunt condiţiile pentru ca n ecuaţii de gradul II să aibă o rădăcină comună care să fie media aritmetică a rădăcinilor necomune?*

D-l P. D. DOBRESCU a mai dat sistemele:

$$\begin{cases} 2x^2 - (3b - c)\,x + b\,(b - c) = 0, \\ 2x^2 - (b + c)\,x + c\,(b - c) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - b\,(c + 1)\,x + b^2 c = 0, \\ x^2 - c\,(b + 1)\,x + c^2 b = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} cx^2 - b\,(c + 1)\,x + b^2 = 0, \\ cx^2 - (c^2 + b)\,x + cb = 0, \end{cases}$$

care au câte o rădăcină comună, respectiv semi-diferenţă, produs şi cât al rădăcinilor necomune.

EXERCIŢII

15. Să se găsească un număr de 8 cifre care să fie bi-bipătrat şi cub perfect.

M. AMĂRĂŞTEANU.

R. Extrăgând rădăcina patrată a unui număr N de 8 cifre, ea va fi de 3 sau 4 cifre:

$$\sqrt{N} = abcd = N_1 \text{ sau } \sqrt{N} = ctg = N_2$$

însă atât N_1 cât şi N_2 trebuesc să fie patrate perfecte; deci

$$\sqrt{N_1} \text{ sau } \sqrt{N_2} = mn.$$

mn trebuind să fie şi el patrat perfect iar rădăcina lui să fie un cub, trebue că:

$$\sqrt{mn} = p = u^3;$$

p fiind de o cifră urmează că $u = 1$ sau 2. Singura soluţie este:

$$N = 16777216 = 4096^2 = 256^3.$$

16. Să se găsească un pătrat de cinci cifre $abccd$ în care ccd să fie şi el pătrat perfect iar $a + b = 2c + d$.

TR. M. PREDOESCU.

R. Pătratele de trei cifre care au primele două cifre identice sunt 225 şi 441; deci pătratul căutat este de forma:

$$ab\,225 \text{ sau } ab\,441.$$

In acest caz ultima condiţie din enunţ devine: $a + b = 9$; condiţie de care dacă ţinem seama găsim că pătratul căutat este printre numerele: *18225,* 18441; *81225,* 81441; *27225,* 27441; 72225, 72441; 63225, 63441; 36225, 36441; 45225, 45441; 54225, 54441; 90225, 90441, dintre care numai numerele:

$$18225 = 135^2; \quad 27225 = 165^2 \text{ şi } 81225 = 285^2$$

sunt pătrate perfecte.

17. Să se găsească un număr prim de trei cifre, ştiind că una din cifre este media tangenţială între celelalte două cifre.

PANAIT C. MAZILU.

R. Căutăm să rezolvăm ecuaţia:

$$c = \frac{a \times b - 1 + \sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}}{a + b}$$

în întregi de câte o cifră; în acest scop facem produsele: $(a^2+1)(b^2+1)$:

2	înmulțit	cu	2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82
5	„	„	5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82
10	„	„	10, 17, 26, 37, 50, 65, 82
17	„	„	17, 26, 37, 50, 65, 82
26	„	„	26, 37, 50, 65, 82
37	„	„	37, 50, 65, 82
50	„	„	50, 65, 82
65	„	„	65, 82
82	„	„	82.

Se vede că din aceste produse sunt pătrate perfecte acelea în care $a=b$ și 2×50. În primul caz rezultă că $a=b=c$ deci numărul abc nu mai este prim. În cel de al doilea caz $a=1$ și $b=7$ de unde rezultă $c=2$. Cu cifrele 1, 27 putem forma șase numere dintre care prime sunt:

127 și 271.

PROBLEME PROPUSE

4451. Se cer două perechi de numere consecutive, astfel ca suma să fie formată numai din două cifre identice.

I. IONESCU.

4452. Într'un triunghiu ABC, ($BC=a$, $CA=b$, $AB=c$), cercul circumscris (O), și cercurile exînscrise (I_a), (I_b), (I_c) au ca raze R, r_a, r_b, r_c. Să punem $OI_a=d_a$, $OI_b=d_b$, $OI_c=d_c$. Avem relația:

$$\frac{(b+c)(R-r_a)}{d_a}\quad\frac{(c+a)(R-r_b)}{d_b}\quad\frac{(a+b)(R-r_c)}{d_c}=4.$$

V. THÉBAULT.

4453. Fie M un punct în planul unui triunghiu ABC și M_a, M_b, M_c respectiv simetricile lui în raport cu laturile BC, CA, AB. Să se demonstreze că avem:

$$a^2(a^2+\overline{AM}_a^2)+b^2(b^2+\overline{BM}_b^2)+c^2(c^2+\overline{CM}_c^2)=$$

$$a^2(b^2+c^2+\overline{AM}^2)+b^2(c^2+a^2+\overline{BM}^2)+c^2(a^2+b^2+\overline{CM}^2);$$

unde $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$.

ȘERBAN A. GHEORGHIU.

4454. Punctele de tangență ale cercului C cu alte două cercuri O_1 și O_2, care se taie în B_1 și B_2, fiind A_1 și A_2; să se arate că:

$$\overline{A_1B_1} \cdot \overline{A_2B_2} = \overline{A_1B_2} \cdot \overline{A_2B_1}.$$

GH. VASILIU.

4455. Se consideră trei puncte A_1, B_1, C_1 pe trei paralele duse prin vârfurile triunghiului ABC. Punctul A_1 se proiectează în A_b și A_c pe AC și AB. Analog obținem proiecțiunile B_c, B_a; C_a, C_b.

Perpendicularele coborîte din A, B, C respectiv pe $A_b A_c$, $B_c B_a$, $C_a C_b$ trec printr'un același punct.

N. BOTEA.

4456. Se dă un trapez în care bisectoarele unghiurilor formate de laturile neparalele cu baza mică se întâlnesc într'un punct pe baza mare.

Să se demonstreze că: 1°. Dublul ariei trapezului este egal cu semiperimetrul prin înălțime plus aria triunghiului format de cele două bisectoare și baza mică.

2°. Punctul de întâlnire al mediatoarelor triunghiului considerat, punctul de întâlnire al laturilor neparalele și punctul de întâlnire al bisectoarelor (situat pe baza mare) se găsesc pe aceeași dreaptă.

PETRE MIRESCU.

4457. Să se rezolve sistemul de ecuațiuni

$$x + y + z + u = 10 \qquad x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 100$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 30 \qquad x^4 + y^4 + z^4 + u^4 = 354.$$

M. AMĂRĂȘTEANU.

4458. Fără a se desvolta determinantul, să se deducă identitatea:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ a & 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & b & c \end{vmatrix} \equiv a^2c^2 (a + b + c)(a - b + c).$$

Generalizare.

AL. A. ROȘU.

4459. Să se calculeze valoarea determinantului:

$$D \equiv \begin{vmatrix} -\sin a & \sin b & \cos b & \cos a \\ \cos a & -\cos b & \sin b & \sin a \\ \sin b & \sin a & -\cos a & \cos b \\ \cos b & \cos a & \sin a & -\sin b \end{vmatrix}.$$

TUDOR STOICESCU.

4460. Să se stabilească identitatea:

$$\sum \frac{2\cos^3 A + \cos 3A}{bc} = -\frac{6\cos A \cos B \cos C}{R^2}$$

notațiunile fiind cele obișnuite într'un triunghiu.

C. IONESCU-BUJOR.

4461. Paralelele duse dintr'un punct al elipsei lui STEINER circumscrisă, la laturile unui triunghiu ABC, întâlnesc laturile triunghiului în șase puncte situate pe două drepte Δ_1 , Δ_2.

2. Fie I punctul comun lui Δ_1 și Δ_2: *a)* paralelele duse prin B și C la Δ_1 și Δ_2 se întâlnesc într'un punct O_1 situat pe AI; *b)* O_1 și punctele O_2 și O_3 obținute în mod analog sunt colineare;

3. Centrul de greutate al triunghiului ABC se găsește pe dreapta ce unește polurile lui Δ_1 și Δ_2 față de ABC.

GH. D. SIMIONESCU.

4462. Să se arate că

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{k=m} A_n^k A_{n-k}^{m-k} C_{n-k-1}^{m-k} = A_n^m C_n^m .$$

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{k=m} (k+1) A_n^k A_{n-k}^{m-k} C_{n-k-1}^{m-k} = A_{n+1}^m C_n^m$$

unde A_n^p este simbolul aranjărilor, iar C_n^p al combinărilor.

N. C.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu F. M. (4388, 413); *Bădescu A. Subloc.* (4407, 08, 09, 19); *Bălăceanu G. D-ra* (4312, 29, 67); *Boiangiu I. Gh.* (4304, 08, 09); *Bucur N. V.* (4392, 97, 429); *Caracudovici M.* (4385, 86); *Cehan G. Ar.* (4422); *Chiriac C.* (4411); *Dobrescu A.* (4345, P); *Enăşescu D. D. V.* (4418); *Gavrilescu N. C.* (4317, 92, 418, 23); *Grigorescu V.* (4388, 413); *Hilf A.* (4444); *Mănac M.* (4199); *Margulius M.* (4345, 54); *Mavrodin D.* (4215, 45, 386); *Mazilu C. P.* (4125, 246, 329, 439); *Mihalcea O.* (4409); *Negrea A. M. L.* (4402, 37); *Petrescu I. I.* (4155, 413); *Postelnicescu C. M.* (4409, 43, 44); *Rotaru Gh.* (4422); *Şabac Gh. I.* (4199, 293, 354, 88); *Sager N. I.* (4418, 22, 29); *Savovici Gh. Fl.* (4422); *Stănescu E.* (4317, 67); *Stoenescu Al.* (P); *Thébault V.* (N); *Ţiţeica I. I.* (2643, 4056, 312, 408, 09, 43, 44, E).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani compleţi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti 4.

M 2531

Biblioteca „ASTRA"
— SIBIU —

22

8 MAR 2014

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XL

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1935

SUMARUL

1. Cărţi vechi de matematică . . . . . *I. Ionescu*
2. Asupra unor determinanţi . . . . . *Nicolae Ciorănescu*
3. Calculul teoretic al vieţei ţevilor de arme şi tunuri . . . . . *Maior I. Linteş*
4. Note matematice: 22 — 24.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 243.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 2346, 3574, 3636, 3646, 3837, 3977, 4031, 4061, 4120, 4180, 4224.
9. Exerciţii: 18 — 21.
10. Probleme propuse: 4463 — 4474.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1935

74309

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Armamentului; **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 65, 66, 68, 70, 76, 80, 84, 89, 90, 91, 93, 95, 96, 99, 404, 06, 12, 14, 16, 17, 21, 26, 27, 28, 38, 40, 41, 42, 45, 46, 47, 49, 50, 52, 54, 56, 58, 61, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

Avem plăcerea a anunţa că dela 19 Decemvrie 1934 mai fac parte din Societatea noastră: D-ra E. MALAXA, licenţiată în matematici, şi D-nii: LT. ING. I. N. GEORGESCU, ING. D. LEONIDA, ING. N. MALAXA, PETRE MIRESCU, licenţiat în matematici, ING. AL. NICOLAU, LT. C-DOR. R. I. NICULESCU şi ING. G. POPESCU-BOTOŞANI.

CĂRȚI VECHI DE MATEMATICĂ

In Biblioteca D-lui D. LEONIDA se mai găsește următorul tratat de matematici generale tipărit pe formatul 100 × 160:

Directorium | mathematicum | ad cvjvs dvctvm et in | formationem | tota | **Mathesis** | et omnes ejvsdem par | tes nominatim **Arithmetica** | **Geometria** | **Astronomia** | **Geographia** | **Optica Harmonica** | **Mechanica** | Methodice doceri et faci | le disci possunt. | Authore | **M. Abdia Trew** Math | et phys. Prof. Publ. Fac. Philos | Seniore et Insp. Norico. | Typis Georgi Hagen Univers. Typogr.

Cartea este dedicată lui JOH. MICHAELIS DILHERRI, și are o prefață adresată tinerilor studioși. Ea poartă data de 19 Fevruarie 1657. Paginile au formatul 140 × 100 mm.

După o bogată *„Erată"*, se începe prima parte: **Arithmetica,** care are 46 pagini. Ea conține o expunere rapidă a numerației, operațiunilor cu numere întregi, fracții, fracții de fracții, diviziunea sexagenară, calcule cu numere complexe, proporții, progresii, *Regulam Detri* sau *Trium,* Regula de amestecătură, Regula falșelor pozițiuni, *Regula Algebrae* sau *Cossa.*

Partea a doua se ocupă cu **Geometria practică** în 38 pagini, unde se tratează probleme de construcții geometrice. Problema cuadraturii cercului o rezolvă luând $\pi = 22/7$, după ARCHIMEDE. Se arată cum se trasează secțiunile conice, se ocupă de corpurile solide și de noțiuni sumare, de trigonometria plană și sferică, logaritmi, *epipedometrica,* (calculul ariilor) și *stereometrica* (calculul volumelor).

Partea a treia este **Compedium Astronomiae.** Ea conține Astronomia sferică și Teoria planetelor și ocupă 55 pagini.

Partea a patra este **Compendium Geographiae,** și anume partea matematică privitoare la măsura pământului și fixarea poziținilor pe el. Ea ocupă 16 pagini.

Partea V este **Compendium Opticae** care are 12 pagini și coprinde catoptrica și dioptrica.

Partea VI este **Compendium Harmonicae,** care are 60 de pagini cu teoria matematică a muzicei și probleme referitoare.

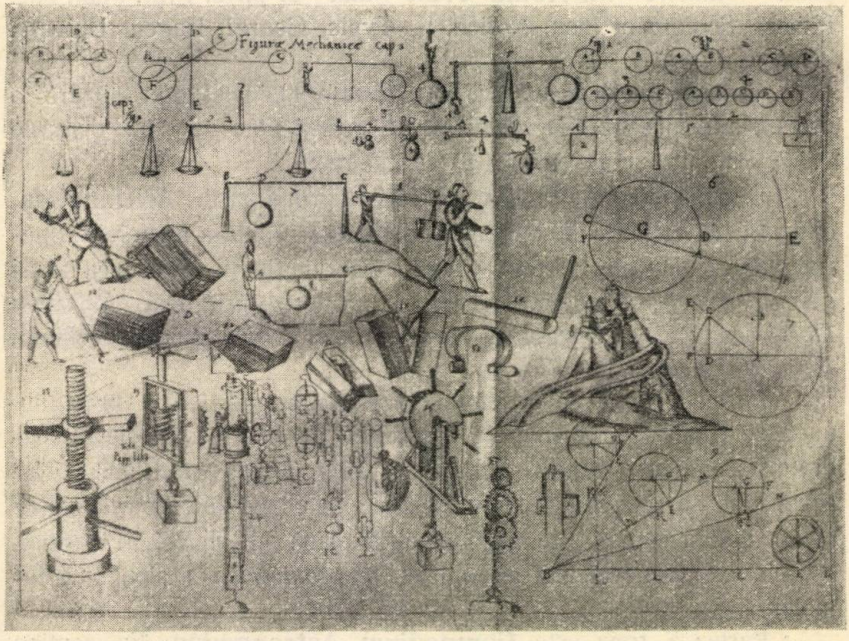
Partea VII este **Compendium Mecanicae,** care conține 16 pagini și după care reproducem planșa cu figuri, ca să se vază că

ideea de a da ilustrațiuni în Statică este veche. Autorul dă definițiuni, axiome, postulate. Vorbește de chestiuni tratate de ARCHIMEDE și PAPUS. Din tabloul reprodus se poate avea o idee destul de clară despre chestiunile tratate în această parte.

Cartea se încheie cu cuvintele:

„Lauda Dominum Anima mea in aeternum. Amen".

Legată la un loc cu cărțile citate mai sus, mai este o Carte germană cu titlul următor:



„Scema Mvndi | Oder | Abriss der Welt/ | Das ist: | **Der Himmels-und Erd-Kugel**/ | In welchem | So wohl die wahre Beschaffenheit der Himmlischen | Körper; als auch die völlige Abtheilung der Erden ins gemein/ nebst | andern hierzu gehörigen Stücken/ so klar und deutlich vorgestellt werden | das sie auch ein Knab fassend und begreiffen | kan | . Auf Ansuchen vieler Liebhaber | in gewisse Taffeln abgefasset/ | und zu männiglichen Nutzen/ zum andernmahl heraus gegeben: *Pungo sed protego.* | 1. Cor. VII. V. 31. | *Παράγε γῶ τὸ χῆμα τοῦ κοσμου τούτνο* | Jena/ druckts Jeremias Neppe/ Anno 1688. |

In 12 Tabele se explică părţile lumii, vorbeşte de paralele şi meridiane, de zodiac, constelaţii, rosa vânturilor, etc.

După această Carte de Cosmografie urmează una de geografie întitulată:

«Tabulae Geographicae | oder | **Tabellen-Buchlein** | daraus nicht nur | Diecalte Und Neue Erdbeschreibung, | sondern auch | Die Erkandtniss | Der Land-und See-Karten, | nicht vveniger | Aller Reiche, Monarchien, König | reiche, Fürstenthümer, Graff-herschaften, | Republicken und Völker | Der **Gantzen welt** | samz deren | Absonderlichen Landschafften und Pro | vincien, item wie solche Wiederum ein-und abgetheiltet | vverden können, auch welches die vornehhaften Städte | und Plätze darrinnen seyn | Mit leicher Mühe zu ersehn und sich | einzubilden | zu | Beqvemen Gebrauch | in Vnterschiedlichen Theilen | vorgestellet. | Frankfurt und Leipzig im Jahr | M DC LXXXVIII. | »

Titlul spune tot ce cuprinde Cartea, şi care îi este scopul! Tabela I dă numiri geografice; II Continentele; III Oceanele, Mările şi Fluviile; IV Ţările; V Insulele; VI Lumea nouă; VII Lumea veche; VIII Europa; IX Spania; X Italia; XI Franţa; XII Marea Britanie; XIII Germania; XIV Ţări germane în afară de imperiu unde găsim trecute părţi din Elveţia, Burgundia, Alsacia, Lorena, Luxemburg, Flandra, Olanda, Spania, etc. Tabela XV arată diviziunile şi oraşele germane din care nu lipsesc cele din Austria. Tabela XVI e o continuare a precedentei. Tabela XVII dă în detaliu Bavaria, în a VIII Danemarca, Suedia, Norvegia şi Finlanda; XIX Rusia la care pune şi «Budziack» dintre gurile Nistrului şi Dunării; a XX dă Polonia la care e trecută Ucraina, Lituania, Prusia; în a XXI este Ungaria. Aici găsim o Ungarie cum nu s'a mai pomenit! Regatul Ungarii are partea creştină între Dunăre, Drava până la Polonia, şi o parte Turcească între Dunăre, Tisa şi Transilvania. Ungaria avea însă încorporate pe atunci, 1688, — ne spune autorul, — Transilvania, Moldova cu Basarabia, Valachia, Bulgaria, Serbia, Bosnia, Croaţia, Salavonia, Dalmaţia! Pe Tabela XXII autorul se ocupă de Turcia Europeană, şi uită, dela o pagină la alta, ce dăduse Ungarii, căci spune că Turcia posedă parte din Ungaria superioară, parte din Ungaria inferioară, parte din Transilvania, parte din Croaţia, parte din Dalmaţia, şi întregi Moldova, Valachia, Bulgaria, Serbia, Bosnia. Cu modul acesta autorul s'a pus bine şi cu Ungurii şi cu

Turcii! Pe noi ne-a dat pe o pagină Ungurilor şi pe pagina următoare Turcilor! E cert însă că autorul nu ştia nici ce este Moldova, nici ce este Valachia, căci la descrierea imperiului turcesc ne spune că Nordul lui îl formează *„România"*. Pe aceeaşi tabelă dar se poate citi că Turcii posedau ca încorporate la Ungaria Moldova şi Valachia, dar că România făcea parte integrantă din Imperiul turcesc. Cu astfel de aranjamente şi menajamente matematica nu se împacă! De altfel nu trebue uitat că avem aci a face cu o geografie matematică!

I. IONESCU.

ASUPRA UNOR DETERMINANŢI

1. Intr'un articol precedent am dedus din valoarea determinantului de ordinul $n+1$, $D^n_{n+1} = \| (x_i + a_k)^n \| \ (i, k = 0, 1, \ldots n)$ valoarea altor determinanţi ce se deduc din D^n_{n+1}. Vreau să arăt acum cum se poate calcula valoarea a doi determinanţi analogi cu D^n_{n+1}. Voi considera întâi determinantul de ordinul n:

$$(1) \quad D^n_n = \begin{vmatrix} (x_1+a_1)^n & (x_1+a_2)^n & \ldots & (x_1+a_n)^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n+a_1)^n & (x_n+a_2)^n & \ldots & (x_n+a_n)^n \end{vmatrix} \equiv \| (x_i + a_k)^n \| \ (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Este evident că D^n_n se anulează dacă facem $x_i = x_k$ sau $a_s = a_r$. Ţinând seama de faptul că D^n_n este de grad n^2 în raport cu x_i sau a_k, putem scrie că:

$$(2) \quad D^n_n = h_n \, V_n(a_1, a_2, \ldots a_n) \, V_n(x_1, \ldots x_n) \, S_n(a_1, \ldots a_n; \, x_1, \ldots x_n)$$

$V_n(a_i)$ fiind determinantul VANDERMONDE de ordinul n, h_n o constantă, $S_n(a_i; x_k)$ fiind o funcţie omogenă, de grad n în raport cu a_i, a_k şi simetrică.

Prin considerații mai puțin elementare s'ar putea determina *a priori* expresia $S_n(a_i, x_k)$ de mai sus [1]). Noi vom da o metodă elementară, susceptibilă de a fi aplicată și în alte cazuri, cum vom vedea mai jos, ce permite calculul lui D_n^n.

2. Este evident că orice polinom de gradul n poate fi pus sub forma următoare:

$$(2)\quad P_n(x) \equiv A_0(x+a_0)^n + A_1(x+a_1)^n + \ldots + A_n(x+a_n)^n$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ fiind dați, Dacă observăm că derivata de ordinul m a polinomului (2) este:

$$(3)\quad P_n^{(m)}(x) = n(n-1)\ldots(n-m+1)\sum_0^n A_i(x+a_i)^{n-m}$$
$$= n(n-1)\ldots(n-m+1)\,P_{n-m}(x)$$

atunci formula lui TAYLOR pentru polinomul (2) se scrie:

$$(4)\quad P_n(x+h) = P_n(h) + C_n^1 P_{n-1}(h)\,x + C_n^2 P_{n-2}(h)\,x^2 + \ldots + C_n^n P_0(h)\,x^n.$$

Acestea fiind spuse să ne propunem următoarea problemă de interpelare: Să găsim, sub forma (2), polinomul de gradul n care se anulează pentru $x = x_1, x_2, \ldots x_n$, iar pentru $x = x_0$ este egal cu unitatea. Condițiile care determină pe A_i sunt:

$$(5)\quad \begin{cases} A_0(x_0+a_0)^n + A_1(x_0+a_1)^n + \ldots + A_n(x_0+a_n)^n = 1 \\ A_0(x_i+a_0)^n + A_1(x_i+a_1)^n + \ldots + A_n(x_i+a_n)^n = 0 \end{cases}$$
$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

Eliminând pe $A_0, A_1, \ldots A_n$ între relațiile (2) și (5) găsim că polinomul căutat este dat de relația:

$$(6)\quad \begin{vmatrix} P_n(x) & (x+a_0)^n & (x+a_1)^n \ldots & (x+a_n)^n \\ 1 & (x_0+a_0)^n & (x_0+a_1)^n \ldots & (x_0+a_n)^n \\ 0 & (x_1+a_0)^n & (x_1+a_1)^n \ldots & (x_1+a_n)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & (x_n+a_0)^n & (x_n+a_1)^n \ldots & (x_n+a\ )^n \end{vmatrix} = 0.$$

1) Vezi J. DIEUDONNÉ: Sur le théorème de Grâce et les relations algébriques analogues Bulletin de la Soc. Mathém. de France t. LX. 1932 p. 173. (De fapt ar trebui înlocuiți a_i prin $-a_i$, dar aceasta nu schimbă esențial rezultatul).

Pe de altă parte acest polinom este, cum se vede imediat:

$$(7)\qquad P_n(x) \equiv \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} = \frac{\sum_0^n (-1)^k p_k x^{n-k}}{\varphi(x_0)}$$

$p_1, p_2, \dots p_n$ fiind funcțiile simetrice fundamentale ale lui $x_1, x_2, \dots x_n$. Făcând deci în (4) $h = 0$ și ținând seama că:

$$P_p(0) = A_0 a_0^p + A_1 a_1^p + \dots + A_n a_a^p$$

rezultă că $A_0, A_1, \dots A_n$ sunt date și de sistemul:

$$(8)\qquad \begin{cases} A_0 + A_1 + \dots + A_n = \dfrac{1}{\varphi(x_0)} \\ A_0 a_0 + A_1 a_1 + \dots + A_n a_n = \dfrac{-p_1}{C_n^1 \varphi(x_0)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_0 x_0^n + A_1 a_1^n + \dots + A_n a_n^n = \dfrac{(-1)^n p_n}{C_n^n \varphi(x_0)}. \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem este $V_{n+1}(a_0, a_1, \dots a_n) \neq 0$ dacă $a_i \neq a_k$. Să comparăm valoarea lui A_0 obținută în cele două sisteme. Din (6) rezultă că avem:

$$(9)\qquad A_0 = \frac{D_n^n}{D_{n+1}^n}.$$

Pe de altă parte din sistemul (8) rezultă:

$$(10)\qquad \varphi(x_0)\, V_{n+1}(a_0, \dots a_n)\, A_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dfrac{-p_1}{C_n^1} & a_1 & \dots & a_n \\ \dfrac{p_2}{C_n^2} & a_1^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{(-1)^n p_n}{C_n^n} & a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Vom calcula acest determinant desvoltându-l după prima coloană. Minorii sunt determinanți de ordinul n, ce se calculează ușor, astfel:

Fie

$$(a-a_1)(a-a_2)\dots(a-a_n) = a^n - q_1 a^{n-1} + q_2 a^{n-2} + \dots + (-1)^n q_n$$

și deci:

$$(11)\quad a_i^n = q_1 a_i^{n-1} - q_2 a^{n-2} + \dots + (-1)^{n+1} q_n \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

și înlocuim elementele ultimei linii din aceşti minori, prin expresiile deduse din (11). Obținem astfel:

$$(12)\quad \varphi(x_0)\, V_{n+1}(a_0, \dots a_n)\, A_{\,} = \left(q_n + \frac{p_1 q_{n-1}}{C_n^1} + \frac{p_2 q_{n-2}}{C_n^2} + \dots + p_n\right) V_n(a_1, \dots a_n).$$

Comparând (9) cu (12) şi făcând simplificările posibile (reamintim că:

$$D_{n+1}^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} C_n^1 C_n^2 \dots C_n^{n-1}\, V_{n+1}(a_0, \dots a_n)\, V_{n+1}(x_0, \dots x_n))$$

găsim:

$$(13)\quad D_n^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} C_n^1 C_n^2 \dots C_n^{n-1}\, V_n(a)\, V_n(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{p_i\, q_{n-}}{C_n^i}\,.$$

Dacă înlocuim în D_n^n pe a_i prin $-a_i$ pentru toți indicii i, găsim că:

$$(13')\quad \Delta_n^n = \|(x_i - x_k)^k\| = C_n^1 C_n^2 \dots C_n^{n-1}\, V_n(a)\, V_n(x) \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{p_{n-i}\, q_i}{C_n^i}\,.$$

Factorul:

$$G_n(a\,;x) = \sum_{i=0}^{n} (-i)^i \frac{p_{n-i}\, q_i}{C_n^i}$$

este *forma apolară* a celor două grupe (a) şi (x). El intervine, între altele, şi în teorema bine cunoscută a lui GRACE.

3. Am spus că această metodă indirectă este susceptibilă de

a se aplica și la calculul altor determinanți analogi. Fie de calculat determinantul:

$$(14)\qquad D_n^{n+1} = \begin{vmatrix} (x_1+a_1)^{n+1} & (x_1+a_2)^{n+1} & \dots & (x_1+a_n)^{n+1} \\ (x_2+a_1)^{n+1} & (x_2+a_2)^{n+1} & \dots & (x_2+a_n)^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n+a_1)^{n+1} & (x_n+a_2)^{n+1} & \dots & (x_n+a_n)^{n+1} \end{vmatrix}.$$

Pentru asta, să ne propunem să determinăm un polinom de gradul $n+1$, sub forma (2) cu aceleași condiții, adică:

$$P_{n+1}(x_0) = 1 \quad ; \quad P_{n+1}(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots n).$$

Acest polinom este dat de relația:

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} P_{n+1}(x) & (x+a_0)^{n+1} & (x+a_1)^{n+1} & \dots & (x+a_n)^{n+1} \\ 1 & (x_0+a_0)^{n+1} & (x_0+a_1)^{n+1} & \dots & (x_0+a_n)^{n+1} \\ 0 & (x_1+a_0)^{n+1} & (x_1+a_1)^{n+1} & \dots & (x_1+a_n)^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (x_n+a_0)^{n+1} & (x_n+a_1)^{n+1} & \dots & (x_n+a_n)^{n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Pe de altă parte, expresia cea mai generală a polinoamelor de grad $n+1$, satisfăcând la aceste condiții este:

$$(16)\quad P_{n+1}(x) \equiv \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}[\lambda(x-x_0)+1]$$

λ fiind arbitrar.

Fie $p'_1, p'_2, \dots p'_n, p'_{n+1}$ funcțiile simetrice fundamentale ale lui $x_0, x_1, \dots x_n$. Atunci:

$$(16')\quad P_{n+1}(x) \equiv \frac{1}{\varphi(x_0)}\left[\lambda \sum_0^{n+1}(-1)^k p'_k x^{n-k} + \sum_0^n (-1)^k p_k x^{n-k}\right].$$

Prin urmare, coeficienții A_i ai polinomului căutat satisfac sistemul:

$$(17)\quad \begin{cases} A_0 + A_1 + \dots + A_n = \dfrac{\lambda}{\varphi(x_0)} \\ A_0 a_0^k + A_1 a_1^k + \dots + A_n a_n^k = (-1)^k \dfrac{\lambda p'_k - p_{k-1}}{C_{n+1}^k} \\ (k = 1, 2, \dots, n+1). \end{cases}$$

Găsim polinomul (15) scriind că acest sistem de $n+2$ ecuații cu $n+1$ necunoscute: A_i, este compatibil. Condiția de compatibilitate:

$$(18)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \dots 1 & 1 \\ a_0 & a_1 \dots a_n & \dfrac{-p'_1}{C^1_{n+1}} \\ a_0^2 & a_1^2 \dots a_n^2 & \dfrac{p'_2}{C^2_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^{n+1} & a_1^{n+1} \dots a_n^{n+1} & (-1)^{n+1} p'_{n+1} \end{vmatrix} \lambda = \begin{vmatrix} 1 \dots 1 & 0 \\ a_0 \dots a_n & \dfrac{1}{C^1_{n+1}} \\ a_0^2 \dots a_n^2 & \dfrac{-p_1}{C^2_{n+1}} \\ \vdots & \vdots \\ a_0^{n+1} \dots a_n^{n+1} & \dfrac{(-1)^n p_n}{C^{n+1}_n} \end{vmatrix} = 0$$

determină pe λ.

Din sistemul (17), în care λ are valoarea precedentă, scoatem din primele $n+1$ ecuații pe A_0:

$$(19)\quad \varphi(x_0)\, V_{n+1}(a_0, \dots a_n)\, A_0 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \dfrac{-p'_1 \lambda + 1}{C^1_{n+1}} & a_1 \dots a_n \\ \dfrac{p'_2 \lambda - p_1}{C^2_{n-1}} & a_1^2 \dots a_n^2 \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{(-1)^n p'_n \lambda - p_{n-1}}{C^n_{n+1}} & a_1^n \dots a_n^n \end{vmatrix}.$$

Dar din (15) deducem că A_0 este dat de:

$$(20)\qquad A_0 = \frac{D^{n+1}_n}{D^{n+1}_{n+1}}.$$

Să desvoltăm determinanții din (18) și (19).

Desvoltând după ultima coloană determinanții din relația (18) și însemnând cu: $q'_1, q'_2, \dots q'_{n+1}$ funcțiile simetrice fundamentale ale lui $a_0, a_2, \dots a_n$, avem întocmai ca în § precedent:

$$(18')\quad \left[\lambda S_{n+1} - \left(\frac{q'_n}{C^1_{n+1}} + \frac{p_1 q'_{n-1}}{C^2_{n+1}} + \dots + \frac{p'_n}{C^{n+1}_{n+1}}\right)\right] V_{n+1}(a_0, a_1, \dots a_n) = 0$$

unde:

$$(21)\qquad S_{n+1} = q'_{n+1} + \frac{p'_1 q'_n}{C^1_{n+1}} + \frac{p'_2 q'_{n-1}}{C^2_{n+1}} + \ldots + p'_{n+1}.$$

Din (18') scoatem pe λ, presupunând $S_{n+1} \neq 0$.

Desvoltând determinantul din (19) după prima coloană găsim:

$$(22)\ \varphi(x_0)\, V_{n+1}(a)\, A_0 = V_n(a)\left[\lambda\left(q_n + \frac{p'_1 q_{n-1}}{C^1_{n+1}} + \frac{p'_2 q_{n-2}}{C^2_{n+1}} + \ldots + \frac{p'_n}{C^n_{n+1}}\right) - \left(\frac{q_{n-1}}{C^1_{n+1}} + \frac{p_1 q_{n-1}}{C^2_{n+1}} + \ldots + \frac{p_{n-1}}{C^n_{n+1}}\right)\right].$$

Înlocuind pe λ prin valoarea lui, şi ţinând seama de (20) găsim:

$$(23)\qquad D^{n+1}_n = \frac{D^{n+1}_{n+1}\, V_n(a)}{\varphi(x_0)\, V_{n+1}(a)\, S_{n+1}}\, H_{n+1}(a\,;\,x)$$

unde:

$$(24)\quad \begin{cases} H_{n+1}(a\,;\,x) = \left[\dfrac{q_n}{C^1_{n+1}} + \dfrac{p_1 q_{n-1}}{C^2_{n+1}} + \ldots + p_n\right]\left[q_n + \dfrac{p'_1 q_{n-1}}{C^1_{n+1}} + \ldots + \dfrac{p'_n}{C^n_{n+1}}\right] \\ \quad - \left[q'_{n+1} + \dfrac{p'_1 q'_n}{C^1_{n+1}} + \ldots + p'_{n+1}\right]\left[\dfrac{q_{n-1}}{C^1_{n-1}} + \dfrac{p_1 q_{n-2}}{C^2_{n+1}} + \ldots + \dfrac{p_{n-1}}{C^n_{n+1}}\right]. \end{cases}$$

Ţinând seama de expresia dedusă din (13) a lui D^{n+1}_{n+1}, avem:

$$(23')\ D^{n+1}_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\, C^1_{n+1} C^2_{n+1} \ldots C^n_{n+1}\, V_n(a)\, V_n(x)\, H_{n+1}(a\,;\,x)$$

$H_{n+1}(a\,;\,x)$ depinde numai aparent de a_0 şi x_0 cum uşor se poate constata înlocuind pe:

$$p'_1 = p_1 + x_0\,;\ p'_2 = p_2 + p_1 x_0\,;\ \ldots\ p'_n = p_n + p_{n-1} x_0\,;\ p'_{n+1} = p_n x_0$$

$$q'_1 = q_1 + a_0\,;\ q'_2 = q_2 + q_1 a_0\,;\ \ldots\ q'_n = q_n + q_{n-1} a_0\,;\ q'_{n-1} = q_n a_0.$$

Făcând aceste substituţii în (24) avem că:

$$H_{n+1}(a\,;\,x) = \left(p_n + \frac{q_1 p_{n-1}}{C^1_{n+1}} + \ldots + \frac{q_n}{C^n_{n+1}}\right)\left(q_n + \frac{p_1 q_{n-1}}{C^1_{n+1}} + \ldots + \frac{p_n}{C^n_{n+1}}\right) - \left(\sum_1^n \frac{p_i q_{n+1-i}}{C^i_{n+1}}\right)\left(\sum_1^n \frac{p_i q_{n-i}}{C_{n+1}}\right).$$

Inlocuind peste tot pe a_k prin $-a_k$, avem în fine:

$$\Delta_n^{n+1} = C_{n+1}^1 C_{n+1}^2 \dots C_{n+1}^n V_n(a)\, V_n(x)\, G_{n+1}(a;x)$$

unde:

$$G_{n+1}(a;x) = \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{p_{n-i}\, q_i}{C_{n+1}^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{p_i\, q_{n-i}}{C_{n+1}^i}\right)$$

$$-\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{p_{n+1-i}\, q_i}{C_{n+1}^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{p_i\, q_{n-i}}{C_{n+1}^i}\right)$$

$G_{n+1}(a;x)$ fiind o formă apolară de ordinul $(n, n; 2, 2)$.

NICOLAE CIORĂNESCU.

CALCULUL TEORETIC AL VIEȚEI ȚEVILOR DE ARME ȘI TUNURI

In general viața unei guri de foc se exprimă prin numărul total de proectile ce îl trage, până ce uzura țevei face ca *precizinea* tragerii să scadă la jumătate (abaterea probabilă se dublează).

Un proectil asvârlit consumă o energie:

$$1) \qquad W = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot V_0^2$$

m fiind masa proectilului și V_0 viteza inițială. Pentru N proectile, energia totală va fi: NW.

Dar energia dezvoltată în țeavă va avea și un efect rău, un efect de *uzură,* producând «erodarea» suprafeței interioare (o tăiere și o smulgere prin îndoire sau forfecare a moleculelor).

Rezistența materialelor ne arată însă că lucrul mecanic la îndoire sau tăiere poate fi exprimat sub forma:

$$2) \qquad U_0 = K \cdot \frac{M^2 \cdot \varepsilon}{E \cdot I}$$

unde M și I sunt ori moment de flexiune și inerție, ori de torsiune

şi inerţie polară; E modul de elasticitate la tracţiune sau alunecare, ε grosimea stratului erodat şi k un coeficient numeric.

Dar mai ştim că :

$$M = \frac{I}{V} . R$$

R fiind rezistenţa admisibilă şi $\left(\frac{I}{V}\right)$ modulul de rezistenţă. Apoi dacă ne alegem formele eprubetelor elementare aşa fel încât să avem :

$$I = S . V^2$$

atunci avem :

$$3) \qquad U_0 = k . \frac{S . R^2 . \varepsilon}{E}$$

S, fiind suprafaţa erodată.

In *„Mémoriale de l'Artillerie"* Tome I. Fasc. 4 — 922, D-l LÉTANG arată că :

$$4) \qquad \varepsilon = g . \frac{\omega}{\Omega_0}$$

unde g depinde de massa metalului, massa şi viteza gazelor, iar ω greutatea încărcăturei şi Ω_0 suprafaţa iniţială de ardere.

Dar lucrul U_0 de uzură este presupus că se efectuiază în condiţiuni ideale de utilizare, adică se trage în «cadenţă normală» n_0 (cadenţa fiind numărul de lovituri pe minut).

In cazul când nu se respectă cadenţa normală şi se trage cu o cadenţă n, atunci temperaturile crescând în ţeavă, rezistenţa ei scade. Admitem apoi, cu aproximaţie suficientă, că rezistenţa admisibilă scade linear pe măsură ce temperatura creşte, iar temperatura proporţional cu cadenţa, atunci avem :

$$5) \qquad R_1 = R . \frac{n_0}{n} .$$

Cu acestea, echivalenţa energiilor mecanice ne permite să scrim relaţia :

$$N . W = U$$

de unde :

$$6) \qquad N = k \,.\, g \,.\, \frac{S \,.\, R^2}{W \,.\, E} \cdot \left(\frac{n_0}{n}\right)^2 \cdot \frac{\omega}{\Omega_0} \,.$$

Dar mai admitem că

$$7) \qquad S = x \,.\, a^2$$

unde a este calibru, iar x un coeficient numeric, relație ușor de stabilit.

Apoi mai știm că rezistența admisibilă variază ușor când secțiunea eprubetelor variază mult (abaterea dela legea lui HOOCK), atunci putem scrie că :

$$8) \qquad R_2 = R \,.\, a^{-\alpha}$$

exprimând variația tot în funcție de calibru, α fiind un coeficient numeric pozitiv.

Făcând notația :

$$A = k \,,\, g \,.\, x$$

formula 6) se mai poate scrie :

$$9) \qquad N = A \,.\, \frac{a^{2+\alpha} \,.\, R^2}{W \,.\, E} \cdot \left(\frac{n_0}{n}\right)^2 \cdot \frac{\omega}{\Omega_0} \,.$$

Din date numerice, pentru țevi de oțel, am dedus că :

$$A = 770$$

iar :

$$\alpha = 0 \qquad \text{pentru} \quad a \leqslant 100^{m}/_{m}$$

$$\alpha = -\,0{,}5 \qquad » \qquad a > 100^{m}/_{m} \,.$$

Cum $E = 22.000$ kg./mm² pentru oțel și $\frac{\omega}{\Omega_0} \cong 0{,}5$ pentru pulberile actuale, avem :

10) $$N = 0{,}0175 \cdot \left(\frac{n_0}{n}\right)^2 \cdot \frac{R^2 \cdot a^{2+\alpha}}{W}$$

R se exprimă în kg./mm².,

a » » » mm.,

W » » » tone-metri.

Observaţiuni:

1) Determinarea numerică din experienţă a coeficientului A se face în condiţia scăderei preciziunei la jumătate.

2) De asemenea coeficientul A şi α mai corectează şi efectul dinamic al gazelor, transpus pe o formulă statică.

3) Coeficientul A şi α mai cuprinde şi frecarea proectilului (cea mai mare parte însă intră în W).

4) Căpitanul JUSTROW din artileria germană a stabilit în *„Theoretische Betrachtung über die Lebensdauer unserer Geschütze"* următoarea formulă pentru viaţa ţevilor:

$$N = \frac{\alpha \cdot \beta}{a} \cdot \frac{c \cdot V_0^2}{\lambda} \cdot \frac{E \cdot A}{f \cdot R}$$

unde α, β sunt nişte parametri variabili, primul cu presiunea, celălalt cu calibru, c este raportul dintre greutatea proectilului şi cubul calibrului, λ lungimea ţevei în calibre, f un coeficient de frecare, R rezistenţa la strivire a brâului, A alungirea metalului ţevei şi E elasticitatea.

Formula are un caracter pur empiric şi devine paradoxală când o citim, în sensul matematic, că viaţa unei ţevi creşte cu patratul vitezei.

MAIOR I. LINTEŞ.

NOTE MATEMATICE

22. *O neegalitate cu numere întregi.*

Numerile a, b, c fiind întregi şi pozitive, îmi propun să arăt că, dacă $a < b$, atunci avem:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c < \frac{b!\,(a+c)!}{a!\,(b+c)!}.$$

In adevăr, observăm că dacă $a < b$ atunci avem:

$$\frac{a}{a+1} < \frac{b}{b+1}$$
$$\frac{a}{a+2} < \frac{b}{b+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{a}{a+c} < \frac{b}{b+c}$$

Inmulțind neegalitățile între ele, obținem:

$$\frac{a^c}{(a+1)(a+2)\ldots(a+c)} < \frac{b^c}{(b+1)(b+2)\ldots(b+c)}$$

de unde printr'o grupare convenabilă, dăm peste inegalitatea ce ne-am propus.

MAIOR I. LINTEȘ

23. *Asupra problemei 4293. G. M. XXXIX p. 38.*

Voim să demonstrăm câteva proprietăți sugerate de configurația problemei 4293. Pentru aceasta vom schimba notațiunile.

Dreapta Δ întâlnește laturile triunghiului ABC în A', B', C', iar vârfurile lui ABC se proectează în A_1, B_1, C_1 pe Δ. Mai considerăm punctele A_c, A_b, B_a, B_c, C_b și C_a, respectiv mijloacele segmentelor A'B, A'C, B'C, B'A, C'A și C'B și punctele:

$$A_2 \equiv (C_1B_a,\ B_1C_a)\ ,\ B_2 \equiv (A_1C_b,\ C_1A_b)\ ,\ C_2 \equiv (C_1A_c,\ A_1B_c).$$

1°. *Punctele* A_2, B_2, C_2 *sunt colineare.* Se observă că:

$$C_1B_a \parallel A_1B_c\ ;\ A_1C_b \parallel B_1C_a\ ;\ B_1A_c \parallel C_1A_b.$$

Dacă se mai consideră punctele:

$$M \equiv (B_1C_2,\ A_2C_1)\ ,\ N \equiv (C_1B_2,\ A_2B_1)$$

triunghiurile asemenea $B_1C_2A_1$ și B_1MC_1 dau:

$$\frac{B_1C_2}{C_2M} = \frac{B_1A_1}{A_1C_1},$$

iar triunghiurile asemenea $C_1A_1B_2$ şi C_1B_1N dau

$$\frac{NB_2}{B_2C_1} = \frac{B_1A_1}{A_1C_1}.$$

Rezultă de aci:

$$\frac{B_1C_2}{C_2M} = \frac{NB_2}{B_2C_1}$$

şi deci colinearitatea punctelor A_2, B_2, C_2.

2°. *Dreapta* $A_2B_2C_2$ *este perpendiculară pe dreapta* Δ [1]).

3°. Dacă dreapta Δ se deplasează păstrându-şi direcţia, triunghiul $B_1C_1A_2$ rămâne egal cu el însuşi şi punctul A_2 se mişcă pe dreapta Δ' perpendiculară pe Δ.

La toate dreptele δ paralele cu Δ corespunde deci numai o dreaptă Δ' perpendiculară pe direcţia dreptelor δ şi invers tuturor dreptelor δ' paralele cu dreapta Δ', adică tuturor dreptelor perpendiculare pe direcţia dreptelor δ, le corespunde numai o dreaptă Δ paralelă cu direcţia dreptelor δ.

4°. *Dreptele* Δ *şi* Δ' *se intersectează într'un punct* Ω *al cărui loc este cercul lui* EULER *al triunghiului* ABC, *atunci când direcţiile dreptelor* δ *şi* δ', *perpendiculare între ele, variază.*

Alegem câte o dreaptă particulară din grupul de drepte paralele cu Δ şi Δ', anume pe acele ce trec prin A, fie Δ_a, Δ_b. Dacă B_δ, C_δ sunt proecţiile punctelor B şi C pe Δ_a, iar B_m, C_m mijloacele laturilor AC, AB. Este uşor de văzut că Ω este la intersecţia dreptelor B_mC_δ, C_mB_δ. Cum unghiul $B_m\Omega C_m$ este egal cu unghiul BAC, punctul Ω se găseşte pe cercul lui EULER al lui ABC.

THEODOR G. COCEA.

1) D-l COCEA demonstrează această proprietate prin geometrie analitică. Soluţia sa neprezentând interes o înlocuim cu următoarea soluţie geometrică:

Fie *abc* un triunghiu simetric cu ABC, în raport cu o dreaptă paralelă cu Δ şi fie φ ortopolul dreptei Δ în raport cu *abc*. Avem $B_1A_2 \parallel ab$; $C_1A_2 \parallel ac$ şi cum $B_1\varphi \perp ac$, $C_1\varphi \perp ab$, punctul φ este ortocentrul triunghiului $B_1C_1A_2$. Dacă Δ' este o dreaptă dusă prin φ, perpendiculară pe Δ, A_2 se găseşte pe această dreaptă. Analog se arată că B_2 şi C_2 se găsesc pe Δ'.

N. B.

24. *Relații într'un triunghiu semidreptunghic.* Numesc triunghiu semidreptunghic un triunghiu, care are un unghiu de 45^0. Fie $A = 45^0$.

Acestui triunghiu i se pot stabili relații interesante prin următoarele procedee:

1. *Primul procedeu.* Se înlocueşte în relațiile cunoscute dintr'un triunghiu oarecare, liniile unghiului A prin valorile corespunzătoare, adică

$$\sin A = \cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \; \operatorname{tg} A = \operatorname{cotg} A = 1 \quad \sec A = \operatorname{cosec} A = \sqrt{2}, \text{ etc...}$$

Exemple: Relațiile cunoscute

(1) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$

(2) $\operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} C \cdot \operatorname{cotg} A = 1$

(3) $$\frac{\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} + \frac{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} + \frac{\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A}{\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A} = 1$$

se transformă pentru triunghiul semidreptunghic în A astfel:

(1') $1 + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$

(2') $\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cotg} C = 1$

(3') $$\frac{1 + \operatorname{cotg} B}{1 + \operatorname{tg} B} + \frac{1 + \operatorname{cotg} C}{1 + \operatorname{tg} C} + \frac{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = 1.$$

Deasemenea din

(4) $$2S = \frac{a^2}{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C} = \dots$$

rezultă

$$\frac{b^2}{1 + \operatorname{cotg} C} = \frac{c^2}{1 + \operatorname{cotg} B} \; .$$

2. *Al doilea procedeu.* Se consideră triunghiul ortic A'B'C' al triunghiului semidreptunghic ABC. Se ştie că, A', B', C', a', b', c' fiind respectiv elementele triunghiului ortic, avem (C. P. Trig. XIX, 13):

(I) $$\begin{cases} A' = 180^0 - 2A \; ; \; B' = 180^0 - 2B \; ; \; C' = 180^0 - 2C \\ a' = a \cos A \quad ; \; b' = b \cos B \quad ; \; c' = c \cos C. \end{cases}$$

Ori cum $A = 45^0$, rezultă $A' = 90^0$. Deci: *Dacă triunghiul* ABC *este semidreptunghic în* A, *triunghiul său ortic* A'B'C' *este dreptunghic în* A' *şi reciproc.*

In baza relațiilor de legătură (I), oricărei relații $F(a', \ldots A', \ldots) = 0$ ce există între elementele triunghiului dreptunghic A'B'C', îi corespunde o relație analoagă $F(a\cos A, \ldots 180^0 - 2A, \ldots) = 0$, ce există între elementele triunghiului semidreptunghic ABC.

Exemple. Din relațiile cunoscute în triunghiul dreptunghiu A'B'C'

$$(5) \qquad b'^2 + c'^2 = a'^2 \quad , \quad (6) \quad \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} B' = \frac{c' + a'}{b'}$$

$$(7) \qquad \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} B' + \operatorname{tg} \frac{1}{2} C'} - \frac{1}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} B' + \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C'} = 1$$

se deduc relațiile din triunghiul semidreptunghic ABC :

$$(5') \quad b^2 \cos^2 B + c^2 \cos^2 C = a^2 \cos^2 A \quad (6') \quad \operatorname{tg} B = \frac{c \cos C + a \cos A}{b \cos B}$$

$$(7') \qquad \frac{1}{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C} - \frac{1}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = 1.$$

La fel se pot găsi și alte relații.

Procedeul acesta, bazat pe legătura ce există între triunghiul ABC și triunghiul său ortic A'B'C', se poate folosi și în cazul unui triunghiu oarecare ABC. Astfel considerând relația

$$(p' - a') \sin^2 \frac{A'}{2} + (p' - b') \sin^2 \frac{B'}{2} (p' - c') \sin^2 \frac{C'}{2} = \frac{S'}{2R'}$$

ce există într'un triunghiu oarecare A'B'C' (respectiv triunghiul ortic), obținem pe baza relațiilor (I) și ținând seamă și de

$$p' = \frac{s}{R} \quad , \quad s' = 2s \cos A \cos B \cos C \quad , \quad R' = \frac{R}{2}$$

relația următoare

$$(s - aR \cos A) \cos^2 A + (s - bR \cos B) \cos^2 B + (s - cR \cos C) \cos^2 C = 2s \cos A \cos B \cos C,$$

care face obiectul problemei 4228 propusă de subsemnatul.

CEZAR IVĂNESCU.

BIBLIOGRAFIE

The Matematical Gazette. Vol. XVIII. No. 231. Decemvrie 1934. Londra. O notă asupra conjugatelor isogonale de J. CLEMOW. Norocul şi o veche enigmă de joc de cărţi, de R. A. FISCHER. Asociaţiunea britanică, 1934. Lucrări matematice şi fizice, de W. H. McCREA. Teoria statistică a mişcărilor turbulente, de G. F. P. TRUBRIDGE. Extensiuni şi implicaţiuni ale liniei lui SIMPSON, de N. M. GIBBINS. Generalizarea teoremei lui PLÜCKER de N. M. GIBBINS.

Mathesis. Tomul XLVIII. No. 9. Noemvrie 1934. Gembloux. Chestiuni de Aritmetică, de V. THÉBAULT. Asupra unui fascicol punctual de cubice nodale, de R. DEAUX. Asupra axei ortice a unui triunghiu, de R. GOORMAGHTIGH. Asupra geometriei tetraedrului, de J. LEEMANS. Consrucţia normalei şi a centrului de curbură în un punct al curbelor al cărora bicornul e un caz particular, de R. BOUVAIST.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIV. No. 10. Decemvrie 1934. Timişoara. Determinarea unei funcţiuni periodice de variabilă întreagă, de E. VISA. Asupra problemei 1342, de COL. GH. BUICLIU.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXVII. Fascicola IV. Aprilie 1934. Buenos Aires.

Revista Ştiinţifică „V. ADAMACHI". Vol XX. No. 3. Septemvrie 1934. Iaşi.

Boletin Matematico. Anul VII. No. 6. August 1934. Buenos Aires. Congruienţe de clase superioare de M. O. GONZALEZ. Formule analoage cu formula mediei, de B. I. BAIDAFF.

Ştiinţă şi Progres. Anul I. No. 7. Decemvrie 1934. Târgul Mureş. Câteva aspecte ale matematicei franceze contimporane. (Dintr'o conferinţă ţinută la Cluj în Noemvrie 1934), de P. SERGESCU.

Journal de Mathematiques Élémentaires. Anul 59. No. 5. Decemvrie 1934. Paris.

MICHAIL ST. BOTEZ. *Sur la projection bicentrale.* Teză prezentată Universităţii din Geneva pentru Doctoratul în Ştiinţele matematice. Susţinută la 12 Iulie 1934. Timişoara, 1934.

H. MYER. *Microscopul electronic.* Iaşi, 1934.

CAĬUS JACOB. *Sur un problème de* DIRICHLET-NEUMANN *pour les fonctions de deux variables complexes.* (Extras din *Soixante septième Congrès des Société savantes).* 1934.

CAĬUS JACOB. *Sur le problème de* DIRICHLET *pour les fonctions de plusieurs variables complexes.* (Extras din *Bulletin des sciènces mathématiques).* Paris 1934.

CAÏUS JACOB. *Sur un problème concernant les jets gazeux.* (Extras din *Mathématica).* Cluj, 1934.

CAÏUS JACOB. *Sur quelques problèmes généralisés de* DIRICHLET-NEUMANN *pour les aires multiplement connexes.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris).* Paris, 1934.

M. GHERMANESCO. *Sur le théorème de Picard.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences).* Paris 1934.

M. GHERMANESCO. Sur les équations fonctionnelles linéaires d'ordre infinis. (Extras din *Rendinconti della R. Accademie Nazionale dei Lincei).* Roma, 1934).

CERERI

243. In anul 1860, cursurile de matematici la Şcoala de silvicultură au fost predate de renumitul inginer de pe vremuri C. ANINOŞIANU. Se cunosc acele cursuri sau cel puţin programul lor?

I. I.

DIVERSE

Societatea Română de Ştiinţe, Secţiunea Matematică, a ţinut şedinţă în seara zilei de 3 Decemvrie. D-l P. SERGESCU a prezentat o lucrare a D-lui TH. ANGHELUŢĂ asupra unei integrale a lui DENJOY şi a făcut o comunicare asupra polinoamelor secţiuni ale fracţiilor raţionale.

La şedinţa din seara zilei de 17 Decemvrie, D-l D. BARBILIAN a făcut o comunicare asupra unor metrice ale lui BLASCHKE şi D-l N. CIORĂNESCU despre un logaritm pentru desvoltarea unei funcţii de funcţie analitică.

Sporirea Bibliotecei

DR. HEINRICH WILLGROD. Arithmétique, einschliesslich Algebra.
Donată de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

E. COMBETTE. Mécanique élémentaire.
Donată de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

WITOSSYNSKI. La mécanique des profils d'aviation.
Donată de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

LUCIEN GODEAU. La géométrie.
Donată de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

SĂULESCU. Manual de Topografie.
Donată de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

JORGE DUCLOUT. Materio, Energio, Relatividad.
Donată de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

American Journal of Mathematics. Vol. LIII. No. 2.
Donată de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

N. WUIK. Lehrbuch der äusseren Ballistik.
Donată de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

PAUL MONTEL. Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes. Paris 1932.
Donată de D-l P. SERGESCU.

P. DUCASSE. L'inquiétude du concret et les voies nouvelles de la connaissance. (Două numere din *Revue de synthèse*). Paris 1933, 1934.

Universitatea din Cluj. Seminarul de Matematici. Activitatea didactică şi ştiinţifică. 1932—1933. Cluj.
Donată de D-l P. SERGESCU.

ION GIURCOVICI. *Notions de mathématiques. Cours forestier.* Manuscris urmat de *« De l'Economie forestière »*. Bucureşti, 1852. Decemvrie.
Donat de D-l INGINER I. S. ANTONIU.

ION GIURCOVICI. *Notions de botanique. Cours forestier.* Manuscris. Bucureşti, Decemvrie 1852.
Donat de D-l INGINER I. S. ANTONIU.

A. VOSS. *Ueber das Wesen der Mathematik.* Lipsca 1908.
Donată de D-l INGINER I. IONESCU.

PROBLEME REZOLVATE*

PROBLEMA 2346. 1°. *Să se găsească limita expresiunei*

$$[1 + \operatorname{tg}(\alpha^2 + \beta^2)\, x]^{\operatorname{cotg}(2\beta - 2x - 1)\, x}$$

pentru $\lim x = 0$.

2°. *Presupunând că* α *şi* β *reprezintă coordonatele unui punct* M *din plan, să se găsească locurile geometrice ale punctului* M, *astfel încât limita expresiunei date să fie succesiv* 1, e *şi* 1/e ; e *fiind baza logaritmilor neperieni.*

I. BANCIU.

*) A mai rezolvat problema No. 4328 şi D-ra G. BĂLĂCEANU (studentă, Bucureşti). A. P.

Soluţie dată de D-l L. M. A. NEGREA (Brăila).

1°. Expresiunea dată, pe care o notez cu **E**, ia forma nedeterminată 1^{∞} pentru $lim\ x = 0$. Luând logaritmul neperian, obţin

$$(1) \qquad \text{Log. } E = \frac{\text{Log. } [1 + \text{tg } (\alpha^2 + \beta^2)\, x]}{\text{tg } [2\beta - 2\alpha - 1]\, x}$$

care la limită se prezintă sub forma nedeterminată $\frac{0}{0}$. Aplic în (1) regula lui HOPITAL, luând raportul derivatelor termenilor fracţiei şi trecând la limită. Se găseşte

$$Lim._{x \to 0} \text{Log.} E = Lim. \frac{\dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{[1 + \text{tg } (\alpha^2 - \beta^2)\, x] \cos^2 (\alpha^2 - \beta^2)\, x}}{\dfrac{2\beta - 2\alpha - 1}{\cos^2 (2\beta - 2\alpha - 1)\, x}} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\beta - 2\alpha - 1}$$

de unde rezultă

$$y = Lim.\, E = e^{\frac{\alpha^2 \beta^2}{2\beta - 2\alpha - 1}}.$$

2°. *a)* Pentru ca y să fie 1 trebue să avem simultan

$$\alpha^2 - \beta^2 = 0 \quad \text{şi} \quad 2\beta - 2\alpha - 1 \neq 0.$$

Prima condiţie, în care α şi β sunt coordonate, arată că locul lui M (α, β) sunt bisectoarele

$$\alpha \pm \beta = 0$$

axelor de coordonate, iar condiţia a doua arată că punctul $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ de pe bisectoara

$$\alpha + \beta = 0$$

nu face parte din loc.

b) Pentru ca y să fie egal cu e, trebue ca

$$\text{Log. } y = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\beta - 2\alpha - 1} = 1$$

care arată că locul lui M este hiperbola echilateră

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha - 2\beta + 1 = 0$$

cu centrul în $(-1, -1)$.

c) Ca y să fie egal cu $1/e$, trebue ca

$$\text{Log. } y = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\beta - 2\alpha - 1} = -1$$

care arată că locul lui M este hiperbola echilateră

$$\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha + 2\beta - 1 = 0$$

cu centrul în (1, 1).

Notă. Să notăm cu p şi q două polinoame oarecare în α şi β. Se găseşte că limita expresiunii

$$[1 + \text{tg}px]^{\text{cotg}qx}$$

pentru *lim.* x egală cu zero, este

$$y = e^{\frac{p}{q}}$$

iar locul geometric al unui punct M din plan pentru care această limită este un număr dat k, este curba

$$p = q \text{ Log. } k \qquad (2)$$

logaritmul fiind luat în baza e.

Dacă p şi q sunt polinoame în α, β, γ, atunci locul lui M este o suprafaţă de ecuaţie (2).

GH. B.

PROBLEMA 3574. *Se dau patru drepte echidistante paralele* Δ_0 , Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 *care taie o axă* Ox *perpendiculară pe ele în punctele* M, N, O, P.

Se consideră: **strofoida** *cu punctul dublu în* O, *asimtota* Δ_3, *iar bucla taie a doua oară pe* Ox *în* N şi **cisoida** *cu punctul dublu* N, *având ca axă de simetrie* Ox, *iar ca asimptotă pe* Δ_2.

Să se arate că trei paralele duse prin M, N *şi* O, *taie respectiv pe* Δ_1, *cisoida şi strofoida în trei puncte colineare pe o dreaptă, ce înfăşoară o parabolă.*

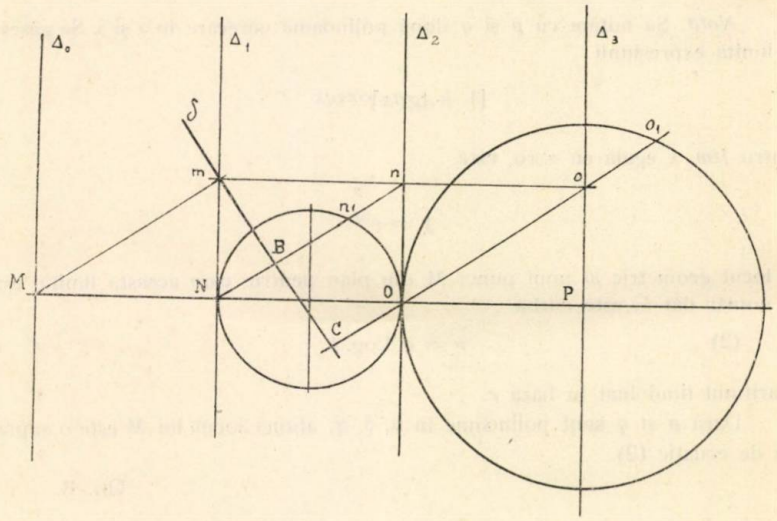
(Enunţ rectificat).

SUB.-LT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

Cisoida şi strofoida din enunţ sunt drepte amândouă, pentrucă asimptotele lor sunt perpendiculare pe axa comună Ox.

1°. Să considerăm cercul construit pe NO ca diametru şi cercul de rază OP, cu centrul în P, adică tangent primului în O şi de rază dublă lui.

Trei drepte paralele duse prin M, N, O, taie respectiv pe Δ_1, Δ_2, Δ_3 în m, n, o, iar Nn taie cercul a doua oară în n_1. Dacă luăm $\overline{NB} = \overline{n_1 n}$, B aparţine cisoidei din enunţ. Dreapta Oo taie cercul cu centrul O, în O_1.



Dacă luăm $\overline{OC} = \overline{OO_1}$, punctul C aparţine strofoidei din enunţ. De aici se deduce:

$$Bn = Nn_1 \quad \text{şi} \quad \overline{CO} = \overline{OO_1}.$$

Dar Nn_1 şi $\overline{OO_1}$ fiind coarde paralele în cercuri omotetice de raport $^1/_2$, rezultă

$$\overline{OO_1} = 2\,Nn_1 \quad \text{şi deci} \quad \overline{Co} = 2\,\overline{Bn}.$$

Triunghiurile mnB şi moC sunt asemenea având unghiurile din n şi o egale cuprinse între laturile $\overline{mn}$ şi $\overline{mo}$ respectiv $\overline{Bn}$ şi $\overline{Co}$ proporţionale.

Rezultă deci că m, B, C *sunt în linie dreaptă.*

2°. Se observă pe figură că triunghiurile NBm şi nn_1O sunt egale având laturile egale

$$\overline{Nm} = \overline{nO} \ , \ \overline{mB} = \overline{n_1O} \ , \ \overline{NB} = \overline{n_1n}$$

şi deci unghiurile omoloage sunt egale, adică

$$\sphericalangle NBm = \sphericalangle nn_1O = 90^0.$$

Rezultă că dreapta mBC $\perp$ Mm.

Se vede de aici că δ (mBC) *înfăşoară o parabolă cu focarul* M *şi tangenta la vârf* Δ_1.

ADRIAN GHEORGHIU
Student.

Soluţie analitică.

Dacă se ia ca axă Oy pe Δ_2, punctele M, N, O, P au coordonatele

$$M(-2a, o) \ , \ N(-a, o) \ , \ O(o, o) \ , \ P(a, o).$$

Ecuaţiile strofoidei, cisoidei şi dreptei Δ_1 sunt:

$$y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x} \text{ (strofoida)}$$

$$(x + a)^3 + y^2x = 0 \text{ (cisoida)}$$

$$x + a = 0 \text{ (dreapta } \Delta_1).$$

Cele 3 paralele din M, N, O au ecuaţiile:

$$(Mm) \ y = \lambda (x + 2a)$$

$$(Nn) \ y = \lambda (x + a)$$

$$(Oo) \ y = \lambda x$$

iar intersecţiile cu strofoida, cisoida şi Δ_1 sunt punctele

$$m(-a \ , \lambda a) \ ; \ B\left(-\frac{a}{1+\lambda^2} \ , \frac{\lambda^3 a}{1+\lambda^2}\right), \ C\left(a\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1} \ , \lambda a \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\right).$$

Determinantul coordonatelor lor este

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a & \lambda a & 1 \\ -\frac{a}{1+\lambda^2} & \frac{\lambda^3 a}{1+\lambda^2} & 1 \\ a\frac{\lambda^2-1}{1+\lambda^2} & a\lambda\frac{\lambda^2-1}{1+\lambda^2} & 1 \end{vmatrix} = a^2\lambda \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{1+\lambda^2} & \frac{\lambda^2-1}{1+\lambda^2} & \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \\ \frac{\lambda^2-1}{1+\lambda^2} & 2\frac{\lambda^2-1}{1+\lambda^2} & 2\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Acest determinant fiind nul, punctele m, B, C sunt colineare. Dreapta mBC are ecuația:

$$x + \lambda y + a(1 - \lambda^2) = 0.$$

Înfășurătoarea ei se obține eliminând λ între această ecuație și derivata ei primă în raport de λ,

$$y - 2\lambda a = 0$$

și găsim

$$\mathbf{y^2 + 4ax + 4a^2 = 0}$$

o parabolă cu focarul M și directoare Δ_2.

I. C. VASILIU (elev inginer), ARȘAVSCHI ALEX. (student), AURELIAN STAN.

Notă. D-l N. N. MIHĂILEANU (Student) a demonstrat reciproca teoremei din enunț.

PROBLEMA 3636. *Pe un cerc fix* (O) *se ia un punct fix* A *și un punct mobil* M.

1°. *Înfășurătoarea cercului cu centrul în* M *și care trece prin* A, *este o* **cardioidă.**

2°. *Când punctul* A *variază pe cercul* (O), *aceste cardioide înfășoară un* **cerc.**

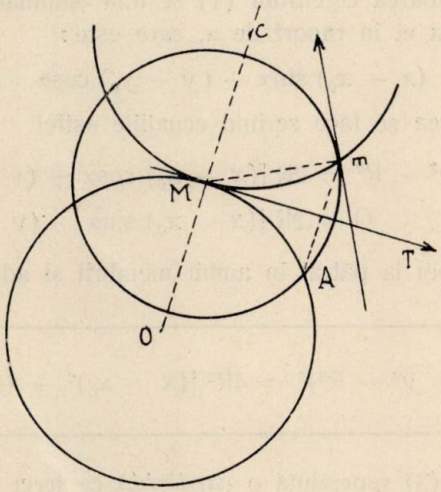
MIHAIL I. FOCȘENEANU.

Soluția I-a.

1°. Fie MT, tangenta în M la cercul (O). Simetricul m al lui A față de MT, descrie cardioida de punct dublu A și axă OA. În

adevăr m se găseşte pe cercul tangent în M la (O) şi de rază egală, căci acest cerc e simetricul lui (O) faţă de tangenta MT. Ceva mai mult, pentrucă coardele $\overline{MA}$ şi $\overline{Mm}$ sunt egale rezultă că *arc* AM = *arc* Mm. Această relaţie arată că **m** descrie cardioida enunţată.

Normala la cardioidă este Mm, adică raza cercului cu centrul în M şi trecând prin A.



Cercul acesta şi cardioida având în acelaş punct, aceeaşi normală, sunt tangente între ele şi deci *acest cerc înfăşoară cardioida*.

2°. Fie A′ punctul unde cardioida taie din nou axa OA.

Avem că $\overline{OA'} = 3 \times \overline{OA}$. Cum tangenta în A′ la cardioidă este perpendiculară pe AA′, rezultă că e tangentă cercului cu centrul O şi de rază $3 \cdot \overline{OA}$, care e deci înfăşurătoarea tuturor cardioidelor, când A variază.

AURELIAN STAN, ADRIAN GHEORGHIU, EDMOND CAŢICHI, N. N. MIHĂILEANU.

Soluţia II-a. (Analitică).

1°. Luăm centrul cercului fix O, ca origine. Fie R raza cercului (O) (x_0 , y_0) coordonatele lui A şi (R cosα, R sinα) coordonatele lui M.

Ecuația cercului cu centrul în M și trecând prin A, este :

$$(x - R\cos\alpha)^2 + (y - R\sin\alpha)^2 = (x_0 - R\cos\alpha)^2 + (y_0 - R\sin\alpha)^2$$

sau

$$x^2 + y^2 - 2R(x - x_0)\cos\alpha - 2R(y - y_0)\sin\alpha - R^2 = 0 \quad (1)$$

de oarece

$$x_0^2 + y_0^2 = R^2.$$

Înfășurătoarea cercurilor (1) se află eliminând α între ecuația (1) și derivata ei în raport de α, care este :

$$(x - x_0)\sin\alpha - (y - y_0)\cos\alpha = 0. \quad (2)$$

Eliminarea se face scriind ecuațiile astfel

$$x^2 + y^2 - R^2 = 2R[(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha]$$
$$0 = 2R[(x - x_0)\sin\alpha - (y - y_0)\cos\alpha]$$

și ridicând apoi la pătrat în ambii membrii și adunând

$$\boxed{(x^2 + y^2 - R^2)^2 = 4R^2[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]} \quad (3)$$

Ecuația (3) reprezintă o *cardioidă* ce trece prin A (x_0, y_0), care e punct dublu și are axa AO.

2. Pentru a găsi *înfășurătoarea cardioidelor*, trebue să observăm că punând

$$x_0 = R\cos\alpha_0 \quad y_0 = R\sin\alpha_0$$

ecuația lor se scrie

$$(x^2 + y^2 - R^2)^2 = 4R^2[x^2 + y^2 + R^2 - 2Rx\cos\alpha_0 - 2Ry\sin\alpha_0] \quad (4)$$

și înfășurătoarea se obține eliminând α_0 între ecuația (4) și derivata ei primă în raport de α_0, care este

$$x\sin\alpha_0 - y\cos\alpha_0 = 0 \quad (5)$$

și din care se scoate

$$\sin\alpha_0 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \cos\alpha_0 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Inlocuind în (4) găsim

$$(x^2 + y^2 - R^2)^2 = 4R^2 [x^2 + y^2 + R^2 - 2R\sqrt{x^2 + y^2}]$$

sau

$$(x^2 + y^2 - R^2)^2 = 4R^2 [R - \sqrt{x^2 + y^2}]^2$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 - R^2 = 2R [R - \sqrt{x^2 + y^2}]$$

sau prin ridicare la pătrat în ambii membri

$$(x^2 + y^2 - 9R^2)(x^2 + y^2 - R^2) = 0.$$

Soluția $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ fiind parazitară, înfășurătoarea este cercul $\mathbf{x^2 + y^2 - 9R^2 = 0}$ cu centrul în origine și de rază 3R.

Notă. D-l CEZAR COȘNIȚĂ a dat soluția analitică a chestiunii 1°, la a 2-a având o eroare de semn.

Generalizare. Teorema admite următoarea generalizare:

Fiind date o curbă plană (C) *și un punct* A *în planul ei, cercul cu centrul într'un punct al curbei* (C) *și trecând prin* A, *înfășoară o curbă de genul podarei curbei* (C) *în raport de* A.

Se vede ușor din construcția tangentei la podara unei curbe că cercul de mai sus e tangent unei curbe omotetice cu podara curbei (C) în raport de A, de raport 2, față de același punct.

Se observă de asemenea că cercul de mai sus e tangent simetricei perpendicularei din A la AO (O fiind centrul său), față de tangenta în O la curba (C).

Această simetrică Δ, înfășoară deci omotetica de raport 2, a podarei curbei (C), proprietate care formează subiectul problemei No. 3356.

Observațiunea că No. 3356 și No. 3636 trebuesc conexate a făcut-o și D-l N. N. MIHĂILEANU (Constanța).

LOCOT. MIHAIL I. FOCȘENEANU.

PROBLEMA 3646. *Se consideră un punct* P *în planul unui triunghiu* ABC, *situat pe cubica lui* DARBOUX *a triunghiului. Fie* α, β, γ *centrele cercurilor* PBC, PCA, PAB, *iar* A'B'C' *triunghiul podar al punctului* P.

Se cere să se demonstreze că:

1°. *Perpendicularele duse prin vârfurile* A, B, C, *respectiv pe transversalele unghiulare* AP, BP, CP *întâlnesc laturile triunghiului* A'B'C' *în trei puncte colineare.*

2°. *Dreptele* $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$ *întâlnesc laturile* BC, CA, AB *respectiv în trei puncte* A_1, B_1, C_1, *astfel că transversalele unghiulare* AA_1, BB_1, CC_1 *sunt concurente.*

N. G. BOTEA.

Soluție dată de D-nii: ADRIAN GHEORGHIU, N. N. MIHĂILEANU și I. C. VASILIU.

Cubica lui DARBOUX a unui triunghiu ABC este locul geometric al punctelor P, ale căror triunghiuri podare A'B'C' sunt omologice cu triunghiul ABC. După teorema lui CEVA avem:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1.$$

1°. Patrulaterul PB'AC' e inscriptibil, AP fiind un diametru. Perpendiculara în A pe AP e tangenta cercului PB'AC'; fie a intersecția ei cu B'C', b și c punctele analoage. Triunghiurile asemenea aAB' și $aC'A$ ne dau:

$$\frac{aB'}{AB'} = \frac{aA}{C'A}\ ;\ \frac{aC'}{AC'} = \frac{aA}{B'A}$$

și deci

$$\frac{aB'}{aC'} = \frac{B'A^2}{C'A^2}$$

și alte două relații analoage, care înmulțite dau:

$$\frac{aB'}{aC'} \cdot \frac{bC'}{bA'} \cdot \frac{cA'}{cB'} = \left(\frac{B'A}{C'A} \cdot \frac{C'B}{A'B} \cdot \frac{A'C}{B'C}\right)^2 = 1$$

și după teorema lui MENELAÜS punctele a, b, c sunt colineare.

2°. Fie într'un triunghiu ABC, M și N picioarele a două izogonale față de unghiul A. După teorema lui STEINER (*Culegere de probleme de geometrie* IX. 28) avem relația:

$$\frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

In cazul nostru, în triunghiul PBC, $P\alpha$ este izogonale lui PA' față de unghiul din P, căci α este centrul cercului PBC. $P\alpha$ taie pe BC în A_1, astfel încât relația de mai sus se scrie:

$$\frac{BA' \cdot BA_1}{CA' \cdot CA_1} = \frac{\overline{PB}^2}{\overline{PC}^2}.$$

Această relație înmulțită cu cele două analoage ne conduc la

$$\left(\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B}\right)\left(\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B}\right) = 1$$

$$\therefore \quad \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = -1.$$

Observațiuni. 1°. D-l AD. GHEORGHIU observă că prima proprietate se menține când P este un punct al cercului circumscris lui ABC, ceeace este evident triunghiul A'B'C' fiind în acest caz redus la dreapta lui SIMSON a punctului P.

2°. Altă soluție a problemei 3646 a fost dată de D-l N. N. MIHĂILEANU în articolul „Asupra curbei lui DARBOUX" din G. M. XXXIX pag. 440.

PROBLEMA 3837. *Soient* α, β, γ *les angles de même sens que forment avec les côtés* BC = a, CA = b, AB = c *d'un triangle* ABC, *les droites* AD, BE, CF *qui joignent les sommets aux contacts du cercle inscrit;* ρ_a, ρ_b, ρ_c *les rayons des cercles passant en* A, B, C *et touchant* BC, CA, AB *en* D, E, F. *On a les relations:*

$$a\rho_a \sin^2\alpha = b\rho_b \sin^2\beta = c\rho_c \sin^2\gamma.$$

Soluție dată de D-nii: CEZAR COȘNIȚĂ, PETRE I. GHIȘOIU, N. N. MIHĂILEANU și S.-LT. A. I. STAN.

Fie AD o ceviană oarecare, α unghiul (AD, BC) și ρ_a raza cercului c_a trecând prin A și tangent în D la BC. Fie apoi AA' înălțimea dusă din A și S suprafața triunghiului ABC. Avem:

$$S = \tfrac{1}{2} BC \times AA' = \tfrac{1}{2} a \times AD \sin\alpha.$$

Pe de altă parte arcul AD, de pe cercul c_a are ca măsură 2α şi deci:

$$AD = 2\varrho_a \sin\alpha$$

în consecinţă:

$$S = a\varrho_a \sin^2\alpha$$

Se vede prin urmare că toate expresiunile din enunţ sunt egale cu suprafaţa triunghiului şi aceasta oricare ar fi punctele D, E, F pe BC, CA, AB şi oricare ar fi sensul în care se socoteşte unghiul α. Teorema este demonstrată într'un caz mai general decât acel din enunţ.

Au dat aceeaşi soluţie şi D-nii: N. N. ALDEA, DUMITRAŞCU N. ROMEO, MIRCEA I. GROSSU, HARALAMB P. IONESCU-BISS, LUPESCU GH. C-TIN, E. G. MILEA, I. C. PAREPEANU şi RÂMNICEANU D. CRISTIAN fără a observa însă, că teorema are un caracter mai general.

A. P.

PROBLEMA 3977. *Intr'un triunghiu oarecare, mijloacele simedianelor exterioare sunt trei puncte pe o dreaptă.*

CEZAR COŞNIŢĂ.

Soluţie dată de D-nii: CÂRSTOIU D. IOAN, M. MARGULIUS, N. N. MIHĂILEANU, PATRAULEA D. ILARIU, PATRAULEA N. NICOLAE, S.-LT. PANAITE N. TH., ION I. PETRESCU-FIERBINŢI, ZARDA IOAN şi S.-LT. A. STAN.

Simedianele exterioare ale unui triunghiu ABC sunt tangentele AT_a, BT_b, CT_c în A, B, C la cercul circumscris limitate la laturile opuse. (Ex. Géom. F. G. M. pag. 1169). Conform teoremei lui PASCAL, punctele T_a, T_b, T_c sunt în linie dreaptă şi atunci figura ABC $T_a T_b T_c$ este un patrulater complet în care diagonalele sunt simedianele exterioare ale patrulaterului. După teorema lui GAUSS aplicată la acest patrulater, mijloacele simedianelor sunt deci colineare.

Soluţie dată de D-l N. N. MIHĂILEANU.

Fie AT_a, BT_b, CT_c medianele exterioare, O centrul cercului circumscris, H ortocentrul, A', B', C' picioarele înălţimilor, ω_a, ω_b, ω_c mijloacele simedianelor exterioare.

Cercul Ω_a cu centrul în ω_a descris pe AT_a ca diametru trece prin A' şi este ortogonal cercului circumscris triunghiului ABC. Rezultă că O are aceeaşi putere faţă de cercurile Ω_a şi analoagele sale Ω_b , Ω_c . Pe de altă parte avem:

$$HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$$

deci şi punctul H are aceeaşi putere faţă de cercurile Ω_a , Ω_b , Ω_c . Aceste cercuri au acelaş ax radical OH prin urmare centrele lor ω_a , ω_b , ω_c sunt colineare.

Fie A_1 intersecţia dreptelor BC şi B'C', B_1, C_1 puncte analoage. Punctele A_1, B_1, C_1 sunt pe aceeaş dreaptă, axul ortic al triunghiului ABC. Să arătăm că axul ortic conţine punctele ω_a , ω_b , ω_c . Fie într'adevăr α punctul unde axul ortic taie simediana exterioară AT_a . B'C' este paralelă cu AT_a şi raportul $(CAB'B_1)$ este armonic, prin urmare:

$$\frac{A\alpha}{A_1B'} = \frac{B_1A}{B_1B'} = \frac{1}{2}\,\frac{CA}{CB'} = \frac{1}{2}\,\frac{AT_a}{A_1B'} .$$

Deci:

$$A\alpha = \tfrac{1}{2}\,AT_a = A\omega_a .$$

Punctele ω_a , ω_b , ω_c se găsesc aşa dar pe axul ortic al triunghiului ABC.

Observaţiuni. 1°. D-nii M. MARGULIUS şi N. N. MIHĂILEANU au dat şi soluţiuni analitice, utilizând coordonate baricentrice.

2°. D-l M. MARGULIUS observă că în locul simedianelor exterioare se pot lua tangente la o conică oarecare circumscrisă triunghiului ABC.

3°. D-l S.-LT. A. STAN observă că în loc de simediane exterioare se pot lua trei ceviene a căror picioare sunt colineare, că în toate aceste cazuri punctele ω_a , ω_b , ω_c mijloacele acestor mediane se găsesc pe laturile triunghiului median a triunghiului ABC.

A. P.

PROBLEMA 4031. *Să se determine cifrele* a *şi* b *aşa fel încât expresia :*

$$E = 1931a\ 1929^3 \pm 1929b\ 1931^3$$

să fie divizibilă cu 1930.

MAIOR I. LINTEŞ.

Căutând resturile diviziunilor fiecărui număr din expresie prin 1930, găsim :

$$E_1 \equiv (1569 + 35 \,.\, a)^3 \pm (361 + 35 \,.\, b)^3.$$

Știm apoi că avem :

$$x^3 + y^3 \equiv (x + y)\,(x^2 + y^2 - xy)$$

$$x^3 - y^3 \equiv (x - y)\,(x^2 + y^2 + xy).$$

Vom examina acum toate cazurile :

I. *Admitem că* $x + y = M\ 1930$.

In acest caz vedem că :

$$x + y = 1930 + 35 \,.\, (a + b).$$

Apoi cum a și b sunt de o singură cifră, înseamnă că singura soluție este :

$$a = b = 0.$$

II. *Admitem* $x - y = M\ 1930$.

In acest caz vedem că :

$$x - y = 1208 + 35\,(a - b)$$

care este mai mică decât *1930,* prin urmare nu avem soluție.

III. *Admitem* $x^2 + y^2 - xy = M\ 1930$.

Observând că :

$$x^2 + y^2 = \text{M } 1930 + 92 + 175 \,.\, a + 211 \,.\, b + 1225\,(a^2 + b^2),$$

iar :

$$x\,y = \text{M } 1930 + 829 + 1055 \,.\, a + 875 \,.\, b + 1225 \,.\, ab.$$

Urmează că va trebui să avem :

$$1225\,(a^2 + b^2 - ab) - 737 - 880 \,.\, a - 664 \,.\, b = \text{M } 1930.$$

Condiția de divizibilitate cu *2* ne duce la concluzia că :

a și *b* trebue să fie impari sau *a* și *b* trebue să fie de parități diferite.

Dar în expresiunea E_1 vedem lesne că *a* și *b* trebue să fie de aceeași paritate, prin urmare *a* și *b trebue să fie impari.*

Condiția de divizibilitate cu 5 ne duce la concluzia că :

$$737 + 664 \,.\, b = \text{M } 5$$

de unde singura soluție impară este $b = 7$.

Condiția de divizibilitate cu *193* ne duce, pentru $b = 7$, la concluzia :

$$67 \cdot a^2 + 2 \cdot a + 72 = M\,193$$

care nu ne dă nici o soluție.

IV. *Admitem* $x^2 + y^2 + xy = M\,1930$.

In mod analog cazului III, deducem că trebue să avem :

$$1225 \cdot (a^2 + b^2 + ab) + 921 + 1230 \cdot a + 1086 \cdot b = M\,1930.$$

Condiția de divizibilitate cu *2* ne duce, ținând seamă și de forma expresiunei E_1 la condiția că a și b *trebue să fie impari.*

Condiția de divizibilitate cu *5* ne duce la concluzia :

$$921 + 1086 \cdot b = M\,5$$

care ne dă singura soluție impară $b = 9$.

Condiția de divizibilitate cu 193 deduce, pentru $b = 9$, la concluzia :

$$67 \cdot a^2 + 96 \cdot a - 90 = M\,193$$

care nu ne dă nici o soluție.

Așa dar singurele soluțiuni sunt :

$$a = b = 0.$$

D-l ȘTEFAN E. OLTEANU a examinat numai cazurile I și II.

I. L.

PROBLEMA 4061. *Combien y a-t-il des nombres écrits dans le système décimal avec des chiffres représentant des nombres consécutifs ?*

Calculer leur somme.

V. THÉBAULT.

1°. Să excludem, pentru moment, cifra zero, ocupându-ne numai de numerele formate din cifrele :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Cu două cifre vom putea forma numerele :

12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89

şi cele obţinute din acestea prin permutarea cifrelor ; în total :

$$N_2 = 2! \times 8.$$

Cu trei cifre vom putea forma numerele :

123, 234, 345, 456, 567, 678, 789

şi cele ce se obţin din acestea prin permutarea cifrelor din aceleaşi grupe ; în total :

$$N_3 = 3! \times 7.$$

In mod analog găsim :

$$N_4 = 4! \times 6 \quad ; \quad N_5 = 5! \times 5 \quad ; \quad N_6 = 6! \times 4 \; ;$$
$$N_7 = 7! \times 3 \quad ; \quad N_8 = 8! \times 2 \quad ; \quad N_9 = 9!$$

Să cercetăm acum câte numere în condiţiile problemei putem forma, care să cuprindă şi cifra 0.

Cu două cifre vom avea un singur număr 10 :

$$n_2 = 1.$$

Cu trei cifre vom putea forma numerele :

102 , 201,

şi cele obţinute prin permutarea ultimelor două cifre ; în total :

$$n_3 = 2! \times 2.$$

Cu patru cifre vom putea forma numerele :

1023 , 2013 , 3012,

şi cele ce se obţin din acestea prin permutarea ultimelor trei cifre ; în total :

$$n_4 = 3! \times 3.$$

Analog găsim :

$$n_5 = 4! \times 4 \quad ; \quad n_6 = 5! \times 5 \quad ; \quad n_7 = 6! \times 6 \; ;$$
$$n_8 = 7! \times 7 \quad ; \quad n_9 = 8! \times 8 \quad ; \quad n_{10} = 9! \times 9.$$

Deci numărul numerelor scrise în sistemul zecimal cu cifre reprezentând numere consecutive este dat de suma :

$$N = N_2 + N_3 + \ldots + N_9 + n_2 + n_3 + \ldots + n_{10}$$

$$= 1 + 10(2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! + 9!) = 4091121.$$

2°. Să aflăm suma acestor numere. Ca şi mai sus ne vom ocupa mai întâi de suma numerelor ce nu cuprind cifra 0 şi ne vom fixa atenţia asupra numărului de câte ori o cifră apare într'o coloană când facem adunarea.

Astfel adunând numerele de două cifre, cifrele 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 se vor afla de două ori atât în coloana zecilor, cât şi în cea a unităţilor, iar cifrele 1 şi 9 o singură dată. Deci

$$S_2 = 11[1 + 2 \times (2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) + 9] = 880.$$

Analog găsim :

$$S_3 = 2 \times 111 \times [1 + 2 \times 2 + 3 \times (3 + 4 + 5 + 6 + 7) + 2 \times 8 + 9] = 23310.$$

$$S_4 = 3! \times 1111 \times [1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times (4 + 5 + 6) + 3 \times 7 + 2 \times 8 + 9]$$

$$= 799920.$$

$$S_5 = 4! \times 11111 \times [1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + 5 \times 5 + 4 \times 6 + 3 \times 7 + 2 \times 8 + 9] = 33333000.$$

$$S_6 = 5! \times 111111 \times [1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times (4 + 5 + 6) + 3 \times 7 + 2 \times 8 + 9]$$

$$= 1599998400.$$

$$S_7 = 6! \times 1111111 \times [1 + 2 \times 2 + 3 \times (3 + 4 + 5 + 6 + 7) + 2 \times 8 + 9]$$

$$= 83999991600.$$

$$S_8 = 7! \times 11111111 \times [1 + 2 \times (2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) + 9]$$

$$= 4479999955200.$$

$$S_9 = 8! \times 111111111 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)$$

$$= 201599999798400.$$

Rămâne să calculăm suma numerelor ce cuprind şi cifra zero. Cu două cifre avem un singur număr

$$s_2 = 10.$$

Suma celor n_3 numere de trei cifre este

$$s_3 = 211\ (1 + 2) = 633.$$

Suma celor n_4 numere de patru cifre este

$$s_4 = [3! \times 10^3 + 2! \times 2 \times 111](1 + 2 + 3) = 38664.$$

Se găsesc uşor căutând de câte ori este cuprinsă o cifră pe aceeaşi coloană în sumă, următoarele valori:

$$s_5 = [4! \times 10^4 + 3! \times 3 \times 1111](1 + 2 + 3 + 4) = 2599980.$$

$$s_6 = [5! \times 10^5 + 4! \times 4 \times 11111](1+2+3+4+5) = 195999840.$$

$$s_7 = [6! \times 10^6 + 5! \times 5 \times 111111](1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 16519998600.$$

$$s_8 = [7! \times 10^7 + 6! \times 6 \times 1111111](1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 1545659986560.$$

$$s_9 = [8! \times 10^8 + 7! \times 7 \times 11111111](1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 159263999858880.$$

$$s_{10} = [9! \times 10^9 + 8! \times 8 \times 111111111](1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 17942399998387200.$$

Suma cerută va fi deci:

$$S = S_2 + S_3 + \ldots + S_9 + s_2 + s_3 + \ldots + s_9 + s_{10} = 18323302950771077.$$

Observaţii. Au rezolvat problema D-nii: N. N. ALDEA (student) şi I. C. PAREPEANU, pierzând o parte din soluţiuni.

D-nii NUBAR ARTAKI-ACIK, MARIUS MARGULIUS şi N. ZANE au interpretat greşit enunţul, rezolvând alte probleme.

N. B.

PROBLEMA 4120. *Să se discute şi rezolve ecuaţia.*

$$\sin^2\alpha \sec^2 x + \cos^2\alpha \operatorname{cosec}^2 x - \lambda = 0$$

în care α *este dat, iar* λ *variază.*

N. C.

Soluţie dată de D-nii: ŞTEFAN E. OLTEANU (Blaj), IOAN LEUCÓ şi ZIFF S. MARTIN.

Făcând schimbările

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad , \quad \operatorname{cosec}^2 x = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$$

ecuația noastră devine :

$$f(\operatorname{tg}^2 x) = \sin^2\alpha \operatorname{tg}^4 x + (1 - \lambda) \operatorname{tg}^2 x + \cos^2\alpha = 0$$

sau punând $\operatorname{tg}^2 x = y$

$$f(y) = y^2 \sin^2\alpha + (1 - \lambda) y + \cos^2\alpha = 0.$$

Fie Δ, S, P discriminantul, suma și produsul rădăcinilor acestei ecuații

$$\Delta = (\lambda - 1)^2 - 4 \sin^2\alpha \cos^2\alpha = (\lambda - 1)^2 - \sin^2 2\alpha$$

$$S = \frac{\lambda - 1}{\sin^2\alpha} \quad , \quad P = \operatorname{cotg}^2\alpha.$$

Rădăcinile ecuației date vor fi :

$$x = \operatorname{arc\,tg}\left(\pm \frac{\sqrt{\lambda - 1 \pm \sqrt{(\lambda - 1)^2 - \sin^2 2\alpha}}}{\sqrt{2}\sin\alpha}\right).$$

Pentru discuție se formează tabloul :

λ	S	P	Δ	Răd. ec: $f(y) = 0$	Răd. ec: $f(\operatorname{tg}^2 x) = 0$
$-\infty$					
	$-$	$+$	$+$	2 răd. negative	4 răd. imaginare
$1 - \sin 2\alpha$	$-$	$+$	0	2 răd. egale negative	4 răd. imaginare
			$-$	Răd. imaginare	Răd. imaginare
$1 + \sin 2\alpha$	$+$	$+$	0	2 răd. egale	2 perechi de răd. egale
	$+$	$+$	$+$	2 răd. pozitive	4 răd. reale
$+\infty$					

Observații. 1°. S'a presupus mai sus că $\sin 2\alpha > 0$.

In cazul $\sin 2\alpha < 0$ se vor modifica în tablou ordinele liniilor corespunzătoare la $(1 - \sin 2)$, $(1 + \sin 2\alpha)$.

2°. Alte soluțiuni au fost date de D-nii : HARALAMB P. IONESCU-BISS (Oltenița), DIMITRIE D. MAVRODIN (Lic. M. Eminescu) ; Sub-Lt. IOAN C. SAVIN (student Iași) și V. CEAUȘESCU (elev plut.-major lic. militar Iași).

PROBLEMA 4180. *Se consideră expresia :*

$$(avz + bwx + cvx)(awx + bwx + cuy)(avz + buz + cuy)$$
$$+ (awy + bwx + cvx)(awy + buz + cuy)(avz + buz + cvz).$$

Să se pună această expresie sub forma unui produs de trei factori.

N. G. BOTEA.

1°. *Soluție* dată de D-l PANAITE C. MAZILU (Liceul Internat, Iași).

Insemnăm expresia cu E $(a, b, c, x, y, z, u, v, w)$ și facem notațiile :

$$avz = l \qquad bwx + cvx = \alpha$$
$$bwx = m \qquad awy + cuy = \beta$$
$$cuy = n \qquad avz + buz = \gamma.$$

Inlocuind în E aceste valori, desfăcând parantezele, reducând termenii asemenea, aranjându-i și dând factori comuni, se obține succesiv :

$$\begin{aligned}
E &= (l+\alpha)(m+\beta)(n+\gamma) + (\alpha+\beta-n)(\beta+\gamma-l)(\gamma+\alpha-m)\\
&= \alpha\beta\gamma + \alpha mn + \beta ln + \gamma lm + \alpha\beta n + \beta\gamma l + \alpha\gamma m\\
&+ lmn + \alpha\beta\gamma + \beta^2\gamma - \beta\gamma n + \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 - \gamma^2 n - \alpha\gamma l - \beta\gamma l\\
&+ \gamma nl + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\beta n + \alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma - \alpha\gamma n - \alpha^2 l\\
&- \alpha\beta l + \alpha nl - \alpha\beta m - \beta^2 m + \beta mn - \alpha\gamma m - \beta\gamma m + \gamma mn\\
&+ \alpha lm + \beta lm - lmn\\
&= \alpha(\beta\gamma + mn + \alpha\gamma + \alpha\beta + nl + lm - \alpha l - \beta m - \gamma n)\\
&+ \beta(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + lm + mn + nl - \alpha l - \beta m - \gamma n)\\
&+ \gamma(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + lm + mn + nl - \alpha l - \beta m - \gamma n)\\
&= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + lm + mn + nl - \alpha l - \beta m - \gamma n)\\
&= (\alpha+\beta+\gamma)(a^2vwyz + acuvyz + abuwyz + bcu^2yz\\
&+ abvwxz + b^2uwxz + acv^2xz + bcuvxz + abw^2xy\\
&+ bcuwxy + acvwxy + c^2uvxy + bcuwxy + acvyz
\end{aligned}$$

$$+ abuvxz - abvwxz - acv^2xz - abw^2xy - bcuwxy$$
$$- acuvyz - bcu^2yz)$$
$$= [bwx + cvx + awy + cuy + avz + buz]\,[a^2vwyz + abuwyz$$
$$+ acuvyz + abvwxz + b^2uwxz + bcuvxz + acvwxy$$
$$+ bcuwxy + c^2uvxy]$$
$$= [(bw+cv)x+(aw+cu)y+(av+bu)z]\,[(avw+buw+cuv)\,ayz$$
$$+ (avw + buw + cuv)\,bzx + (avw + buw + cuv)\,cxy]$$
$$= [(bw + cv)x+(cu + aw)y + (av+bu)z]\,(avw+buw+cuv)\,(ayz$$
$$+ bzx + cxy).$$

2°. *Altă soluție.* Fie M și N două puncte în planul triunghiului ABC, iar (Γ) o conică circumscrisă triunghiului. Cevienele lui M întâlnesc pe (Γ) în A', B', C'. Dreptele NA', NB', NC' întâlnesc laturile triunghiului respectiv în punctele A_1, B_1, C_1.

Dacă (x, y, z), (u, v, w) sunt coordonatele baricentrice ale punctelor M și N în raport cu triunghiul ABC, iar

$$F = ayz + bzx + cxy = 0$$

reprezintă ecuația conicei (Γ) în sistemul de coordonate considerate, relația :

$$E\,(a, b, c, x, y, z, u, v, w) = 0$$

reprezintă condiția ca punctele A_1, B_1, C_1 să fie colineare [1]).

Dacă punctul N este fix, locul geometric al punctului M, pentruca punctele A_1, B_1, C_1 să fie colineare este deci cubica

$$(C) \qquad E = 0.$$

Dar este evident că pentru orice punct M al conicei (Γ), punctele A_1, B_1, C_1 sunt colineare. Deci cubica (C) se descompune în conica (Γ) și o dreaptă (Δ) și expresia E va conține ca factor expresia :

$$F = ayz + bzx + cxy.$$

1) N. Botea. Proprietăți ale triunghiului. „Gazeta Matematică". Vol. XXXVIII, pag. 367.

Observând că:

$$E(a, b, c, x, y, z, u, v, w) \equiv E(a, b, c, u, v, w, x, y, z)$$

expresia E va conține ca factor și expresia:

$$G = avw + bwu + cuv$$

și cum E este o expresie omogenă și de gradul trei, atât în raport cu variabilele x, y, z, cât și în raport cu variabilele u, v, w, vom avea:

$$E \equiv F \cdot G \cdot H$$

unde:

$$H = (\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w)\, x + (\alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w)\, y + (\alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3 w)\, z,$$

Prin identificare obținem:

$$\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = c,\ \gamma_1 = b,\ \alpha_2 = c,\ \beta_2 = 0,\ \gamma_2 = a,$$

$$a_3 = b,\ \beta_3 = a,\ \gamma_3 = 0.$$

Notă. Au rezolvat foarte bine problema prin calcule mai lungi D-nii: VASILE CEAUȘESCU și CONST. CHIRIAC (Lic. Militar Iași).

N. B.

PROBLEMA 4224. A_1, B_1, C_1 *fiind picioarele cevienelor unui punct* M, *iar* $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$ *unghiurile făcute de acestea cu laturile opuse, să se demonstreze relațiunea:*

$$\frac{AM}{AA_1}\operatorname{cotg}\varphi_a + \frac{BM}{BB_1}\operatorname{cotg}\varphi_b + \frac{CM}{CC_1}\operatorname{cotg}\varphi_c \equiv 0.$$

ION C. VASILIU.

1°. *Soluție* dată de D-l A. MIRCEA (Constanța). Fie M_a, M_b, M_c proecțiunile punctului M pe laturi și H_a, H_b, H_c picioarele înălțimilor. Se știe că aceste puncte determină pe laturile triunghiului segmente legate prin relațiunile:

$$(1)\qquad \overline{BM_a}^2 + \overline{CM_b}^2 + \overline{AM_c}^2 = \overline{CM_a}^2 + \overline{AM_b}^2 + \overline{BM_c}^2$$

$$(2)\qquad \overline{BH_a}^2 + \overline{CH_b}^2 + \overline{AH_c}^2 = \overline{CH_a}^2 + \overline{AH_b}^2 + \overline{BH_c}^2.$$

Făcând în (1) înlocuirile:

$$\overline{BM_a} = \overline{BH_a} + \overline{H_aM_a} \quad , \quad \overline{CM_a} = \overline{CH_a} + \overline{H_aM_a}$$

şi cele analoage, ţinând seama de (2) şi simplificând, se obţine relaţia:

$$(3) \quad \overline{AB} \cdot \overline{M_cH_c} + \overline{BC} \cdot \overline{M_aH_a} + \overline{CA} \cdot \overline{M_bH_b} = 0.$$

Din triunghiurile asemenea MA_1M_a şi AA_1H_a scoatem:

$$\frac{\overline{M_aH_a}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{A_1H_a}}{\overline{AA_1}}$$

însă:

$$\overline{A_1H_a} = \overline{AH_a} \operatorname{cotg} \varphi_a = \frac{2S}{\overline{BC}} \operatorname{cotg} \varphi_a .$$

Deci:

$$\overline{M_aH_a} = \frac{2S}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{AA_1}} \operatorname{cotg} \varphi_a$$

şi două relaţii analoage, care înlocuite în (3) ne dau:

$$\sum \frac{\overline{AM}}{\overline{AA_1}} \operatorname{cotg} \varphi_a = 0.$$

2°. *Soluţie* dată de D-l N. N. MIHĂILEANU (student).
Dacă se consideră echipolenţa:

$$(AM)\ (BC) + (BM)\ (CA) + (CM)\ (AB) = 0,$$

sau:

$$\overline{AM} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \varphi_a + \overline{BM} \cdot \overline{CA} \cos \varphi_b + \overline{CM} \cdot \overline{AB} \cos \varphi_c = 0$$

şi se împarte cu:

$$2S = \overline{BC} \cdot \overline{AA_1} \sin \varphi_a = \overline{CA} \cdot \overline{BB_1} \sin \varphi_b = \overline{AB} \cdot \overline{CC_1} \sin \varphi_c ,$$

se obţine relaţia de demonstrat:

$$\frac{1}{2S} \sum \overline{AM} \cdot \overline{BC} \cos \varphi_a = \sum \frac{\overline{AM}}{\overline{AA_1}} \operatorname{cotg} \varphi_a = 0.$$

Observaţiuni făcute de D-l A. MIRCEA. 1°. După cum se vede relaţia problemei este o formă a relaţiunei (3) în care dacă notăm cu d_a , d_b , d_c distanţele $\overline{M_aH_a}$, $\overline{M_bH_b}$, $\overline{M_cH_c}$ avem :

$$ad_a + bd_b + cd_c = 0.$$

Această relaţiune este cu totul generală şi o putem enunţa astfel :

Fie un poligon de n laturi $A_1A_2 \ldots A_n$ şi două puncte M şi N în planul său. Dacă notăm $d_i = \overline{M_i N_i}$, M_i şi N_i fiind proecţiile punctelor M şi N pe latura $A_i A_{i+1}$, avem relaţia :

$$(4) \qquad a_1d_1 + a_2d_2 + \ldots + a_n d_n = 0.$$

Această relaţie reprezintă condiţia de concurenţă a perpendicularelor pe laturile poligonului aşezate la distanţele $d_1, d_2, \ldots d_n$ de perpendicularele duse printr'un punct M.

Aceste cantităţi $d_1, d_2, \ldots d_n$ sunt cantităţi algebrice, pozitive când sunt luate într'un sens şi negative în sensul contrar.

2°. Relaţiunea (3) se mai poate pune sub forma :

$$(5) \qquad aR_a \cos \varphi_a + bR_b \cos \varphi_b + cR_c \cos \varphi_c = 0,$$

unde R_a , R_b , R_c reprezintă distanţele AM, BM, CM iar dacă ţinem seama că suprafaţa triunghiului ABC se compune din suma suprafeţelor AMB, BMC, CMA găsim relaţia analoagă :

$$(6) \qquad aR_a \sin \varphi_a + bR_b \sin \varphi_b + cR_c \sin \varphi_c = 4S.$$

3°. Dacă se consideră distanţa :

$$\overline{M_cH_c} = \overline{M_cA} + \overline{AH_c} = R_a \cos (\varphi_a - B) - b \cos A$$

şi cele analoage găsim :

$$(7) \quad aR_b \cos (\varphi_b - C) + bR_c \cos (\varphi_c - A) + cR_a \cos (\varphi_a - B) = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

iar dacă luăm :

$$\overline{M_bH_b} = \overline{M_bA} + \overline{AH_b} = a \cos A + R_a \cos (\varphi_a + C)$$

găsim :

$$(8) \quad aR_c \cos (\varphi_c + B) + bR_a \cos (\varphi_a + C) + cR_b \cos (\varphi_b + A) = -\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Relaţiile (7) şi (8) adunate, ne conduc la relaţia (5).

4°. Analog se pot găsi relaţiunile :

$$(9) \quad aR_b \sin (\varphi_b - C) + bR_c \sin (\varphi_c - A) + cR_a \sin (\varphi_a - B) = 2S.$$

$$(10) \quad aR_c \sin (\varphi_c + B) + bR_a \sin (\varphi_a + C) + cR_b \sin (\varphi_b + A) = 2S.$$

Aceste relaţiuni adunate dau relaţia (6).

EXERCIȚII

18. In triunghiul ABC cu ortocentrul în H, cercul de diametru AH, taie din nou laturile $A_h C_h$, $A_h B_h$ ale triunghiului ortic $A_h B_h C_h$ în A'_b și A'_c. Să se stabilească relația:

$$\overline{A_h A'_b} \cdot \overline{A_h A'_c} = \overline{HA_h} \cdot \overline{AA_h}$$

N. N. MIHĂILEANU.

R. Se va ține seamă că:

$$\overline{AA_h} \cdot \overline{HA_h} = \overline{A_h B_h} \cdot \overline{A_h C_h}$$

iar:

$$\overline{AA_h} \cdot \overline{HA_h} = \overline{A_h B_h} \cdot \overline{A_h A'_c} = \overline{A_h C_h} \cdot \overline{A_h A'_b}$$

iar pe de altă parte:

$$\overline{A_h A'_c} = \overline{A_h C_h} \quad \text{și} \quad \overline{A_h A'_b} = \overline{A_h B_h}.$$

19. Perpendicularele coborâte din α, β, γ, mijloacele laturilor triunghiului ortic $A_h B_h C_h$ pe laturile corespunzătoare ale triunghiului de referință ABC; sunt constante.

N. N. MIHĂILEANU.

R. α are puteri egale față de cercurile exînscrise triunghiului ortic, relativ la $B_h C_h$, de centre B și C deci perpendiculara din α pe BC este axa radicală al acestor cercuri și deci concură cu analoagele; în centrul radical.

20. Fie

$$P = (x+1)(x+2)(x+3)(x+5)(x+6)(x+7)$$

$$Q = x(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)(x+8).$$

Să se demonstreze că $P + 36$ și $Q + 144$ sunt patrate perfecte, oricare ar fi x.

ȘT. E. OLTEANU.

R. Avem succesiv

$$P = [(x+7)(x+3)(x+2)]\,[(x+6)(x+5)(x+1)]$$

$$P = (x^3 + 12x^2 + 41x + 42)(x^3 + 12x^2 + 41x + 30)$$

$$P = [(x^3 + 12x^2 + 41x + 36) + 6]\,[(x^3 + 12x^2 + 41x + 36) - 6]$$

$$P = (x^3 + 12x^2 + 41x + 36)^2 - 36.$$

La fel se găsește

$$Q = (x^3 + 12x^2 + 35x + 12)^2 - 144.$$

21. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{tg} px + \operatorname{tg} qx = \operatorname{cotg} px + \operatorname{cotg} qx.$$

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN.

R. Ecuația se mai poate scrie:

$$\frac{\sin (p+q)x}{\cos px \cos qx} = \frac{\sin (p+q)x}{\sin px \sin qx}$$

sau încă

$$\sin (p+q)x \cdot \cos (p+q)x = 0;$$

de unde rădăcinile:

$$x_1 = \frac{2k\pi}{p+q}\ ;\ x_2 = \frac{(2k+1)\pi}{p+q}\ ;\ x_3 = \frac{(2k+1)\pi}{2(p+q)} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots n).$$

PROBLEME PROPUSE

4463. Să se rezolve ecuația:

$$2 \cos x \cos 2x \cos 3x = 1.$$

I. IONESCU.

4464. Fie l_a, l_b, l_c lungimile bisectoarelor interioare limitate la laturile $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ ale unui triunghiu; O, I, H centrele cercurilor circumscris, înscris și ortocentrul triunghiului. Să se demonstreze relația dintre arii:

$$OIH / ABC = abc / l_a l_b l_c.$$

V. THÉBAULT.

4465. Să se demonstreze că dacă primii termeni ai șirului lui FIBONACCI sunt

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_3 = 2, \ldots$$

atunci între termenii $u_{60n} + 1$ și $u_{60(n+1)}$ inclusiv sunt câte patru termeni care au ca cifră a unimilor pe fiecare din cifrele perechi 0, 2, 4, 6, 8 și câte opt termeni care au ca cifră a unimilor pe fiecare din cifrele neperechi 1, 3, 5, 7, 9.

COL. GH. BUICLIU.

4466. Să se arate că expresiunea

$$E \equiv \frac{(a^2b^2c^2)\,!\,(ab^2c)\,!\,(abc^2)\,!\,(a^2bc)\,!}{(ab^2c^2)\,!\,(a^2bc^2)\,!\,(a^2b^2c)\,!\,(abc)\,!} \times \frac{(ab)^{abc^2}\cdot(ac)^{ab^2c}\cdot(bc)^{a^2bc}}{a^{ab\,c^2}\cdot b^{a^2bc^2}\cdot c^{a^2b^2c}\cdot(abc)^{abc}}$$

reprezintă un număr întreg; a, b, c fiind numere prime absolute.

MAIOR I. LINTEŞ.

4467. Între l_9, latura poligonului regulat convex cu nouă laturi, şi raza R a cercului circumscris, există relaţia

$$(l_9^2 - 2R^2)\,(l_9^2 + \sqrt{3}\,Rl_9^2 - R^2) + R^4 = 0,$$

din care se deduce

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}R < l_9 < R.$$

C. IONESCU-BUJOR.

4468. Se consideră cercurile (C_1), (C_2) şi (C_3). Fie R raza cercului circumscris triunghiului format de centrele acestor cercuri, iar r raza cercului ortogonal cercurilor (C_1), (C_2) şi (C_3). Fie, deasemeni α_1, α_2, α_3 razele cercurilor ortogonale la două din cercurile considerate şi trecând prin centrul celui de-al treilea; iar β_1, β_2, β_3 razele cercurilor ortogonale câte unuia din cercurile (C_i), (C_2), (C_3) şi trecând prin centrele celorlalte două. Să se demonstreze că avem:

$$R^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = r^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2.$$

ŞERBAN A. GHEORGHIU.

4469. Fie A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului ABC şi A_1, B_1, C_1 punctele unde bisectoarele exterioare întâlnesc cercul circumscris lui.

Dacă M_1, M_2, M_3 sunt mijloacele segmentelor $\overline{A_1H}$, $\overline{B_1H}$, $\overline{C_1H}$, să se arate că dreptele $A'M_1$, $B'M_2$, $C'M_3$ sunt concurente.

THEODOR GH. COCEA.

4470. Fie $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ două triunghiuri înscrise în acelaş cerc O, M un punct al cercului, iar D_1 şi D_2 cele două drepte ce conţin simetricile punctului M în raport cu laturile triunghiurilor $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$. Se cere, când M descrie cercul O, locul punctului de intersecţie al dreptelor D_1 şi D_2.

CEZAR IVĂNESCU.

4471. Să se arate că expresia

$$(x+a)(y+b)(z+c)(u+d)-(y+z+u-a)$$
$$(z+u+x-b)(u+x+y-c)(x+y+z-d)$$

se divide cu $x+y+z+u$. Să se generalizeze.

N. BOTEA.

4472. Să se demonstreze, că o condiţie necesară ca o ecuaţie de gradul n

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n=0$$

să aibă toate rădăcinile reale este:

$$(n-1)A_1^2-2nA_0A_2\geqq 0.$$

M. GHERMĂNESCU.

4473. Presupunând că λ este diferit de jumătatea unui număr impar, să se integreze ecuaţia diferenţială:

$$(1-x^2)y''+(2\lambda-1)xy'+[(n+\tfrac{1}{2})^2-\lambda^2]y=0$$

ştiind că admite două integrale de forma:

$$y=(x+1)^{\lambda+\frac{1}{2}}P(x)+(x-1)^{\lambda+\frac{1}{2}}Q(x)$$

unde $P(x)$ şi $Q(x)$ sunt două polinoame în x.

GH. TH. GHEORGHIU.

4474. Să se discute contribuţia geometrică dată de D-l R. GOORMAGHTIGH în nota No. 10 din G. M. No. 2, anul XL.

LT. C-DOR GH. N.

ERATĂ. La pag. 130 din acest an în şirul de jos al terminaţiunilor unui patrat să se adauge şi 29.

La Cererea No. 242, pag. 176 se va scrie GIURCOVICI în loc de GURCOVICI.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu M. (4379); *Arşavski A.* (4190, 410); *Bălăceanu Gella* (4329, 402); *Berdan I. C.* (4425); *Bogdan Gr.* (4459); *Bogdan G. I.* (4418, 31); *Boiangiu I. Gh.* (4060, 305, 444); *Boitan N.* (4436); *Bucur N. Virgil* (4418, 30, 31, 39); *Buzincu I. Ioan* (4418, 30, 31, 39); *Caracudovici Margareta* (4329, 79, 87, 98, 420, 37); *Ceauşescu F. Vasile* (4075, 84, 96, 154, 58, 99, 297, 98, 379, 400, 13, 15, 22, 31, 60); *Chiriac Const.* (4388); *Coandă I. V.* (4343, 61); *Cojocaru P. Petre* (4409, 18, 30, 31, 39, 43); *Cotescu Costel* (4398, 409, 18, 30, 39, 43); *Cseke W.* (2692); *Dan Marin* (4196; *Dobrescu A.* (P); *Dobrescu P.* (2671, 4339, 43, 443); *Dumitrescu C. I.* (4439); *Enăşescu D. Victor* (4418, 30, 39); *Florescu H.* (4379); *Gavrilescu N. Const.* (4379, 424, 30, 31, 39); *Goldenberg E. M.* (4460); *Grigorescu Vintilă* (4254, 329, 67, 443, 51, 59); *Ionescu Virgil* (4409); *Isac D-tru* (4430); *Ivanciu A.* (4343); *Lebădă D.* (4343, 61); *Măgală Gh.* (4436); *Mănac M.* (4408, 43); *Margulis Grişa* (N); *Margulius Marius* (4407); *Marin D.* (4432); *Mavrodin D.* (4401); *Negoiţă C.* (4298); *Negrea A. M. Leonte* (3636, 4407, 43, 48, 57, 60); *Nesemnat* (4422); *Niţescu Gh.* (4444); *Petrescu I. I.* (4084, 95); *Postelnicescu C. M.* (4234); *Predoescu I. M.* (4056); *Rada D-tru* (4459); *Roman N.* (4436); *Sager N. Iancu* (4375, 79, 94, 407, 08, 09, 10, 13, 36, 37, 44, 51, 53, 55, 59, 60, 62); *Savovici Fl.* (4424, 36); *Stănescu M. Em.* (4379); *Ştefănescu Goangă* (3824); *Ştefănescu D. Nic.* (4418, 43); *Thébault V.* (A, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XL

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1935

SUMARUL

1. Inaugurarea casei „Gazeta Matematică“ . . . *A. D. Bunescu.*
2. Cuvântarea S. S. Preotului C. Moise.
3. Cuvântarea d-lui Profesor Ion Ionescu.
4. Cuvântarea d-lui Colonel Gh. Buicliu.
5. Cuvântarea d-lui Profesor Gh. Ţiţeica.
6. Contract de Vânzare — Cumpărare între „G. M.“ şi „S. T. B.“
7. Concursul „Gazetei Matematice“.
8. Note matematice: 25.
9. Bibliografie.
10. Cereri: 244.
11. Diverse.
12. Probleme rezolvate: 825, 2643, 4158, 4218, 4273, 4310, 4312, 4325, 4336, 4345.
13. Exerciţii: 22, 23, 24, 25, 26.
14. Probleme propuse: 4475 — 4486.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1935

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică" având sediul în Bucureşti („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Armamentului; **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie

---

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 65, 66, 68, 70, 76, 80, 84, 89, 90, 91, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 14, 16, 17, 21, 26, 38, 40, 41, 42, 45, 46, 47, 49, 50, 52, 54, 58, 61, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela „*Gazeta Matematică*" cu preţul de 12 lei.

CASA
CREETA MATEMATICA
STEIA

INAUGURAREA CASEI „GAZETA MATEMATICĂ“

Duminică, 27 Ianuarie 1934, orele 10½

Născută din minți și suflete și trăind din entusiasm, ființa sintetică spirituală care este «Gazeta Matematică» n'a suferit de lipsa unui trup material în cei 40 ani pe care i-a străbătut.

Dragostea de știință și dragostea de școala românească, erau prea puternice la întemeietorii și membrii ei, pentru a fi lăsat ca o asemenea nevoie să se facă simțită. Dar a fost o tot atât de înțeleaptă prevedere grija de a-i făuri acest trup, așa cum ni se înfățișează Casa Gazetei Matematice: etajul I cu sala sa de adunări, cu cele două biblioteci și cu cancelaria, și parterul al cărui venit să înlesnească trecerea vremurilor de lipsuri, printre care să sperăm că nu vor fi în niciun caz lipsuri de entusiasm.

De aceea și inaugurarea de Duminică 27 Ianuarie 1934, s'a deosebit de toate celelalte: semnificația a fost prea ideală mai ales în împrejurările de azi, atmosfera a fost prea caldă și modestia prea multă pentru o solemnitate; a fost o oficiere de un înțeles mai înalt.

S. Sa Preotul C. MOISE dela *Biserica Sf. Vineri - Nouă* a tradus foarte bine aceste stări și în cuprinsul slujbei sale și în cuvintele cuminți și atât de potrivite pe care le-a rostit.

Istoricul străduințelor care au condus la realizarea Casei «Gazeta Matematică» l-a făcut d-l Profesor ION IONESCU, membru fondator. Și-a luat această sarcină spre a evita laudele pe care altul, vorbind în locul d-sale, ar fi trebuit și în această împrejurare să i le aducă. Și atunci a preferat să vorbească d-sa călduros despre mulți alții, după ce a adresat un salut omagial d-lui Profesor DAVID EMANUEL, prezent în sală și a descris cu o eloquentă simplitate peregrinările redacției, administrației, casieriei, bibliotecii și adunărilor Gazetei, timp de 40 de ani.

A arătat recunoștința Gazetei pentru toți cei care au contribuit sub toate formele la realizarea care se sărbătorește: pentru regretatul TRAIAN LALESCU — în memoria căruia asistența păstrează un minut de pioasă reculegere — și pentru d-l TANCRED CONSTANTINESCU cărora se datorează obținerea gratuită a terenului, pentru d-l N. TEODORESCU și mai ales pentru d-l MIHAIL MANOILESCU care au înlesnit cea mai mare parte din fondurile necesare, pentru d-l GH. FILIPESCU care a dat posibilitatea construcției clădirii prin

cumpărarea a 6 etaje de către S. T. B.*), pentru d-l A. IOANOVICI care a executat lucrarea în prețul de cost și în sfârșit pentru toți membrii care, în frunte cu d-l Profesor GH. ȚIȚEICA, au zidit aci o parte din sufletul lor, ca zidirea să rămâie nepieritoare.

Vorbind în numele delegației despre executarea Casei și despre aportul fiecăruia în această înfăptuire, d-l Colonel GH. BUICLIU, dând expresie sentimentului care stăpânea asistența, provoacă manifestarea călduroasă a acesteia, de dragoste și de recunoștință, pentru « spiritus rector » și « stâlpul » Gazetei Matematice: d-l Profesor ION IONESCU.

Dar mai trebuia un cuvânt pentru viitor. Viitorul este și o chestiune de « trecut » — după cum spun filozofii —, și o chestiune de filozofie — după cum spun istoricii. Și atunci acest cuvânt a fost al d-lui Profesor GH. ȚIȚEICA, despre care îmi aduc aminte din vremea concursurilor «Gazetei Matematice», că era în corespondență cu ARHIMEDE și APOLLONIUS. D-sa a arătat nădejdile viitorului bazate pe faptele trecutului și pe sufletul prezentului.

Se dă apoi citire telegramelor și scrisorilor primite.

Membrii și prietenii dela Cluj au telegrafiat:

« Membrii seminarului matematic dela Universitatea din Cluj se asociază cu adâncă bucurie la inaugurarea Casei Societății Gazeta Matematică. Urează fondatorilor IOACHIMESCU, IONESCU și ȚIȚEICA multă sănătate, pomenesc cu adâncă pietate numele Inginerului CRISTESCU. Prin credința, munca, stăruința și jertfa lor s'a putut ajunge la sărbătorirea aceasta. Exprimă o pioasă amintire pentru iluștri membri dispăruți. Urează Societății în Casa proprie, durată infinită, prosperitate și renume. Trăiască Societatea, trăiască membrii ei ».

ABRAMESCU, ANGHELUȚĂ, ARMEANCA, BĂDESCU, BRATU, CĂLUGĂREANU, IONESCU, IUGA, POPOVICIU, SERGESCU.

Au mai telegrafiat calde urări: d-l Ing. C. TEODORESCU, rectorul Școalei politehnice din Timișoara și d-l Comandor JIJIE.

Scrisori de felicitare au trimis d-nii Ing. A SMÂNTÂNESCU și N. N. GEORGESCU.

Au fost martorii acestei înălțătoare serbări a idealismului, în ordine alfabetică:

*) Publicăm în acest număr textul contractului.

Dintre invitați d-nii: Profesor DAVID EMANUEL, profesorul tuturor celor prezenți, Colonel IACOB FILIP, Profesor N. GHIULEA, Avocat AL. IONESCU, Inginer RADU IRIMESCU, Subsecretarul de Stat al aerului, Lt. Comandor R. NICULESCU, Arhitect V. ȘTEFĂNESCU, Profesor V. VÂLCOVICI, fost ministru și Inginer Insp. Gen., N. VASILESCU KARPEN, rectorul Școalei Politehnice «Regele Carol II», fost ministru.

Dintre membri, d-nii: I. ANTONIU, D. BARBILIAN, N. BOTEA, C. BUDEANU, GH. BUICLIU, N. BUJOREANU, A. D. BUNESCU, C. D. BUȘILĂ, I. BUȘILĂ, I. CHIȚULESCU, M. CIOC, N. CIORĂNESCU, D. DUMITRESCU, GH. FILIPESCU, M. FOCȘĂNEANU, N. I. GEORGESCU, M. GHERMĂNESCU, GH. GHEORGHIU, M. HANGANU, R. IANCULESCU A. IOACHIMESCU, G. IOACHIMESCU, A. IOANOVICI, C. IONESCU BUJOR, I. IONESCU, C. LAZU, I. LINTEȘ, GH. LITEANU, CR. MATEESCU, C. MITITELU, I. MITITELU, P. NEAMȚU, G. NICHIFOR, C. ORĂȘANU, A. PANTAZI, I. POPESCU, T. POPP, M. PORTOCALĂ, R. RACLIȘ, T. REVICI, V. ROȘU, M. SARIAN, GH. STAMATESCU, D. STAN, O. ȚINO, GH. ȚIȚEICA, AL. ULESCU, GR. VASILESCU, GH. VASILIU, GR. ZAPAN.

O placă fotografică fixează, la ora 12, comunitatea sufletească a unei adunări pe care fiecare o părăsește cu rara satisfacție a conștiinței de a fi părtaș la un bine pentru care nu așteaptă recompensă personală.

* * *

La ora 1 aceeași atmosferă caldă — cine a zis că știința e rece? — se transportă, într'un mod dacă nu firesc, în orice caz tradițional, la o masă intimă la restaurantul Continental.

Următorii membri, având între ei pe d-l Arhitect Inspector general VICTOR ȘTEFĂNESCU, care a proiectat Casa, au mai petrecut 2 ceasuri de plăcută reuniune, a cărei comunitate n'a fost desmințită decât de ... notele separate de plată:

I. ANTONIU, N. BOTEA, GH. BUICLIU, A. BUNESCU, I. BUȘILĂ, GH. FILIPESCU, N. I. GEORGESCU, M. GHERMĂNESCU, GH. GHEORGHIU, A. IOACHIMESCU, G. IOACHIMESCU, A. IOANOVICI, C. IONESCU-BUJOR, I. IONESCU, I. LINTEȘ, GH. LITEANU, C. MITITELU, I. MITITELU, O. ORĂNESCU, C. ORĂȘANU, A. PANTAZI, M. SARIAN, G. STAMATESCU, D. STAN, O. ȚINO, GH. ȚIȚEICA, GR. VASILESCU, GH. VASILIU, GR. ZAPAN.

A. D. BUNESCU
Membru în Delegația Societății.

Cuvântarea S. S. Preotului C. MOISE de la biserica Sf. Vinerea Nouă

Prea aleasă asistență,

Invocând binecuvântarea cerească asupra acestui tânăr și frumos locaș, răsărit aici din solidara străduință a membrilor Societății « Gazeta Matematică », [vă rog să-mi îngăduiți a mă asocia la obștească bucurie care încunună astăzi o așa prețioasă realizare.

Astfel de înfăptuiri date la iveală de colectivități ai căror membri conlucrează în chip loial, sub călăuzirea unui ideal nobil, reprezintă însăși voința lui Dumnezeu, care iubește și sprijinește cooperarea întemeiată pe dragoste, cinste și dreptate.

De aceea, ca reprezentant al bisericii, împărtășind bucuria acestor clipe, urez Societății « Gazeta Matematică » continuă prosperitate și tot mai multe realizări spre slava lui Dumnezeu și binele obștesc.

Cuvântarea d-lui Profesor ION IONESCU, Inginer-Inspector general, membru fondator

In toamna trecută s'au împlinit 40 de ani de când cinci ingineri tineri, care absolviseră Școala Națională de Poduri și Șosele de cel mult doi ani, și dintre care cel ce vă vorbește astăzi este singur viețuitor, — ceilalți fiind VICTOR BALABAN, VASILE CRISTESCU, MIHAIL ROCO și ION ZOTTU, – discutând rezultatele foarte slabe pe care le dăduse Concursul de admitere în Anul I al acelei Școale, și-au pus problema publicării unei reviste de matematici în limba română, spre a veni în ajutorul învățământului acestei științe în liceele și școlile noastre superioare. Mijloacele lor financiare ereau slabe și nu puteau asigura vitalitatea scoaterii unei reviste; mai trebuiau încă cel puțin cinci inși, cu dor de muncă și predispuși la sacrificii, iar nu de cei doritori de cinste. I-am căutat, și după zece luni i-am găsit; ei au fost: EMANOIL DAVIDESCU, TANCRED CONSTANTINESCU, ANDREI IOACHIMESCU, MAURICIU KINBAUM și NICOLAE NICOLESCU. Toți acești zece erau foști elevi ai iubitului lor profesor DAVID EMMANUEL. Profit de prezența D-sale în această sală pentru a-i reînnoi recunoștința noastră și a-i exprima aci cele mai vii mulțumiri pentru cinstea ce ne-a făcut de a asista la această serbare a noastră.

Cu ajutorul celor zece ingineri, problema ce ne-o pusesem a putut fi rezolvată: *Gazeta Matematică* a început să apară la 15 Septemvrie 1895, a doua zi după înaugurarea podului peste Dunăre *„Regele Carol I"* dela Cernavodă. De atunci *Gazeta Matematică* apare în mod neîntrerupt, nefiind suspendată nici chiar pe timpul războiului mondial!

Acest rezultat uimitor nu s'a putut obţine fără un mare entusiasm al fondatorilor ei şi fără entusiasme noi care să vină în urmă să-l întărească şi să-l sprijine din timp în timp; ea a cerut o muncă continuă desinteresată, sacrificii mari de timp şi de bani şi o armonie desăvârşită în conducere. Succesul *Gazetei Matematice* va fi sărbătorit în mod special în toamna viitoare, când ea împlineşte 40 de ani de existenţă; atunci se va arăta pe larg desfăşurarea ei în timp; astăzi însă suntem adunaţi aici pentru o chestiune de spaţiu: pentru inaugurarea localului ei *„Casa Gazeta Matematică"*.

* * *

Ideea de a se scoate *Gazeta Matematică* nu a apărut în cine ştie ce sală mare, plină de lume, cu oratori şi auditori, cu dări de seamă prin jurnale şi prin reviste; ea s'a născut într'o odăiţă mică, cea mai mică din fundul unei curţi, pe strada Manea Brutaru No. 14 (azi strada General Budişteanu), în clădirea în care erau instalate birourile pentru construcţiunea Liniei ferate Feteşti-Cernavodă de sub Direcţiunea ilustrului Inginer ANGHEL SALIGNY. In aceiaşi odăiţă s'a plămădit şi primul număr din primul an; de acolo a fost el expediat în toată ţara.

De atunci şi până azi *Gazeta Matematică* a trăit în perioada nomadă; ea nu şi-a avut, nu numai casa ei proprie, dar nici măcar o cameră luată cu chirie! Noi, care aveam grija aparițiunii regulate a revistei în timp, nici nu ne-am gândit măcar la stabilizarea ei în spaţiu; toată preocuparea noastră, toate resursele de care dispuneam aveau ca prim ţel aparițiunea revistei, matematiceşte exact la data de 15 ale fiecărei luni, cum scria pe coperta fiecărui număr. Acesta erea un angajament moral al nostru, inspirat dela ştiinţa cea mai exactă, *matematica;* angajament luat în faţa tinerilor doritori de preciziune şi de cultură, în faţa ţării, în faţa lumei ştiinţifice. Pe de altă parte, propăşirea *Gazetei Matematice* în raport cu necesităţile învăţământului, sporirea ei în raport cu mărirea numărului corespondenţilor şi a cerinţelor de publicare a manuscriselor,

apoi crearea de noi mijloace pentru răspândirea culturii matematice, ca publicare de cărți, premii, concursuri, etc., au fost și sunt și azi preocupări continui ale vechilor Redactori și ale actualilor membri ai *Societății Gazeta Matematică*.

Vitalitatea Revistei constituia prima noastră grijă; gândul numai că *Gazeta Matematică* ar putea înceta înainte de a muri noi, fondatori și susținători ai ei, ne îngrozea!. Am preferat să o vedem nomadă, numai să o vedem luându-și sborul în fiecare lună; am preferat să o vedem fără casă a ei, decât moartă într'un palat propriu, sinucisă pentru neplată de datorii.

Pentru aceste motive, am hoinărit cu Redacția și Administrația Revistei, cu adunările bilunare ale redactorilor pentru aranjarea materiilor de publicat și a copertelor (care arătau bilanțul problemelor și manuscriselor primite), precum și cu depozitele de numere și de volume precum și cu biblioteca cărților tipărite de noi sau primite la redacție. Ne duceam acolo unde eram primiți și găzduiți și plecam când eram goniți!.

Administrația Revistei a fost totdeauna la domiciliul sau la administrațiunile unde funcționau casierii Gazetei. Astfel ea s'a plimbat prin străzile Rotari, Călușei, la Fabricile de Tutun și de Chibrituri și la «Monitorul Oficial».

Manuscrisele destinate *Gazetei Matematice* se trimeteau la început redactorilor care se însărcinau cu cercetarea și redactarea lor, și a căror adresă era dată pe coperta fiecărui număr. In urma înmulțirii corespondenților, sistemul acesta avea numeroase inconveniente, redactorii neputându-se întruni toți în zilele fixate spre a aduce manuscrisele primite și de aci reclamațiuni dese și justificate. De aceea, după constituirea *Societății Gazeta Matematică* la 1 Septemvrie 1909, s'a ales anual un membru care primea manuscrisele și le distribuia redactorilor de serviciu. Cu modul acesta, manuscrisele veneau în strada Plantelor, apoi în străzile Sf. Ionică, Occidentului, Dumitru Racoviță, Știrbei Vodă și la Fabrica de Chibrituri.

Tipărirea *Gazetei Matematice* s'a făcut la început la o tipografie mică din mansarda unei case din Pasagiul român, *Tipografia Populară*, unde au eșit patru numere în condițiuni foarte grele. Am trecut apoi la Tipografia *F. Göbl & Fii* care și-a dat osteneala de a o tipări în condițiuni admirabile, la timp și pe un cost redus.

De acolo am plecat, odată pentru întârziere de apariţiune, din cauza unei greve, altă dată din cauza unui cost prea ridicat şi în urmă din cauza războiului. Am mai tipărit revista la tipografiile *I. V. Socec,* şi *Universala,* până ce regretatul nostru coleg I. D. TEODOR, ajutat de colegul G. BORNEANU, au dus-o la Tipografia Fabricilor de Chibrituri şi Timbre unde s'a tipărit în cost, şi astfel s'a putut reface complect după răsboiu. De acolo ea a trecut la «Monitorul Oficial», odată cu concentrarea tipografiilor Statului într'o singură administraţiune.

Depozitele de numere, de volume, şi de cărţi tipărite în *Biblioteca Gazetei Matematice* începută în anul 1901, — au fost mutate din strada Manea Brutaru, succesiv în străzile Căluşei, Traian, Occidentului, apoi la Fabrica de Chibrituri şi la «Monitorul Oficial». De multe ori ele au stat prin poduri de case, prin beciuri igrasioase, prin spălătorii şi prin magazii astfel ca multe din ele au fost mototolite, mucegăite sau furate. Biblioteca cărţilor primite pentru anunţare, recenzie, în dar sau cumpărate s'a bucurat de stabilitate, de oarece ea a fost lăsată tot timpul în seama mea; ele sunt azi depuse în cea mai mare parte în biblioteca de aci din dreapta. Cărţile donate de familia defunctului Profesor ieşan I. RALET, au fost luate de răposatul TRAIAN LALESCU, la moartea căruia familia le-a încredinţat în parte finului lui I. CHIŢULESCU, însă o bună parte din ele nu s'au mai găsit acolo. Cei ce le-au împrumutat ar face bine să le aducă aici.

Adunările bilunare ale redactorilor s'au ţinut la început în locaşul în care s'a născut *Gazeta Matematică*, până când, — după terminarea lucrărilor Podului peste Dunăre la Cernavoda, întemeietorii au fost împrăştiaţi pe la alte servicii inginereşti. Acele adunări şi mai târziu adunările generale ale Societăţii, s'au ţinut pe la Societatea Politehnică, sau pe la diferite Administraţiuni conduse de colegi de ai noştri, ca la Direcţiunile generale ale Regiei Monopolurilor Statului, a Porturilor şi Căilor de comunicaţiune pe apă, şi a «Monitorului Oficial». Alteori, aceste şedinţe se ţineau la domiciliul unora dintre redactori, în condiţiuni destul de grele, căci locuinţele lor nu ereau în treimea mijlocie a Capitalei, ci mai spre periferia ei. Astfel mult timp aceste şedinţe s'au ţinut la locuinţa colegului A. IOACHIMESCU, la Fabrica de tutun Belvedere, unde a avut loc şi prima masă oferită de D-sa candidaţilor, la primul concurs general

de matematici ţinut de noi, în Bucureşti. Acolo ne întruneam seara la ora 9 şi aranjând publicarea numărului următor, sau a copertei lui, ne apuca uneori ora 2 după miezul nopţii, după care o porneam noaptea apostoliceşte, deseori pe ploaie, pe ger sau pe viscol cu colegul G. ŢIŢEICA, până la dânsul acasă în Tirchileşti, mai apoi în Lucaci, şi de acolo la mine în strada Călugărei, dincolo de Oborul vechiu! In acele şedinţe lungi de noapte, căutând unele manuscrise rătăcite printre corespondenţe oficiale sau personale, colegul IOACHIMESCU a descoperit o nouă lege a Naturii: *„Nimic nu se pierde, dar nu se găseşte"*.

Ca şi negustorii ambulanţi, cari se adună anual prin diferite târguri, şedinţa care cădea în timpul Târgului Moşilor o ţineam şi noi acolo; la acea şedinţă participau şi familiile membrilor. Obiceiul acesta se păstrează şi azi.

In câteva rânduri, una din şedinţele bilunare s'a ţinut şi în afară din Bucureşti, ca la Iaşi, Buşteni, Govora, Dealul Manole din Dobrogea, la construcţia podului peste Siret la Adjud, la construcţia liniei Moroeni-Sinaia şi la a liniei Medgidia-Bazargic, după războiul cu Bulgaria.

Şedinţa de constituire a «Societăţii Gazeta Matematică» a avut loc la via mea din Valea Călugărească, în August 1909.

In timpul războiului, activitatea *Gazetei Matematice* s'a desfăşurat la Iaşi. Ea a avut permisiunea de a fi trimisă corespondenţilor noştri de pe front, cari au rămas convinşi de axioma, că *„Atâta timp cât Armata română este în picioare, cugetarea română şi dragostea pentru ştiinţă nu pot fi distruse"*. Din cei 47 membri ai Societăţii, numai patru au rămas în teritoriul ocupat de inamic, unii din ei având şi atribuţiuni lăsate de guvern. In serviciile militare ne găseam: 1 General, 5 Maiori, 14 Căpitani, 11 Locotenenţi şi 1 Plutonier, iar restul de 12 în Servicii auxiliare. Adunările le ţineam la locuinţa lui LALESCU, a colegului V. TEODOREANU, pe la Şcoli, la Cenzura militară şi pe la unii membri ce se aflau cu Serviciile la Iaşi, Manuscrisele se trimeteau lui LALESCU şi apoi D-lui V. TEODOREANU; casieria era la D-l G. NICHIFOR, mobilizat la censura militară, iar Revista apărea la vechea tipografie *H. Goldner*.

* * *

Viaţa nomadă a *Gazetei Matematice*, destrămarea Serviciilor ei în diferite puncte ale Capitalei, nu erau de natură să nu ne

facă să ne gândim şi să discutăm, în şedinţele noastre, şi la chestiunea închirierii unei case, construirea unui local propriu şi chiar a unei Tipografii speciale pentru matematici. Prin 1912 Colegul A. IOACHIMESCU fiind numit *Directorul Societăţii Comunale de Locuinţe eftine,* s'a emis ideea ca să ne facem şi noi o asemenea locuinţă. La masa dată după Concursul din 1915, Colegul N. TEODORESCU a susţinut cu căldură necesitatea creerii unui templu al *Gazetei Matematice* la care să se închine tinerii, cum fac credincioşii în biserici.

După războiu, văzându-se că se recompensează combatanţii chiriaşi prin împroprietărire de locuri pentru construire de case s'a zis: de ce nu ar cere şi *Gazeta Matematică* un loc? Nu a fost şi ea alături de *Armata Română?* Nu a fost şi ea pe front, sporind ştiinţa soldaţilor şi ofiţerilor corespondenţi şi a celor ce se pregăteau pentru războiu în şcolile speciale? Ca ecou al acestei idei, colegul AL. BUNESCU, la masa dată după concursul din 1926, cere Guvernului împroprietărirea *Gazetei Matematice* într'un loc mai central!

In altă ordine de idei trebue să menţionăm încercările de a se crea un fond pentru localul *Gazetei Matematice.* Prima propunere reală a făcut-o membrul fondator N. NICOLESCU în Adunarea generală din 1920, când a trimis 500 lei pentru începerea strângerii unui asemenea fond. Colegul G. ŢIŢEICA, în articolul de păşire al *Gazetei Matematice* în al 26-lea an de viaţă, atrage atenţiunea cititorilor revistei că Societatea noastră este persoană morală şi că poate primi legate şi donaţiuni. După cinci ani, în primul număr al anului XXXI, am scris şi eu un articol intitulat: *Localul Societăţii Gazeta Matematică,* în care făceam aluzii analoage. Arătam acolo că matematica nu e o marfă curentă care să îmbogăţească pe vânzători, că nu e o marfă de lux căutată de bogaţi şi de îmbogăţiţi, că e o piatră preţioasă dar a cărei strălucire nu se vede. Matematica sperie pe copii mai rău ca gogoriţele, pune pe drumuri pe părinţi mai rău ca stafiile. Cu *folium de ale lui* DESCARTES şi cu *roze cu patru foi* nu se pot face bătăi de flori pentru strângere de fonduri! Cu studiul mişcării punctului material şi al corpurilor rigide, nu se pot da baluri producătoare de venituri! Trebuiau şi aci entusiasme noi, ca acelea care au creat *Gazeta Matematică.*

Cu aceste preliminări spuse, intrăm acum în perioada de realizare a idealului de a se da *Gazetei Matematice* un local propriu. In anul 1923, TRAIAN LALESCU aude că Direcţiunea generală a Căilor ferate parcelează un teren pe care-l are lângă Gara de Nord şi că vinde acele parcele personalului superior din acea Administraţiune. Se duce atunci la Colegul TANCRED CONSTANTINESCU, care era pe atunci Directorul general al Căilor ferate, şi îi cere o parcelă pentru *Gazeta Matematică*. D-sa a primit cu multă căldură această propunere, a ales una din cele mai frumoase parcele cu faţada la Calea Griviţa, parcelă pe care ne găsim acum; a făcut apoi un raport Ministrului Comunicaţiilor de pe atunci, Generalul TRAIAN MOŞOIU, care a primit cererea cu toată simpatia. Acesta a obţinut autorizaţia Consiliului de Miniştri de a se ceda parcela şi de a supune REGELUI FERDINAND I semnarea Inaltului decret din 20 Iulie 1923, pentru împroprietărirea *Gazetei Matematice*.

Cum însă la noi unii Miniştri desfac ceeace au făcut alţii, am spus lui LALESCU, care era pe atunci deputat, ca să desăvârşească ceeace a făcut şi anume să treacă prin Corpurile Legiuitoare o Lege de împroprietărire. Adunarea Deputaţilor a votat Legea cu unanimitate. Când să treacă la Senat, s'au ivit amatori pentru această parcelă, Ministrul respectiv ne-a cerut să renunţăm la dânsa, pentru că ne va da alta într'alt loc. Noi nu am consimţit, şi prin stăruinţele lui LALESCU şi a altor colegi Senatul a primit legea, însă cu $14^0/_0$ voturi contra! Ea a fost promulgată la 4 Aprilie 1924. Fără acea lege parcela ar fi fost desigur luată înapoi!

* * *

Odată locul obţinul definitiv, am început să ne preocupăm de adunare de fonduri pentru construcţiune. In Iunie 1924 s'a ales, dintre membrii Societăţii, un Comitet sub Preşedinţia de onoare a lui ANGHEL SALIGNY. Preşedinte activ a fost ales Colegul TANCRED CONSTANTINESCU, care fiind apoi numit Ministru, a fost înlocuit cu Colegul N. TEODORESCU. D-sa a depus multă stăruinţă şi s'a adunat astfel o sumă de peste 400.000 lei care a fost depusă spre fructificare la Banca Românească.

In seara zilei de 10 Aprilie 1926 a avut loc o masă dată în cinstea candidaţilor la Concursul *Gazetei Matematice* din acel an. La acea serbare a luat parte şi colegul nostru M. MANOILESCU, pe atunci Subsecretar de Stat la Ministerul Finanţelor. D-sa fusese unul

din cei mai activi corespondenți ai *Gazetei Matematice* pe când era în cursul superior al Liceului și premiat la patru concursuri consecutive. In cuvântarea pe care a ținut-o atunci, a arătat rolul pe care l'a avut revista noastră în formarea gândirii și idealismului foștilor ei corespondenți din Liceele din țară și a încheiat declarând, — în numele Guvernului din care făcea parte, și pe care-l reprezenta la acea serbare, — că va dona *Gazetei Matematice* fonduri suficiente pentru a se începe construcțiunea pe cel puțin un etaj. Promisiunea făcută a fost ținută: D-sa a dat din fondurile culturale suma de un milion lei, pe care colegul GH. FILIPESCU a luat-o și a depus-o repede la Banca Românească pentru fructificare. Acolo D-l N. P. ȘTEFĂNESCU, Directorul general al Băncii, ne-a făcut condițiuni favorabile, care au permis o sporire sensibilă a Capitalului destinat localului, și pentru care îi exprimăm aci viile noastre mulțumiri.

Cu sumele strânse la această Bancă s'a început să se întrezărească posibilitatea de a se construi localul. Sumele adunate însă nu ereau suficiente pentru a se face o construcțiune de 17 m înălțime, cum cerea Primăria pe Calea Griviței în fața Gării de Nord. S'a amânat dar clădirea până când se va mai strânge fonduri sau până se vor găsi aranjamente financiare, pentru facerea de împrumuturi, ale căror amortismente să se poată scoate din veniturile ce le-ar da chiriile magazinelor de la parter și ale etagelor cu apartamente. Pentru ca să nu se piardă timpul, după propunerea fostului nostru Coleg VASILE CRISTESCU, Societatea a angajat pe D-l Arhitect VICTOR ȘTEFĂNESCU cu elaborarea unui proiect de local.

In cursul anului 1933 svonurile de devalorizarea leului ne-au pus pe gânduri și atunci ne-am zis că este mai nemerit să băgăm tot capitalul ce aveam într'o construcție, de mărimea care se cerea de Primărie și care să fie cât mai economică, — chiar dacă nu am putea-o termina. Rămânea să se vază în urmă ce mai se putea face pentru ca clădirea să fie terminată și utilizată. Astfel s'a emis ideea ca să facem și noi ceeace a făcut *Societatea Politecnică* pentru construcția Palatului ei din Calea Victoriei, adică Societatea să construiască cu banii ei parterul și primul etaj iar restul să se facă apartamente care să se vânză la particulari sau la instituțiuni, în coproprietate cu *Societatea Gazeta Matematică* pentru totalitatea imobilului. Noi am fi posedat magazinele dela parter, pe care le-am fi închiriat, și etajul I în care s'ar fi instalat *Gazeta Matematică*. Cu

veniturile din Magazine s'ar fi acoperit cheltuelile de întreţinere, de luminat, de încălzit, de impozite, de personal, etc. şi eventual amortizarea cheltuelilor suplimentare de construcţiune şi de mobilier. Cu modul acesta, veniturile ordinare pentru tipărirea *Gazetei Matematice* ar fi rămas neatinse, dacă nu eventual mărite din surplusul veniturilor parterului faţă de cheltuelile arătate mai înainte. Ideea aceasta începuse să prindă rădăcini, căci se găsiseră printre noi amatori care să cumpere patru apartamente dela două etage, şi eream în căutarea încă a patru coproprietari pentru încă două etage.

In fine, un nou ajutor ne-a venit din partea Colegului A. IOANOVICI care s'a oferit să execute lucrarea repede şi în preţul de cost, fără nici un beneficiu. Astfel nu mai era nimic care să ne oprească de a nu începe construcţiunea şi de aceea în Septemvrie 1933 au şi început săpăturile, iar piatra fundamentală s'a aşezat la 27 Octomvrie 1933.

Intre timp, s'a rezolvat complect şi chestiunea coproprietarilor, căci colegul GH. FILIPESCU ne-a propus ca să vindem toate etagele, care nu sunt ale *Gazetei Matematice, Casei de Pensiuni a Tramvaelor Comunale Bucureşti,* care dispunea de fonduri improductive şi care căuta a le fructifica prin cumpărarea de imobile. Adunarea generală a primit cu multă plăcere această propunere, căci aducea Societăţii un singur coproprietar şi administrarea în comun se putea face mult mai simplu şi mai lesnicios. Cu modul acesta, şi chestiunea financiară a fost complet terminată. Executarea construcţiei, fără vreo eventuală întrerupere, a fost asigurată.

* * *

Aici rolul meu de istoric încetează şi cu cele spuse cred că am îndeplinit însărcinarea ce mi-a dat-o *Adunarea Generală* de a a vă expune fazele prin care a trecut chestiunea localului Societăţii, dela înfiinţarea *Gazetei Matematice* până la începerea acestei Case a ei. Aici, la noi, starea nomadă a *Gazetei Matematice* a dispărut; stabilizarea ei în spaţiu s'a făcut!

Şi acum în faţa acestui rezultat frumos obţinut după mari străduinţe, să-mi daţi voie, ca singurului rămas în viaţă dintre iniţiatorii *Gazetei Matematice*, ca unuia dintre fondatorii care mai trăiesc încă, ca unuia care de 40 de ani şi mai bine am muncit continuu şi am luptat pentru aparitiunea, menţinerea şi propăşirea acestei reviste de interes general, — să-mi daţi voie zic, — ca să-mi exprim

toată bucuria pe care o simț când văd *Gazeta Matematică* așezată temeinic în *Casa* ei proprie!

Din partea mea, și din partea Colegilor A. IOACHIMESCU și TANCRED CONSTANTINESCU, care au rămas neclintiți atașați de *Gazeta Matematică* dela întemeierea ei până azi, aduc mulțumirile cele mai vii tutulor acelora, care, veniți după noi, prin munca lor, prin dragostea lor pentru *Gazeta Matematică* și prin sacrificiile ce le-au făcut, au contribuit la faima acestei reviste și la ridicarea acestui templu al Culturii Naționale. In fruntea acestora stă Colegul G. ȚIȚEICA, care cum a văzut *Gazeta Matematică* la vitrina unei librării de pe Calea Victoriei, a dat goana după ea, iar după al doilea număr din anul I a venit alături de noi în Redacție.

Să exprimăm acum și recunoștință memoriei celor dispăruți, pe care i-am pomenit mai înainte și cari au lucrat cu toată dragostea și cu toată stăruința pentru ridicarea acestui frumos edificiu. Numele și figurile lor vor fi puse prin aceste săli pentruca exemplul dat de ei să fie un îndemn, pentru cei de azi și pentru generațiunile viitoare, de a înfăptui opere și mai frumoase și mai grandioase! Să le păstrăm un minut de reculegere!

Și acum, ca incheiere, întorcându-mi fața dela începuturile *Gazetei Matematice* și dela trecutul ei nomad, în spre viitorul ei, îmi este îngăduit să zic:

Poți închide Tu Doamne ochii mei, căci văzui acum mântuirea ei!

Cuvântarea d-lui Colonel GH. BUICLIU, membru în delegația Societății

Domnilor,

După expunerea atât de documentată a D-lui I. IONESCU, cuvântul delegației Societății nu mai are mult de adăogat.

Piatra fundamentală a localului casa «*Gazeta Matematică*», casa noastră la a cărei sfințire și inaugurare participăm astăzi, s'a pus în ziua de 27 Octomvrie 1933.

Avem în această casă etajul I, în care ne-am instalat biblioteca, sala de adunări și o mică încăpere pentru administrație și dispunem de 5 prăvălii la parter, al cărora venit, ne propunem a-l folosi în scopul pentru care a fost creată *Gazeta Matematică*, stimularea și propagarea învățământului matematic.

Planurile clădirei, au fost întocmite de D-i arhitect V. ŞTEFĂNESCU, care a ştiut să îmbine într'un chip foarte armonios, nevoile noastre cu mijloacele restrânse, pe care le-am avut la dispoziţie. Îi mulţumim călduros şi-l felicităm, pentru modul cum ne-a întocmit planurile.

A urmat apoi înfăptuirea, executarea acestor planuri, construcţia localului, care s'a făcut în antrepriza D-lui Ing. A. IOANOVICI. Nu cred că e nevoie să subliniez în vre-un fel, şi nici nu aşi găsi cuvinte să o fac, modul perfect în care D-sa a executat această construcţie, ca de altfel toate lucrările care se execută sub conducerea D-sale. Din acest punct de vedere, reputaţia D-lui Ing. A. IOANOVICI a depăşit multe limite. Mă opresc numai asupra unui fapt, capital de altfel. D-l A. IOANOVICI ne-a construit casa în preţul de cost şi ceeace nu se poate pricepe în perioada instabilităţilor, a reuşit să o facă sub deviz. In fine, pentru a ne ului şi mai mult cu dragostea sa pentru *Gazeta Matematică*, ne-a făcut dar, întregul mobilier, lămpile, perdelele ş. a., a căror valoare a ajuns la impresionanta sumă de 230.000 lei. Aproape în fiecare din şedinţele lunare ale ultimului an, auzeam refrenul: D-l A. IOANOVICI a donat, donează sau s'a oferit să doneze. Nu găsim nici un echivalent cu care să-i exprimăm recunoştinţa noastră, decât denunţându-l aici în faţa Dv. şi adresându-i mii de mulţumiri călduroase.

Executarea construcţiei a fost supraveghiată, dacă mai era nevoie de supraveghere, de o comisiune compusă din D-nii Ingineri V. BRUCNER, I. IONESCU şi A. STAN, care au făcut şi recepţia definitivă.

D-lor, partea noastră de debit la capitalul recunoştinţei este extrem de încărcată şi ea se îndreaptă în foarte multe direcţii.

Incepem prin a ne îndrepta gândul cu pietate către TRAIAN LALESCU, acest strălucit pion al ştiinţei româneşti, ale cărui scânteieri geniale, l-au înscris în galeria matematicienilor de seamă. TRAIAN LALESCU este acela, care cu un entusiasm tineresc şi un devotament deosebit pentru *Gazeta Matematică*, a reuşit să ne împroprietărească în 1923 pe acest loc, legându-ne de el prin toate formele şi formulele aşa încât să avem siguranţa stăpânirei lui, absolute şi veşnice. Se cuvine ca în semn de recunoştinţă, să-i acordăm un nou moment de pioasă reculegere şi să-i cinstim amintirea prin pomenirea continuă.

Mulţumim în chip deosebit D-lui Advocat AL. IONESCU, primul

secretar la *Gazeta Matematică*, pentru osteneala ce şi-a dat de a îndeplini în mod gratuit, toate formalităţile juridice necesare construirei.

Mulţumim D-lui T. CONSTANTINESCU, care în calitate de Director General al C. F. R., a donat societăţii noastre o parcelă din loturile Casei Muncii a C. F. R. şi a D-lui M. MANOILESCU, care în calitate de Sub-Secretar de Stat la Ministerul de Finanţe, ne-a donat un milion de lei, pentru construirea localului societăţii *Gazeta Matematică*.

Ulterior acestor importante şi mărinimoase donaţii, s'a instituit o comisiune sub preşidenţia D-lui N. TEODORESCU, care a reuşit să ne adune sume importante pentru sporirea fondului construcţiei localului. Ii mulţumim mult pentru osteneala ce şi-a dat şi pentru rezultatele pe care le-a obţinut şi mulţumim deopotrivă tuturor donatorilor mari şi mici. Ne îngăduim să citãm pe urmãtorii din lista numeroşilor donatori:

Banca Naţională a României, 150.000 lei, prin stăruinţele D-lui CHIRIACESCU.

D-l Ing. D. STAN, membru al societăţii, 54.633 lei.

D-l Ing. I. CAPRIEL şi *Ministerul Instrucţiunei Publice,* câte 50.000 lei fiecare.

Regretatul TR. LALESCU, 20.000 lei.

Creditul Industrial, 16.820 lei.

D-l Ing. EM. PRAGER, 15.000 lei.

D-nii Ing. I. IONESCU, V. BRUCNER şi N. TEODORESCU, câte 10.000 lei fiecare.

Banca Românească şi *Societatea Anonimă Lupeni,* câte 10.000 lei fiecare.

Direcţia Generală a produselor carbonifere, 8.000 lei.

D-l Ing. EM. BĂDESCU, 5.000 lei.

Tuturor acestora şi tuturor acelora cari au făcut donaţiun-pentru construcţia localului, societatea *Gazeta Matematică* le mulţumeşte cu toată recunoştinţa.

Un sprijin nepreţuit, ne-a adus *Societatea Comunală a Tramvaielor Bucureşti*, care prin stăruinţa D-lui Ing. GH. EM. FILIPESCU, a luat asupră-şi în bloc toate etajele superioare. Prin acest sprijin, ne-a dat putinţa să ne construim casa cu un moment mai devreme şi ne-a pus în plăcuta situaţie, de a fi coproprietari cu un tovarăş care, oricum, are contingenţe aplicative ale ştiinţelor matematice. Mulţumim călduros D-lui GH. EM. FILIPESCU, pentru acest sprijin.

Cu începere de astăzi, toate şedinţele societăţii, se vor ţine aci în casa noastră. Biblioteca şi celelalte săli, sunt continuu deschise şi se pun la dispoziţia membrilor societăţii pentru lucrări în legătură cu societatea *Gazeta Matematică*.

Inainte de a deschide porţile societăţii pentru lucrările noastre, se cuvine să spunem un cuvânt de mulţumire *Monitorului Oficial* şi Directorului său D-l A. BUNESCU, care ne-a dat o foarte caldă şi plăcută găzduire în ultimii ani.

Dar, D-lor, delegaţia societăţii nu şi-ar achita cu aceste mulţumiri nici pe departe datoriile sale de recunoştinţă dacă nu ar încerca *să dea Cezarului, ce este a Cezarului.*

Trebuie să mărturisim cu toată sinceritatea şi înfăptuirile de 40 de ani încoace, nu ne desmint, că întreg acest admirabil eşafodaj, care se chema la început *Gazeta Matematică*, care se numeşte azi *Societatea Gazeta Matematică*, cu tot ce ştiţi Dv. din expunerea istorică a D-lui I. IONESCU şi cu tot ce nu ştiţi, cu dezvoltarea entusiasmului crescând pentru matematici, cu acel admirabil spirit de devotament şi dezinteresare care se chiamă spiritul *Gazetei Matematice*, cu toate perspectivele pentru viitor, totul, totul se razămă pe umerii fondatorilor *Gazetei Matematice* şi mai ales pe umerii stăruinţei continue a aceluia pe care ne-am obişnuit a-l numi stâlp al *Gazetei Matematice*, pe care îngăduiţi-mi să-l numesc *Atlaz* al *Gazetei Matematice* de eri, de azi şi de mâine, pe umerii D-lui Ing. I. IONESCU.

Incheiu scurta mea cuvântare aducându-i ca prinos de recunoştinţă omagiile întregei societăţi şi omagiile tuturor generaţiilor cari vor veni să se adăpostească în acest cămin şi vor învăţa să se iniţieze în domeniul ştiinţelor matematice.

Cuvântarea d-lui Profesor GH. ŢIŢEICA dela Universitatea din Bucureşti

Onorat auditor,

Dintre toate problemele care s'au propus în *Gazeta Matematică*, în care, precum ştiţi, s'au publicat, de-aproape patruzeci de ani, foarte multe probleme frumoase şi interesante, — n'a fost problemă mai grea, mai frumoasă şi mai greu de studiat, ca problema *Casei Gazetei Matematice.*

Lucru ciudat, nu se ştie precis cine a propus-o. Cu toate

SOCIETATEA „GAZETA MATEMATICĂ"

Astăzi, în anul mântuirei 1935, luna Ianuarie, ziua 27, în Timpul
DOMNIEI REGELUI CAROL II AL ROMÂNIEI,
s'a inaugurat Casa „GAZETA MATEMATICĂ" a așezământului pentru răspândirea și înălțarea învățăturilor matematice din România,
GAZETA MATEMATICĂ, *așezământ înființat acum 40 ani sub*
DOMNIA REGELUI CAROL I, *a doua zi după deschiderea podului peste Dunăre la Cernavodă.*
Temelia Casei s'a așezat la 27 Octombrie 1933, pe locul făcut DAR DE STĂPÂNIRE, *cu aprobarea* REGELUI FERDINAND I *din 4 Aprilie 1924.*

AU FOST DE FAȚĂ:

1. *Întemeietorii așezământului rămași încă în viață,*
2. *Susținătorii lui*
3. *Diriguitorii lui de acum,*
4. *Arhitectul care a închipuit casa,*
5. *Inginerul care a înfăptuit-o,*

P.S.S. Preotul dela Biserica Sf. Vinere-Nouă care a săvârșit slujba religioasă.

Dea Domnul în această CASA DE SFAT *să se plămădească în vacul veacurilor și să se statornicească faima învățăturilor matematice din Țara Românească.*

Delegația { Col. Gh. Dabelea
Arhinescu

David Emmanuel
Vasile Karpen
P. Sergescu
Gh. Galoșici
Gh. Ștefănescu
D. Barbilian
R. N. Racliș
Gh. T. Gheorghiu
Gh. Vrănceanu
Gh. Țițeica
Gh. Călugăreanu
Gh. Ștefănescu
Gh. Ștefănescu
Gh. Ștefănesc

acestea, pentru determinarea propunătorului, se poate urma calea analogiei. Specialitatea de a propune probleme practice, care pe de o parte au legătură cu realitatea şi din această cauză se impune cercetarea de aproape a numeroase condiţii de posibilitate, iar pe de alta, permit şi o tratare matematică ingenioasă, — nu o are oricine. E unul singur dintre noi, care a avut această specialitate dela început şi o are şi acum. De aceea aş putea afirma, în măsura în care analogia o permite, că problema localului Gazetei, a fost pusă de prea iubitul şi stimatul nostru Coleg, D-l ION IONESCU.

Oricât de controversată ar fi chestia propunătorului, faptul e că, aşa după cum vi s'a arătat pe larg, problema a avut numeroşi rezolvatori, iar soluţia, precum o vedem şi o admirăm, e în acelaşi timp, reală şi elegantă.

In numele profesorilor de matematice de toate gradele, mă asociez din toată inima la mulţumirile recunoscătoare care se aduc astăzi tuturor acelora care au contribuit la înălţarea acestei *Case*.

Să-mi daţi voie să nu mă mărginesc la aceste mulţumiri cuvenite, ci să fac două extinderi, care mi se par tot aşa de naturale şi una şi alta.

Suntem datori în rândul întâi, socotesc eu, ca în aceste momente, când ne bucurăm cu toţii că *Gazeta Matematică* şi-a găsit un adăpost, sau mai bine zis, un cămin, să ne aducem aminte că creditul *Gazetei*, prestigiul şi faima ei, cu ajutorul cărora am găsit, uşor, repede şi pretutindeni şi încurajare şi sprijin, se întemeiază nu numai pe activitatea membrilor de astăzi ai Societăţii noastre şi a corespondenţilor actuali ai Gazetei. In realitate capitalul moral al *Gazetei Matematice*, s'a strâns cu încetul şi e format din entuziasmul plin de avânt şi de tinereţe al tuturor acelora care au lucrat, unii mai mult, alţii mai puţin, dar toţi cu întreaga pătrundere a inteligenţii şi ale căror nume se găsesc înşirate ca nişte flori duioase pe paginile Gazetei, dela început şi până astăzi, la revista noastră.

In zidurile acestei clădiri e deci încorporat o parte din sufletul tuturor acestor numeroşi colaboratori. Li se cuvine şi lor, prin urmare, o închinare bine meritată.

Cu această extindere a îndatoririlor noastre în spre trecut extrapolarea mea nu s'a încheiat. O casă nouă, e o speranţă de viitor.

Noi, cei bătrâni, care dela început ne-am legat sufleteşte de *Gazeta Matematică*, nu ne mulţumim să vedem Gazeta aşezată în Casa ei. Noi sperăm ca fixarea localului să fie începutul unei epoci

noi şi pentru Gazetă şi pentru Matematică. Noi dorim ca în jurul Gazetei să se strângă din toate părţile României Unite, tineretul iubitor de Matematică. Astfel activitatea Gazetei, sporită din generaţie în generaţie, să desăvârşeas că ceeace noi am început cu greutăţi mari şi cu piedici numeroase.

Gazeta Matematică a avut marele rol de a desvolta gustul pentru ştiinţa matematică şi, mai ales, pentru cercetările originale în această specialitate. Acest rol, a fost urmărit cu stăruinţă şi cu sfinţenie. De aceea *Gazeta Matematică* a avut înrâurire covârşitoare asupra mişcării ştiinţifice matematice în toată ţara noastră.

Această înrâurire trebue continuată şi completată. Noi dorim ca în activitatea matematică din lumea întreagă, partea Ţării noastre, să fie din ce în ce mai însemnată şi mai preţuită.

Activitatea actuală a tinerilor noştri matematicieni, care se afirmă din ce în ce mai mult, prin valoarea lucrărilor lor, este astăzi luată în seamă pretutindeni. Către ei şi către cei care vor veni, se îndreptează speranţele noastre.

Şi astfel se încorporează în zidurile acestei *Case*, de o parte o activitate admirabilă din trecut, de altă parte, visuri şi speranţe strălucite de viitor.

Aşa să trăiască *Gazeta Matematică!*

CONTRACT DE VÂNZARE-CUMPĂRARE

între Societatea „Gazeta Matematică“ şi Societatea Comunală a Tramvaielor Bucureşti

Intre subsemnaţii:

1. *Societatea Gazeta Matematică*, cu sediul în Bucureşti, Calea Griviţei Nr. 158, reprezentată prin Delegaţia Societăţii, compusă din D-nii Colonel GH. BUICLIU, Ing. Inspector General Il BUŞILĂ şi Ing. AL. BUNESCU, în conformitate cu extrasul Grefei. Trib. Ilfov S. I. Civ. cor., publicat în «Monitorul Oficial» Nr. 105 din 8 Mai 1934, în calitate de vânzătoare şi

2. *Societatea Comunală a Tramvaielor Bucureşti*, cu sediu în Bucureşti, strada Armenească Nr. 3, reprezentată prin D-l Ing. GH. EM. FILIPESCU, Director General, în baza procesului-verbal Nr. 355 al Consiliului de Administraţie al Societăţii din 13 Febr. 1932, publicat în «Monitorul Oficial» Nr. 45/932, a intervenit prezentul contract de vânzare-cumpărare, în condiţiunile următoare:

Art. 1. Societatea Comunală a Tramvaielor Bucureşti, cumpără pentru Casa de Pensiuni a Personalului Societăţii Comunale a Tramvaielor Bucureşti, cu bani din fondul acestei Case, spre a face o investiţiune a unei părţi din fondul său, în conformitate cu dispoziţiunile art. 125, din legea pentru unificarea asigurărilor sociale, publicată în «Monitorul Oficial» Nr. 83, partea I-a, din 3 Aprilie 1933, în deplină proprietate şi folosinţă dela *Gazeta Matematică*, etajele 2-3-4-5 şi 6, (doi, trei, patru, cinci şi şase) din imobilul în construcţie situat în Bucureşti, Calea Griviţei Nr. 15?, precum şi 8 (opt) compartimente din pivniţa din subsolul acestui imobil.

Art. 2. Societatea *„Gazeta Matematică"*, vinde în deplină proprietate şi folosinţă Societăţii Comunale a Tramvaielor Bucureşti, precum s'a arătat la art. 1, cele 5 etaje şi 8 compartimente de pivniţă în construcţie situată în Bucureşti, Calea Griviţei Nr. 158, în condiţiunile următoare:

Art. 3. Etajele vândute cuprind încăperile specificate în planurile Nr. I, II şi III, iar compartimentele din pivniţă vândute, sunt cele notate cu Nr. 1-8, inclusiv, din planul Nr. IV, care fac parte integrantă din prezentul act.

Apartamentele componente ale etajelor vândute, vor fi prevăzute cu parchete, zugrăveli, instalaţiuni de calorifer, apă caldă şi rece, closete, lumină electrică, cuvete şi băi.

Art. 4. Ca accesoriu al dreptului de proprietate individuală mai sus transmisă, Societatea *„Gazeta Matematică"* a transferat cumpărătoarei, dreptul de coproprietate forţată asupra tuturor porţiunilor din imobil, care, prin natura lor, sunt în folosinţă comună.

Porţiunile din imobil în folosinţă colectivă, a coproprietarilor, constitue un drept de comunitate forţată, supusă regulilor prevăzute în dispoziţiunile art. 57 şi 58 din legea pentru încurajarea construirii de locuinţe, publicată la 3 Mai 1927, «Monitorul Oficial» Nr. 95, aşa că dispoziţiunile art. 723 şi urm. din codul civil, nu sunt aplicabile.

Părţile comune ale clădirei sunt:

Terenul, curţile de lumină, dreptul la faţada terenului, zidurile exterioare şi tot exteriorul imobilului, intrările de acces, scara spre subsol, scara principală şi cea de serviciu, până la etajul II, culoarele dela subsol, sala caloriferului, cu întreaga instalaţiune şi conductele principale, instalaţiunea de apă rece, de electricitate pentru părţile comune, ţevile de scurgerea apelor uzate şi de ploaie, locuinţa

portarului, acoperişu', hasnaua, precum şi orice alte părţi, care prin natura lor, s'ar afla în folosinţă comună.

Art. 5. Imobilul din Calea Griviţei Nr. 158, se compune din:

a) Terenul în suprafaţă de 265 m.p., având următoarele limite şi vecinătăţi:

N. V. Strada Pandele Ţăruşanu.

S. V. Calea Griviţei.

S. E. Giuseppe Tomasini.

N. E. Succesiunea Nicolae Radovici.

b) Clădirea în curs de construcţie, care va purta denumirea *„Casa Gazeta Matematică"*, alcătuită din subsol, parter şi 6 etaje conform planurilor anexate.

Titlurile de proprietate ale Societăţii *Gazeta Matematică* asupra sus menţionatului imobil, sunt:

1. Decretul Regal Nr. 3.714, publicat în «Monitorul Oficial» Nr. 95, din 31 Iulie 1923.

2. Act de cedare gratuită aut. Trib. Ilfov, Not. Nr. 23.940, din 11 Octomvrie 1923.

3. Legea publicată în «Monitorul Oficial» Nr. 80, din 12 Aprilie 1924.

4. Act de vânzare aut. Trib. Ilfov, Not. Nr. 41.986, din 30 Noemvrie 1928.

Art. 6. Preţul vânzării-cumpărării, este de Lei 3.700.000 (trei milioane şapte sute mii) şi s'a plătit în întregime Societăţii *Gazeta Matematică*, vânzătoare, acum la semnarea prezentului act, care servă şi drept chitanţă autentică.

Art. 7. In cazul când, costul integral de construcţie al *Casei Gazeta Matematică*, conform planurilor şi devizelor aprobate de ambele părţi, ar depăşi suma de Lei 6.000.000 (şase milioane), cumpărătoarea îşi ia obligaţia să plătească vânzătoarei o sumă, reprezentând 55% (cincizeci şi cinci la sută), din diferenţa rezultată.

Plata eventual a diferenţei, se va face pe baza unui proces-verbal, ce se va încheia în dublu exemplar de către părţile contractante.

Art. 8. Drepturile de proprietate vândute individual cumpărătoarei, precum şi cele comune, sunt libere de orice sarcini, servitute, impozite şi orice taxe de orice natură.

Impozitele şi taxele de orice natură, se înţeleg până la data prezentului contract de vânzare-cumpărare.

Art. 9. Predarea etajelor vândute şi a pivniţelor, împreună cu toate părţile comune şi instalaţiunile respective, aşa ca să fie locuibile, se va face cel mai târziu până la 26 Octomvrie 1934.

Predarea se va constata prin procese-verbale, făcute în dublu exemplar şi semnate de ambele părţi contractante.

Art. 10. Din momentul predării, cumpărătoarea are să plătească toate impozitele, taxele şi dările respective către Stat, Judeţ sau Comună, privind cota parte aferentă etajelor cumpărate.

Impozitele, taxele şi dările privind părţile comune sau aferente imobilului în întregime, se vor repartiza între cumpărătoare şi vânzătoare, 55% (cincizeci şi cinci la sută) pentru cumpărătoare şi 45% (patruzeci şi cinci la sută) pentru vânzătoare.

Art. 11. Administrarea, întreţinerea şi folosinţa părţilor comune supuse stării de indiviziune forţată, se va face potrivit dispoziţiunilor din legea pentru încurajarea construirei de locuinţe, publicată în «Monitorul Oficial» Nr. 95, din 3 Mai 1927 şi convenţiunei părţilor contractante, avându-se în vedere existenţa unei Asociaţiuni civile de drept, fără nici o altă formalitate.

Art. 12. Cota de participare la cheltuelile comune, va fi următoarea: vânzătoarea 45% (patruzeci şi cinci la sută) şi cumpărătoarea 55% (cincizeci şi cinci la sută).

Sarcinile comune sunt:

a) Cheltueli de reparaţii de orice natură, mici sau mari, la zidurile comune, la acoperiş, la tencueli şi ornamentele faţadei, la instalaţii, precum: apă, electricitate, încălzire centrală, canalizare de scurgere a apelor uzate şi de ploaie, hasnale, exceptându-se părţile din interiorul apartamentelor.

b) La curte, la curţile de lumină, la intrări, la vestibulul comun, la locuinţa portarului, la scoborârea în pivniţă, la culoare şi coridoare comune, la depozitul de combustibil, la camera unde este instalată încălzirea centrală.

c) Cheltueli pentru luminatul antreului, vestibulului, scării principale şi de serviciu, până la etajul II şi culoarelor din pivniţă

d) Cheltueli pentru apa destinată pentru uzajul comun.

e) Cheltueli de întreţinere a instalaţiei de calorifer.

f) Cheltueli privind întreţinerea contuarelor de uzaj comun.

g) Cheltueli pentru asigurarea imobiluiui contra incendiului.

h) Cheltueli pentru golirea hasnalelor.

Art. 13. Cheltuelile pentru încălzit, precum: combustibil, apă, electricitate, salariul mecanicului, etc., se vor repartiza în raport cu suprafețele radiatoare.

Art. 14. Vânzarea în parte sau în total a drepturilor de proprietate și posesiune, nu se poate face nici de către vânzătoare, nici de către cumpărătoare, fără respectarea drepturilor de preemțiune, pe care, fiecare parte contractantă și-l rezervă formal în virtutea acestui contract.

In acest scop, partea care ar vrea să vândă, este obligată să notifice celeilalte părți, prin Corpul de Portărei, ce anume porțiune înțelege să vândă și în ce condițiuni.

Partea căreia i s'a adresat notificarea, este obligată să răspundă tot prin Corpul de Portărei, în termen de 30 de zile că acceptă vânzarea, condițiunile ei și se obligă să încheie contractul în termen de 15 zile, fără nici o altă înștiințare, somațiune, sau punere în întârziere.

Art. 15. Taxele de timbru și înregistrare, s'au plătit în întregime de către cumpărătoare.

Art. 16. Acest contract de vânzare-cumpărare, s'a făcut în dublu exempar, pentru fiecare parte câte unul, azi 25 Mai 1934, la București.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE"

După cum s'a anunțat în Numărul 1, din Septemvrie 1934 al *Gazetei Matematice,* anul acesta se va ține un concurs de Matematici între elevii liceelor din țară și elevii anului preparator al Școalei Politehnice «REGELE CAROL II» din București.

Dintre candidații înscriși au fost admiși a se prezenta la concurs următorii:

Clasa IV-a: *Alexandrescu G. Paul, Breteanu C. C., Capriș V. M., Constantinescu D., Constantinescu C. V., Dumitrescu V. M., Dumitrescu C. P., Florescu D. G. R., Florescu L. V., Jipa C. Al., Lazăr G. D., Muraru P. D., Nicolae D. Tr., Pasăre S. E., Păunescu N. V., Popescu V. C., Săndulescu I. I., Stoian G. V. M., Tătaru V. N.*

Clasa V-a: *Apostol G. N., Apostol V. R., Atanasiu N. D., Barbu A. A., Boborodea I. I., Boian D. E., Buiculescu R., Caraiman A., Capri A., Chiriță V. G., Cioc I. D., Constantinescu P. St., Cornățeanu I. A., Cruțescu Tr., Dragomirescu T. I., Floareș I. A., A Ioanei R., Ivănică M. R., Lazăr I. A., Mareș D. P., Marinescu D. G., Metz M. D., Mihăilescu D. C., Munteanu V. L., Nedelcu V. N., Nistorescu V. D., Pădurel A. V., Paraschivescu T. M., Popa C. Benone, Popescu N. A., Popescu M. G., Preoteasa P. G,, Ravența N. Oct., Russu I. E. D., Scobiola C., Sechel Th. M., Solovei V. A., Stamatescu G. I. C., Ștefănescu D. N., Streder I., Theodoreanu V. M., Terpu A. T., Vasilache I. G., Velculescu I. C., Zaharescu I.*

Clasa VI-a: *Albert A. I., Alexandrescu M. L., Bazac I. A,, Blănarul I., Bogdan G. I., Boroș C. I., Bucur N. V., Bucurenciu V., Bulat M., Buzincu I. I,, Caraman D. V., Cătuneanu M. D., Cojocaru P. P., Constantinescu C. C., Enache D. I., Enășescu D. V., Galan I. I., Giorgi N. I., Ionescu V., Ivan S. M. A., Lepădatu G., Lugojanu M. D., Metea S, V., Năstase M., Nedelescu N., Popescu G. N., Postelnicescu C. M., Racoțeanu G. C., Radu P. P., Runceanu N. C., Sichitiu N. N., Stănescu C. T., Stoian S. I., Stoica P. I., Strohal R., Șerbănescu A. M., Tomescu H. T., Vasilescu A. G., Vassu A. N.*

Clasa VII-a: *Amărăștеanu E. M., Bărbulescu M. P., Boitan P. N., Ceaușescu F. V., Cecati V. Oct., Cehan G. A., Ciucă I. I., Comănescu A. T., Cosma V., Cuna St. St., Deceanu G. Gh., Dimitriu E. V., Dobrescu D. P., Dobrin V. V., Drăghicescu D. I. C. V., Dumitrescu P. Al., Dumitrescu A. M., Florescu Gh. H., Gavrilescu N. C., Georgescu G. Al., Georgescu Gh., Georgescu I. I., Grigorescu A. V., Grigoriu I. V., Harnaj D. V., Iarda St. R., Iliescu V. D., Ioanin C. D., Ionescu G. I., Lebădă I. D., Măgală I. G., Mărmureanu M. G., Mănac M., Martac V. R. N., Mercureanu St. I., Milu I. N., Mitache I. A., Mitre P. G., Neagu I. F., Opran I. C., Parisianu A. M., Roman S. N., Rotaru G. G., Șabac G. I., Sârbu F. V., Șegârceanu M. M., Stănciulescu C. G., Stănescu M. E., Stoica D. Al., Țarălungă G. D., Vusatiuc D. M., Zgârcea T. G.*

An. Prep. Șc. Polit. Buc.: *Belloiu N. Costică;*

adică 19 candidați în clasa IV-a, 45 de candidați în clasa V-a, 39

de candidaţi în clasa VI-a, 52 de candidaţi în clasa VII-a şi 1 candidat din anul preparator.

Fiecare candidat va da câte o teză din ambele materii la care s'a înscris. Avându-se în vedere numărul mare de candidaţi admişi a se prezenta la concurs, tezele vor fi eliminatorii. Prima teză va avea loc în ziua de Joi 2 Mai 1935 dela ora $8^1/_2 - 11^1/_2$, iar a doua teză în aceeaşi zi între orele 15 — 18 la Şcoala Politehnică, Calea Griviţei 132, colţ Str. Polizu, în apropierea Gării de Nord. Oralului va începe Vineri 3 Mai la aceleaşi ore.

Candidaţilor înscrişi la concurs, cari nu dispun de mijloace materiale pentru venirea şi întreţinerea lor în Bucureşti (după cum au arătat în cererile lor), li se vor trimete în vacanţa de Paşti sumele necesare transportului la Bucureşti şi li se va comunica locul unde vor fi găzduiţi în tot timpul concursului.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢEI.

NOTE MATEMATICE

25. *A propos du problème 4372.* («Gazeta Matematică», XL, p. 140). Nous avons énoncé cette question ainsi, *(Mathesis* 1932 — 138) :

Avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *pris une fois former deux nombres qui soient respectivement le carré et le cube d'un même nombre.*

La solution suivante que nous avons donnée *(loc. cit.* 1933-420*)*, est assez simple.

Les deux nombres doivent être le carré et le cube d'un nombre x vérifiant les conditions

$$46 < x < 100,$$

x^2 et x^3 ayant respectivement quatre et six chiffres.

D'autre part, les nombres x^2 et x^3 étant écrits avec les chiffres de 0 à 9, pris une fois, dont la somme est 45, il faut que

$$x^2 + x^3 = x^2 (1 + x)$$

soit un multiple de 9.

Deux hypothèses sont donc à envisager,

$$x^2 = \mathfrak{M}9 \quad \text{ou} \quad x = \mathfrak{M}3$$

et

$$x + 1 = \mathfrak{M}9.$$

Dans la première, x ne peut être choisi que parmi les multiples de 3 compris entre 48 et 99, à l'exclusion de ceux terminés par 0, 1, 5 ou 6, pour que les derniers chiffres de x^2 et de x^3 ne soient pas les mêmes; x doit donc être un des nombres

48, 54, 57, 63, 69, 72, 78, 84, 87, 93, 99.

Les carrés de ces nombres s'écrivent avec quatre chiffres différents, sauf celui de 63. Seuls les cubes de 69, 84, 93 s'écrivent avec six chiffres différents,

$$69^3 = 328509 \ , \ 84^3 = 592704 \ , \ 93^3 = 804357.$$

Par suite, x ne peut être que l'un des nombres 69, 84 ou 93, et comme

$$69^2 = 4761 \ , \ 84^2 = 7056 \ , \ 93^2 = 8649,$$

seul le nombre 69 est acceptable.

Dans la seconde hypothèse, x doit figurer parmi les nombres 53, 62, 89, 98, mais le cube d'aucun de ces nombres n'est formé de chiffres différents; la seule solution du problème est donc

$$69^2 + 69^3 = 4761 + 328509.$$

V. THÉBAULT.

BIBLIOGRAFIE

Mathesis. Tomul XVIII. No. 10. Decemvrie 1934. Gembloux. Chestiuni de Aritmetică, de V. THÉBAULT. Note de algebră elementară, de AD. M. Asupra afinităţii complexe, de S. MINOIS. Asupra funcţiunilor lineare vectoriale, de J. GÉHÉNIAU & L. DUFOUR. Asupra proprietăţilor triunghiului şi tetraedrului, de R. GOORMAGHTIGH. Publicaţiuni recente de istoria matematicilor, de J. PELSENEER.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXVII. Fascicola V. Mai 1934. Buenos Aires. Matematica în educaţia medie, de J. BABINI.

Idem. Iunie 1934. Tomul CXVII. Fascicola VI.

Boletin Matematico. Anul VII. No. 7. Septemvrie 1934. Buenos Aires. Asupra numărului diagonalelor unui poliedru convex, de E. A. de CESARE. Identităţi numerice, de A. MOESSNER. O altă demonstraţie a unei teoreme de geometrie în spaţiu, de B. I. BAIDAFF.

Journal de Mathématiques Élémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 59. No. 6. Decemvrie 1934. Paris.

Idem. No. 7. Ianuarie 1935.

Idem. No. 8. Ianuarie 1935.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIV. No. 11. Ianuarie 1935. Timişoara. Sur la proposition antique de PAPPUS, par V. THÉBAULT. Domeniul matematicilor în clasificarea lui AUGUSTE COMPTE, de N. O. ZAHARIA.

Ştiinţă şi Progres. Anul I. No. 8. Ianuarie 1935. Târgul-Mureş. Despre determinarea unei funcţiuni de mai multe variabile, de TIBERIU POPOVICI.

C. C. TEODORESCU. *Relation statistique entre la Résistance, l'allongement et la contraction d'une barre d'acier.* (Extras din *Bulletin de mathématique et de physique pures et appliquées de l'Ecole Politechnique «Roi Charles II» Bucarest*). Bucureşti 1934.

ISIS WEISER. *Noua Aritmetică analitica. Almetria.* Cernăuţi 1934.

RAYMOND E. A. C. PALEY & NORBERT WIENER. *Fourier Transforms in the complex domain.* (Volumul XIX din *Colloquim Publications* ale Societăţii matematice americane). New-York 1934.

Gazeta Matematică. *Supliment cu exerciţii.* Anul I. No. 3. Decemvrie 1934.

Idem. No. 4. Ianuarie 1935. (Cu acest număr revista şi-a dublat numărul paginilor).

CERERI

244. Domnitorul VASILE LUPU a făcut la 1648 un gimnaziu la Iaşi relativ la care găsim următoarele în Uricarul lui TEODOR CODRESCU, volumul IX pag. 24:

„Al treilea au întemeiat o Şcoală începătoare şi un gimnaziu, în care după modelul şi a altor gimnazii ale Europei, să se înveţe literatura limbe latineşti, elineşti şi româneşti, şi ale altor limbi. Asemenea ştiinţele, precum filosofia şi legile, în care s'au procopsit mulţi fii ai Patriei, printre care spre dovadă este şi D-lui marele logofăt al ţării EVSTRATIE, traducătorul cărţii de legi, alcătuind din orânduirea numitului Domn, în care carte la proimiea, însuş autorul mărturiseşte că Domnul VASILE a cercat prin multe ţări de-au găsit oameni procopsiţi, dascăli şi filosofi în cartea latinească şi elinească, şi că după

întocmirea şi nevoinţa Măriei Sale Domnului, datus-au învăţătură şi lui, adecă logofătului EVSTRATIE, de au alcătuit aceste legi pe limba românească".

Se ştie ce fel de ştiinţe s'au predat în acel gimnaziu şi de către care profesori ?

I. I.

DIVERSE

Societatea Română de ştiinţe, Secţiunea Matematică a ţinut şedinţă în seara zilei de 21 Ianuarie. D-l N. CIORĂNESCU a făcut o comunicare asupra desvoltării unei funcţiuni inverse a unei funcţiuni. S'a ales apoi biroul pe anul curent. Au fost aleşi D-l D. BARBILIAN, Preşedinte şi D-l M. NICULESCU, Vicepreşedinte.

Sporirea Bibliotecei

Procedings of the Cambridge phylosophical Society Vol. XXVII. Partea I, II.

Donată de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

Archiv för Matematik, Astronomi och Fysik. B. 22. H. 3.
Donată de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

Six causeries sur la soudure autogène. — J'apprends la soudure autogene. — J'installe la soudure autogène.

Broşuri donate de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

VENTON-DUCLAUT. Bases et méthodes à l'étude aérotechniques.
Donată de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

GUSTAV HOLZMÜLLER. Metodische Lehrbuch der Elementar-Mathematik.
Donată de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

KOROLCOVA. Ucednika Fiziku.
Donată de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

H. POINCARÉ. Ştiinţa şi Poezia.
Donată de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

LT. I. LINTEŞ. O metodă pentru regularea tragerii.
Donată de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

Soudure autogène française. La coupe de aciers aux Chalumeau.
Donată de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

Coferinţe ţinute de elevii D-lui Profesor V. TEODOREANU.
Donată de D-l MAIOR I. LINTEŞ.

C. V. MOUREY. La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendus imaginaires, dedié aux amis de l'evidence. Paris 1861.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 825. *Care este forma cea mai generală a ecuațiilor de gradul II având toate rădăcinile comensurabile?*

T. LALESCU.

Soluție dată de D-l G. G. CONSTANTINESCU.

Consider forma redusă

$$F(x) = x^3 + px + q = 0$$

la care poate fi adusă orice ecuație de gradul al treilea și observ, în primul rând că rădăcinile vor putea fi comensurabile dacă și coeficienții sunt comensurabili, iar în al doilea rând, că această ecuație admite în factor trinomul de gradul doi

$$T = x^2 + mx + n$$

dacă avem

$$p = n - m^2$$

$$q = -mn$$

și că prin urmare zerurile polinomului $F(x)$ vor fi comensurabile dacă și zerurile trinomului T sunt comensurabile.

Or pentru ca ecuațiunea de gradul doi

$$f(x) = \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$$

ai cărei coeficienți pot fi presupuși întregi fără a restrânge generalitatea problemei, să admită zeruri raționale, trebue ca realizantul ei să fie un patrat perfect, adică să avem

$$\beta^2 - \alpha\gamma = \lambda^2.$$

Introducând pentru simplificarea scrisului notațiile

$$X = \frac{\beta}{\lambda} \qquad Y = \frac{\alpha}{\lambda} \qquad Z = \frac{\gamma}{\lambda}$$

sunt condus la determinarea valorilor raționale cari satisfac ecuațiunea nedeterminată

$$X^2 - YZ = 1.$$

Raportând această ecuație la axele de coordonate ale spațiului cu trei dimensiuni ea reprezintă un iperboloid cu o pânză pe care

am punctul de coordonate raționale $(1, 0, \mu/\nu)$ așa încât considerând planele ce trec prin acest punct și a căror ecuație este

$$A(X-1)+BY+C\left(Z-\frac{\mu}{\nu}\right)=0$$

cu A, B, C întregi arbitrari, obțin ca intersecție a acestor plane cu iperboloidul cu o pânză, conica de ecuație

$$X^2-\left[\frac{\mu}{\nu}-\frac{A(X-1)+BY}{C}\right]Y=1$$

pe care am un punct de coordonate raționale $(1, 0)$.

Dreptele cari trec prin punctul $(1, 0)$ și a căror ecuație este

$$bY=a(X-1)$$

intersectează conica într'un al doilea punct de coordonate raționale

$$\frac{Ba^2\nu+(C\mu+A\nu)ab-Cb^2}{(Ba^2+Aab+Cb^2)\nu}\;;\;\frac{(a\mu-2b\nu)Ca}{(Ba^2+Aab+Cb^2)\nu}$$

așa încât dacă am în vedere ecuația planelor ce trec prin punctul $(1, 0, \mu/\nu)$ conchid că am pe iperboloid un al doilea punct de coordonate raționale

$$\frac{Ba^2\nu+(C\mu+A\nu)ab-Cb^2\nu}{(Ba^2+Aab+Cb^2)\nu}\;;\;\frac{(a\mu-2b\nu)Ca}{(Ba^2+Aab+Cb^2)}\;;\;\frac{2Bab\nu+(C\mu+2A\nu)b^2}{(Ba^2+Aab+Cb^2)}$$

deci expresiuniie coeficienților termenilor ecuației de gradul doi $F(x)$ pentruca zerurile sale să fie rațional, sunt

$$\alpha=(Ca^2\mu-2Cab\nu)D$$

$$\beta=[Ba^2\nu+(C\mu+A\nu)ab-Cb^2\nu]D$$

$$\gamma=[2Bab\nu+(C\mu+2A\nu)b^2]D$$

în cari A, B, C, D, a, b, μ, ν sunt parametri întregi arbitrari.

Acest rezultat obținut, rezultă că zerurile trinomului de gradul doi T vor fi comensurabile dacă vom avea

$$m=\frac{2[Ba^2\nu+(C\mu+A\nu)ab-Cb^2\nu)]}{(a\mu-2b\nu)Ca}\;;\;n=\frac{2Bab\nu+(C\mu+2A\nu)b^2}{(a\mu-2b\nu)Ca}$$

şi prin urmare pentru ca ecuaţiunea de gradul trei $f(x)$ să aibă toate rădăcinile comensurabile, va trebui ca să avem pentru coeficienţii p şi q expresiuni de forma

$$p = n - m^2$$

$$q = -mn$$

m şi n având semnificaţiile găsite mai sus.

Obervare. Problema se poate chiar generaliza în modul următor:

Care sunt expresiunile coeficienţilor p şi q ai ecuaţiei trinoame

$$x^m + px^n + q = 0$$

pentruca rădăcinile ei să fie comensurabile.

Soluţiunea este asemănătoare cu cea dată în cazul particular. Se determină forma coeficienţilor p şi q pentru ca trinomul $f(x)$ să admită în factor un produs de mai multe trinoame de gradul doi al cărui grad este cu o unitate sau cu două unităţi mai mic decât gradul lui $f(x)$ şi utilizând forma coeficienţilor ecuaţiei de gradul doi cu toate rădăcinile raţionale se obţine rezultatul dorit, care însă nu mai este atât de simplu ca în cazul particular.

PROBLEMA 2643. *Să se rezolve ecuaţia.*

$$(a^2 - b^2)(x^2 + 1)[x^2 + ab - (a + b)x] - 2(a^2 + b^2)[x^3 - (a + b)x^2 + abx] = 0.$$

I. VELESCU.

Ecuaţia dată se mai poate scrie:

$$[x^2 - (a + b)x + ab][(a^2 - b^2)(x^2 + 1) - 2(a^2 + b^2)x] = 0,$$

şi ea este echivalentă cu următoarele două:

$$(1) \qquad x^2 - (a + b)x + ab = 0$$

$$(2) \qquad (a^2 - b^2)x^2 - 2(a^2 + b^2)x + a^2 - b^2 = 0.$$

Ecuaţia (1) rezolvată ne dă rădăcinele:

$$x = \frac{a + b \pm \sqrt{(a + b)^2 - 4ab}}{2} = \frac{(a + b) \pm (a - b)}{2},$$

deci :

$$x_1 = a \quad , \quad x_2 = b.$$

Ecuația (2), are rădăcinele :

$$x = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2}}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 + b^2 \pm 2ab}{a^2 - b^2},$$

deci :

$$x_3 = \frac{a + b}{a - b} \quad , \quad x_4 = \frac{a - b}{a + b}.$$

Ecuația dată are deci rădăcinele aflate x_1 , x_2 , x_3 , x_4.

Soluții date de D-nii : ADAM M. (Constanța), ADAM RADU (Constanța), ALDEA N. (lic. M-rea Dealu), ALEXE N., ARSENE ALEXANDRU (lic. militar, Iași), BOCK I. GHEORGHE, BOGDAN CH. MIHAI (lic. Internat, Iași), BOIAN C. IOAN (lic. militar, Tg.-Mureș), CĂLIN M. GH. (lic. Caracal), COHN L. AVRAM (lic. Eminescu, București), CĂLINESCU I. AURELIAN (Zimnicea), COSTĂCHESCU V. CONSTANTIN (lic, militar, Iași), CONSTANTINESCU N. IOAN, COȘNIȚĂ CEZAR (Bârlad), CRISTESCU IOAN (lic. Șincai, București), DINULESCU I. NICU (lic. Carol, Craiova), DORNEANU S. VASILE (lic. Internat, Iași), FINTESCU ANGHEL, FLOREA C. ALEXANDRU (lic. Internat, Iași), FLORESCU M. ULPIU (lic. Carol. Craiova), GATAIANȚU BARBU (lic. Caracal), GEORGESCU D. EUGEN (lic. Internat, Iași), GHEORGHIU ADRIAN (lic. Spiru Haret, București), GHEORGHIU TH. GHEORCHE (lic. Galați), GHIȘOIU I. PETRE (lic. Spiru Haret, București), GIURUMESCU C-TIN (lic. Internat, Iași), GHIMICESCU I. GHEORGHE (lic. Internat, Iași), IANCULESCU OCTAVIAN (conductor de mine), IONESCU I. ILIE BREZUICA (lic. Caracal), IONESCU I. ISTINIE-BREZUICA (lic. Caracal), IONESCU P. HARALAMB (Oltenița), LĂZĂRESCU FL. ȘTEFAN (lic. Giurgiu), MANOLESCU M. EMILIAN (lic. militar, Iași), MARIAN I., MAVRODIN DIMITRIE, MĂNESCU MIRCEA (lic. Eminescu, București), MĂTIEȘ V. I. (student, Cluj), MIHĂESCU D. C-TIN (Giurgiu), MIHĂILEANU N. NICOLAE (lic. Constanța), MIHĂILESCU A. C-TIN (lic. Internat, Iași), MURĂROIU I. (lic. Brașov), NICOLAU I. C. DOBRIDOR (lic. militar Craiova), NICOLAU H. C., NICULESCU MIRON, PANAITE N. THEODOR (lic. militar, Iași), PANȚU Z. ION (lic. Lazăr, București), PAREPEANU I. (Brașov), POPESCU N. ALEXANDRU (student), POPOVICI C. C-TIN (lic. Internat, Iași), POPOVICI TH. ION (lic. Mihai Viteazul, București), RÂMNICEANU I. CRISTIAN (lic. militar, Iași), RUSSU C. EUGEN (lic. Internat, Iași), SARIAN M. (Constanța), SAVIN C. IOAN (lic. militar, Iași), SPRINCEANĂ C. GHEORGHE (lic. Galați), STAN C. (lic. Roman), TEODORESCU N. (lic. Spiru Haret, București), TOMESCU RENÉ (lic. Spiru Haret, București), VARLAM M. PETRE (București), VASILIU C. ION (Șc. Polit., București) și ZAIDMAN IOSIF.

V. A.

PROBLEMA 4158. *In triunghiul* ABC *notăm cu* O_9, I, I_a *centrele cercurilor median, înscris şi exînscris relative la* A. *Să se stabilească relaţia*

$$(R + 2r_a)\cos \widehat{AI_aO_9} - (R - 2r)\cos \widehat{AIO_9} = 8R \sin \tfrac{1}{2} A$$

R, r, r_a *fiind notaţii cunoscute.*

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie dată de D-nii: C. IVĂNESCU, M. MARGULIUS şi ST. OLTEANU. Relaţia, adevărată în orice triunghiu,

$$a = b\cos C + c\cos B,$$

aplicată triunghiului II_aO_9 ne dă

$$II_a = I_aO_9 \cos \widehat{II_aO_9} + IO_9 \cos \widehat{I_aIO_9}$$

sau

$$(1) \qquad II_a = I_aO_9 \cos \widehat{AI_aO_9} - IO_9 \cos \widehat{AIO_9}.$$

Dar se ştie că

$$II_a = 4R \sin \tfrac{1}{2} A\ ,\ I_aO_9 = \tfrac{1}{2} R + r_a\ ,\ IO_9 = \tfrac{1}{2} R - r$$

pe cari, înlocuindu-le în (1), obţinem tocmai relaţia propusă.

Notă. D-l V. CEAUŞESCU a rezolvat problema folosind nişte expresiuni calculate de autorul problemei în articolul din G. M. XXXIX, p. 123.

M. G.

PROBLEMA 4218. *Fie*

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\ ,\quad B = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = n_2p_3 + n_3p_2\ ,\ \Delta_2 = n_3p_1 + n_1p_3\ ,\ \Delta_3 = n_1p_2 + n_2p_1.$$

Să se verifice identitatea :

$$A^2 \cdot B^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1b_1 & a_2m_1 & a_2m_2 & a_2m_3 \\ a_1b_1 & b_1^2 & b_2m_1 & b_2m_2 & b_2m_3 \\ a_2m_1 & b_2m_1 & 2n_1p_1 & \Delta_3 & \Delta_2 \\ a_2m_2 & b_2m_2 & \Delta_3 & 2n_2p_2 & \Delta_1 \\ a_2m_3 & b_2m_3 & \Delta_2 & \Delta_1 & 2n_3p_3 \end{vmatrix}.$$

N. BOTEA.

Produsul A . B se poate scrie :

$$A \cdot B = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & n_1 & m_1 \\ 0 & 0 & p_2 & n_2 & m_2 \\ 0 & 0 & p_3 & n_3 & m_3 \end{vmatrix}$$

sau schimbând ordinea coloanelor :

$$A \cdot B = -\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & m_1 & n_1 & p_1 & 0 \\ 0 & m_2 & n_2 & p_2 & 0 \\ 0 & m_3 & n_3 & p_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Făcând produsul acestor doi determinanți, după regula obișnuită, obținem identitatea cerută.

MARIUS MARGULIUS.

Notă. A mai rezolvat problema D-l I. CURCHI.

După ce problema a fost redijată s'a mai primit o soluție dela D-l DOBRESCU D. PAUL (Târgoviște).

PROBLEMA 4273. *Dacă într'un triunghiu* a', b', c' *sunt laturile triunghiului ortic,* i_a , i_b , i_c *distanțele dela ortocentru la vârfurile triunghiului,* ω *unghiul lui* BROCARD, *celelalte notații fiind cele obișnuite, să se demonstreze relațiile :*

(I) $$R \sum \frac{a \cdot a'}{i_a} = 2S \operatorname{cotg}\omega$$

(II) $$\frac{\sum i_a b}{2p} = 2R.$$

N. TH. DONCIU.

Soluție dată de D-nii : V. CEAUȘESCU (cl. VII lic. militar Iași), CEZAR IVĂNESCU (student Bârlad), MARIUS MARGULIUS (București), DIMITRIE MAVRODIN (cl. VII lic. M. Eminescu Buc.), PANAIT MAZILU

(elev inginer, Buc.), N. N. MIHĂILEANU (student, Bucureşti), MIRCEA LEONTE NEGREA (Brăila), MARIN PREDOESCU (Bucureşti) şi IANCU N. SAGER.

Unghiul lui BROCARD este dat de relaţiile :

$$\cot\omega = \operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

şi se cunosc relaţiile :

$$i_a = 2R\cos A \quad , \quad i_b = 2R\cos B \quad , \quad i_c = 2R\cos C$$

$$a' = a\cos A \quad , \quad b' = b\cos B \quad , \quad c' = c\cos C.$$

Prima relaţie a enunţului se scrie :

$$R\Sigma\frac{aa'}{i_a} = R\Sigma\frac{a^2\cos A}{2R\cos A} = \tfrac{1}{2}\Sigma a^2 = 2S\operatorname{cotg}\omega$$

iar cea de a doua :

$$\frac{\Sigma i_a b}{2p} = \frac{R}{p}\Sigma b\cos A = \frac{R}{p}(b\cos A + c\cos A + c\cos B$$

$$+ a\cos B + b\cos C + a\cos C) = \frac{R}{p}(a + b + c) = 2R.$$

N. B.

PROBLEMA 4310. *Să se determine natura seriei al cărui termen general este :*

$$U_n = \frac{n^n}{(a+1)(2a+1)(3a+1)\ldots(na+1)}$$

a *fiind un număr pozitiv.*

N. C.

Aplicăm criteriul lui D'ALEMBERT :

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n[(n+1)a+1]}$$

$$= \lim_{n=\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n=\infty}\frac{n+1}{(n+1)a+1} = \frac{e}{a}.$$

Deci :

1°. dacă $a > e$ seria e convergentă.

2°. dacă $a < e$ seria e divergentă.

3°. dacă $a = e$ nu putem preciza nimic, după cele de mai sus. In acest caz vom aplica criteriul lui RAABE-DUHAMEL, folosind regula lui HÔPITAL.

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n=\infty} n\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(e + \frac{1}{n+1}\right) - 1\right]$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(e + \frac{1}{n+1}\right) - 1}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left[\left(\log \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)\left(e + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{(n+1)^2}\right]}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n=\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \lim_{n=\infty} \frac{\left(e + \frac{1}{n+1}\right) \log \frac{n}{n+1} + \frac{e}{n+1}}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{n=\infty} \frac{-\frac{1}{(n+1)^2} \log \frac{n}{n+1} + \left(e + \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{e}{(n+1)^2}}{\frac{2}{n^3}}$$

şi apoi :

$$\lim_{n=\infty} -\frac{n^3}{2(n+1)^2} \log \frac{n}{n+1} = -\tfrac{1}{2} \lim_{n=\infty} n \log \frac{n}{n+1} = -\tfrac{1}{2} \lim \frac{\log \frac{n}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \lim \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{-\frac{1}{n^2}} = \tfrac{1}{2} \lim \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \tfrac{1}{2}$$

iar :

$$\lim_{n=\infty} \frac{\left(e+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{e}{(n+1)^2}}{\frac{2}{n^3}}$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}\left(e+\frac{1}{n+1}\right)-\frac{e}{(n+1)^2}}{\frac{2}{n^3}}$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{n^3(e+1)}{2n(n+1)^2} = \frac{e+1}{2} .$$

Deci :

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) = \frac{e+2}{2e} < 1$$

şi dacă $a = e$ seria e divergentă.

Soluţiuni necomplete au fost date de D-rele MARGARETA CARACUDOVICI (studentă Bucureşti) şi MARIA ELISABETH MARTECKY şi D-nii : IULIAN ALEXIU, S.-LT. AVRAM CONSTANTIN (Versailles), CEAUŞESCU VASILE şi GRIGORIU CONSTANTIN (liceul militar Iaşi), CEZAR IVĂNESCU, MARIUS MARGULIUS, POPICA EUGEN (liceul militar Iaşi), ION I. PETRESCU, D. ROTMAN, IANCU SAGER, GEORGE SILAŞ (student Cluj), I. C. ŞOVA, STĂNCULESCU GH. (lic. militar Iaşi), V. I. C. VISARION, ZAHARESCU ILIE (lic. militar Iaşi), ALEXE ARŞAVSCHI, C. CHIRIAC (Şc. ofiţeri), C. GAVRILESCU (L. M. Iaşi), V. CSEKE (student Cluj), GRIŞA MARGULIS, EM. C. IONESCU (stud. mat. Buc,), D. D. MAVRODIN, P. C. MAZILU (stud. Şc. Polit.) şi PREDOESCU M. (Şc. Polit.).

N. A. Această problemă am propus-o la ex. de admitere în Şc. Politehnică, şi cum regula lui RAABE-DUHAMEL nu e prevăzută în programul Anului preparator, am propus-o în „Gazetă" pentru a avea o soluţie completă.

N. C.

PROBLEMA 4312. *Să se demonstreze că numerele întregi*:

$$2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}$$

$$2^n - 2\cos\frac{(n-1)\pi}{3}$$

$$2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}$$

ce divid prin 3 oricare ar fi întregul n.

COL. GH. BUICLIU.

Soluție dată de D-nii: MIRCEA SC. NICHIFOR, O. I. MIHALCEA, VINTILĂ GRIGORESCU și M. MARGULIUS.

Se știe și se poate dovedi ușor pe un cerc trigonometric că *cosinusul* arcelor ce conțin un număr pereche de $\pi/3$ este 1 sau $1/2$ iar al acelora ce conțin un număr nepereche de $\pi/3$ este $1/2$ sau 1. Deci ori care ar fi n întreg, cele 3 expresiuni sunt numere întregi.

Se mai observă că

$$2^n = (3m - 1)^n = 3m \pm 1$$

după cum n este pereche sau nepereche.

Dacă deci, notăm cu E_1, E_2, E_3 respectiv pe fiecare din cele 3 expresiuni și ținem seamă de observațiile precedente vom avea:

1°. *Pentru* n *pereche:*

$$E_1 = (3m + 1) + 2 = 3\mathfrak{M} \quad \text{sau} \quad E_1 = (3m + 1) - \tfrac{2}{2} = 3\mathfrak{M}$$

$$E_2 = (3m + 1) - \tfrac{2}{2} = 3\mathfrak{M} \quad \text{sau} \quad E_2 = (3m + 1) - 2 = 3\mathfrak{M}$$

$$E_3 = (3m + 1) + 2 = 3\mathfrak{M} \quad \text{sau} \quad E_3 = (3m + 1) - \tfrac{2}{2} = 3\mathfrak{M}.$$

2°. *Pentru* n *nepereche* se găsesc rezultate analoage.

Deci oricare ar fi n întreg, expresiunile date sunt divizibile prin 3.

Notă. Problema a fost examinată pe numeroase căi de diferiți rezolvitori și anume:

1°. Au examinat cazurile n pereche sau nepereche, încă pe căi mai lungi ca acea publicată mai sus și care e redijată după soluția D-lui M. SC. NICHIFOR D-nii: GR. MARTEȘ (Lic. militar, Chișinău); W. CSEKE student, Cluj); GAVRILESCU N. C. (Lic. Militar, Iași); P. C. MAZILU (Șc. Politehnică, București) și I. I. ȚIȚEICA (Lic. militar, Mănăstirea Dealului).

2°. Au examinat valorile lui n față de divizorul 3 D-nii: I. N. SAGER, D. D. MAVRODIN (Lic. Eminescu, București); A. GEIER (Student, Cluj); C. IVĂNESCU (Bârlad); P. D. DOBRESCU (Lic. militar, Târgoviște și C. HAIMER.

3°. D-l M. I. PREDOESCU (Șc. Politehnică, București) a rezolvat bine problema, prin inducție, din aproape în aproape.

4°. D-nii: M. I. PREDOESCU (Șc. Politehnică, București) și D. LEBĂDĂ s'au folosit de identitățile stabilite de D-l COL. GH. BUICLIU în articolul său *Formule de analiză combinatoare* publicat în *Revista Matematică din Timișoara* Vol. XIII, pag. 133.

5°. D-șoara GELA BĂLĂCEANU (Studentă, București), H. P. IONESCU-BISS (București) și M. L. A. NEGREA (Brăila) au dezvoltat pe *cos* după formula lui MOIVRE.

6°. D-l T. STOICESCU a utilizat pentru *cos* formulele lui EULER.

7°. D-nii: M. MĂNAC (Lic. militar, Târgovişte) şi I. CHIRIAC au examinat numai valorile particulare 1, 2,... ale lui n.

8. D-nii V. CEAUŞESCU (Lic. militar Iaşi) şi G. MARGULIUS au rezolvat parţial problema examinând formele lui n faţă de divizorul 6.

GH. B.

PROBLEMA 4325. *Să se găsească condiţiunile necesare şi suficiente pentru ca punctul lui* FEUERBACH *să se găsească pe o bisectoare, sau pe o înălţime, sau pe o simediană a unui triunghiu.*

V. THÉBAULT.

Coordonatele normale ale punctului φ al lui FEUERBACH al triunghiului ABC sunt:

$$x : y : z = \sin^2 \frac{B-C}{2} : \sin^2 \frac{C-A}{2} : \sin^2 \frac{A-B}{2}.$$

1°. Bisectoarea interioară a vârfului A are ecuaţia:

$$y - z = 0.$$

Punctul φ se află pe această bisectoare dacă:

$$\sin^2 \frac{C-A}{2} = \sin^2 \frac{A-B}{2}$$

ceeace se întâmplă când $\sphericalangle A = \frac{\pi}{3}$ şi când triunghiul este isoscel:

$$\sphericalangle B = \sphericalangle C.$$

2°. Cazul înălţimei a mai fost studiat în *Gazeta Matematică* (Problema 3125. Vol. XXIX pag. 432) de mult regretatul VASILE CRISTESCU. După cum s'a arătat, condiţia ca φ să se afle pe înălţimea AA_h se scrie:

$$(\cos B - \cos C)(\cos B + \cos C - 1) = 0$$

şi răspund problemei triunghiul isoscel şi triunghiul ale cărui unghiuri satisfac relaţiei:

$$\cos B + \cos C = 1.$$

In acest triunghiu dreapta OI este paralelă cu latura BC. Celelalte proprietăţi ale sale se găsesc la locul citat.

3°. Ecuația simedianei este :

$$y \sin C - z \sin B = 0$$

și punctul φ se află pe simediană, dacă :

$$\sin C\,[1 - \cos(C - A)] = \sin B\,[1 - \cos(A - B)]$$

sau

$$\sin C - \sin B = \sin(C - B)\cos(B + C - A)$$

sau

$$\sin\frac{C-B}{2}\left(\sin\tfrac{1}{2}A + \cos\frac{C-B}{2}\cos 2A\right) = 0$$

deci dacă triunghiul e isoscel, sau dacă :

$$\sin\tfrac{1}{2}A + \cos\frac{B-C}{2}\cos 2A = 0.$$

Această relație se mai scrie :

$$b + c = -\frac{a}{\cos 2A}.$$

Asemenea triunghiuri se pot construi în modul următor : Luăm latura a și unghiul $A > \frac{\pi}{4}$ arbitrare. Construim latura BC și segmentul de cerc descris pe această latură capabil de unghiul A ; vârful A va fi la intersecțiile acestui segment cu o clipă cu focarele în B și C și cu axa mare egală cu cantitatea $-\frac{a}{2\cos 2A}$.

Observări. 1°. Au rezolvat parțial problema D-nii : D. LEBĂDĂ (Iași), MARIUS MARGULIUS (București) și MIRCEA LEONTE NEGREA (Brăila).

2°. D-l MARGULIUS se ocupă și de cazul când φ se află pe mediană. Acest caz a mai fost studiat de D-l V. THÉBAULT în articolul «*Sur les points de* FEUERBACH» din G. M. XXXIX, p. 43. S'au găsit acolo condițiile

$$b = c \quad \text{și} \quad b^2 + c^2 = a(b + c).$$

N. B.

PROBLEMA 4336. $a_1, a_2, \ldots a_n$ *fiind cantități oarecari, să se demonstreze identitățile*

$$(A)\quad S_n^k = \Sigma S_{n-1}^k - \Sigma S_{n\ 2}^k + \ldots (-1)^{n-1} S_1^k$$

unde k = 1, 2, ... n — 1 *şi în care* S_p *sunt sumele* p *din cantităţile date* a_i , *luate în toate modurile posibile.*

M. GHERMĂNESCU.

Prima soluţie.

Fie F (x) o funcţiune oarecare; diferenţa ei faţă de a_1 va fi

$$\overset{1}{\underset{a_1}{\Delta}} F(x) = F(x + a_1) - F(x).$$

Să însemnăm în general

$$\overset{n}{\underset{a_1 \ldots a_n}{\Delta}} F = \overset{n}{\underset{a_n}{\Delta}} \left(\overset{n-1}{\underset{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}{\Delta}} F \right)$$

$\overset{n}{\Delta}$ fiind *diferenţa de ordinul n* faţă de cantităţile a_1, $a_2, \ldots a_n$. Se ştie că expresiunea acestei diferenţe este

$$\overset{n}{\underset{a_1 a_2 \ldots a_n}{\Delta}} F(x) = F(x + s_n) - \Sigma F(x + s_{n-1}) + \Sigma F(x + s_{n-2}) - \ldots + (-1)^n F(x)$$

s_p având însemnarea din enunţul problemei. Se mai ştie că această diferenţă este identic nulă dacă F (x) este un polinom de gradul $(n - 1)$ cel mult. Dacă în particular luăm F $(x) = x^k$, în care $k < n$, vom avea identitatea

$$(B) \quad 0 = (x + s_n)^k - \Sigma (x + s_{n-1})^k + \Sigma (x + s_{n-2})^k - \ldots + (-1)^{n-1} (x + s_1)^k + (-1)^n x^k ,$$

care pentru $x = 0$ se reduce la identitatea propusă.

Identitatea (A) cuprinde în sine o mulţime de identităţi particulare, unele cunoscute, altele noui. Astfel, făcând $a_i = 1$, găsim

$$n^k - C_n^1 (n-1)^k + C_n^2 (n-2)^k \ldots C_n^{n-1} 1^k = 0 , \quad k = 1,2 \ldots n - 1.$$

Dacă în (B) facem $x = a$, $a_i = b$, obţinem

$$(a + nb)^k - C_n^1 (a + \overline{n-1}b)^k + C_n^2 (a + \overline{n-2}b)^k \ldots + (-1)^n a^n = 0.$$

La această problemă a trimis o soluţie, bazată pe metoda inducţiei, D-ra MARGARETA CARACUDOVICI (Studentă). Soluţia D-sale fiind prea desvoltată, regretăm că nu o putem publica, din lipsă de spaţiu.

M. G.

PROBLEMA 4345. *Să se demonstreze că în triunghiul* ABC *dreptunghiu în* C:

1) Punctele în care cercul exînscris O_a *atinge ipotenuza* AB *şi cateta* BC *sunt colineare cu punctul în care cercul* I *înscris triunghiului, atinge cateta* AC.

2) Punctele în care cercul exînscris O_a *atinge ipotenuza* AB *şi cateta* AC *sunt colineare cu punctul în care cercul exînscris* O_c *atinge cateta* BC.

GH. VASILIU.

Soluţie dată de D-l MARIUS MARGULIUS (student Bucureşti).

Vom arăta că condiţia necesară şi suficientă pentru ca proprietăţile din enunţ să aibe loc este ca triunghiul ABC să fie dreptunghic în C.

Fie A' şi C' punctele de tangenţă a cercului O_a cu laturile BC şi AB iar B' punctul de tangenţă a cercului înscris I cu AC.

Avem:

$$A'(0\ ,\ p-b\ ,\ p-c)\ ;\ B'\left(\frac{1}{p-a}\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{p-c}\right)\ ;\ c'(p-c\ ,\ -p\ ,\ 0.$$

Să punem condiţia ca aceste puncte să fie coliniare:

$$\begin{vmatrix} 0 & p-b & p-c \\ \dfrac{1}{p-a} & 0 & \dfrac{1}{p-c} \\ p-c & -p & 0 \end{vmatrix} = 0$$

şi dezvoltând găsim că:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Q. E. D.

Fie B_1 punctul de tangenţă a lui O_a cu AC şi A_1 cel de tangenţă între O_c şi BC. Avem:

$$A_1(0\ ,\ -p\ ,\ p-a)\ ;\ B_1(p-b\ ,\ 0\ ,\ -p)\ ;\ C'(p-c\ ,\ -p\ ,\ 0).$$

Punând condiţia de colinearitate, găsim acelaş rezultat ca mai sus.

D-rele: PREDUȚA D. BUNGEȚEANU și MARIA DRĂGUȚ (studente la București și Cluj) și D-nii: I. N. SAGER prof.; NICOLAE MIHĂILĂ, CSEKE VILHELM, GEORGE SILAȘ (stud., Cluj); VERENCA SILVIU, NICOARĂ D. C-TIN., TRĂSNITU NICOLAE, ARNĂRICĂ T., VASILESCU NICOLAE-JIU, ILIESCU B. D-TRU., CRĂȘUCANU CAROL, VASILIU I. MIRCEA (elevi ai lic. militar, Cernăuți); VINTILĂ GRIGORESCU, M. MĂNAC, P. DOBRESCU, DAN MARIN, ȘABAC ION, POSTELNICESCU M., (elevi ai lic. militar, Mănăstirea Dealului); STĂNCULESCU GH.-PITEȘTI (lic. militar, Iași); DIMITRIE D. MAVRODIN (lic. M. Eminescu, Buc.); NEGREA A. MIRCEA LEONTE (Brăila); PANAIT C. MAZILU, TUDOR STOICESCU, CEAUȘESCU VASILE și MIRCEA SC. NICHIFOR; au rezolvat problema fie observând că $\widehat{CA'B_1}$ și $\widehat{BA'C'}$ sunt egale, de unde au dedus colinearitatea punctelor A', B_1 C', fie aplicând teorema lui MENELAUS și verificând-o observând că avem:

$$A'B = BC' = B'C = p - c \; ; \; A'C = B'C = p - b \; ; \; AB' = A_1B = p - a,$$

$$AC' = AB_1 = A_1C = p.$$

D-l GH. C. NIȚESCU găsește că punctul întâiu al problemei «nu este adevărat» (?)

D-ra PREDUȚA D. BUNGEȚEANU observă că proprietățile din enunț se mențin și pentru cateta AC.

D-l prof. ANDREI DOBRESCU (R.-Sărat) complectează și rezolvă problema în sensul:

«Să se demonstreze colinearitatea grupurilor de puncte (A', B', C_2), (A', B_3, C'), (A_1, B_1, C_3), (A_1, B_2, C_1), (A_2, B_3, C'), (A_2, B_1, C_2), (A_3, B', C_3), (A_3, B_3, C_1), cari sunt punctele de contact ale laturilor unui triunghiu dreptunghiu ABC (Â fiind unghiul drept) cu cercurile tritangente I, I_1, I_2, I_3».

Mai observă D-nia Sa că cele opt drepte (A', B', C_2); etc. sunt două câte două paralele și perpendiculare pe bisectoarele interioare sau exterioare a unghiurilor din B și C; proprietate pe care D-ra PREDUȚA D. BUNGEȚEANU a și demonstrat-o.

Dealtfel problema în sensul în care a fost complectată mai sus se găsește în *Exercices de Géométrie Moderne* par G. PAPELIER, fascicola II pag. 47.

GH. V.

EXERCIŢII

22. Să se arate că nu există două numere întregi cari să satisfacă ecuaţia nedeterminată

$$10a^2 - b^2 = 2.$$

M. G.

R. Ecuaţia dată se mai poate scrie $2(5a^2 - 1) = b^2$. Membrul al doilea trebuind să fie par, e divizibil cu 4, pe când primul, dacă a e par, e divizibil numai cu 2, iar dacă a e impar, e divizibil numai cu 8.

23. Dintr'un punct O_a de pe înălţimea din A a triunghiului ABC se descrie un cerc trecând prin A, care tae laturile AB, AC în A_c , A_b . A_b A_c tae pe BC în A' pe axa radicală a cercurilor (ABC) , (O_a).

N. N. MIHĂILEANU.

R. Fie A_1 intersecţia dreptei AA' în cercul (O_a): A_b A_c este antiparalelă la BC, deci triunghiurile $A'BA_c$, $A'CA_b$ sunt asemenea:

$$A'B \,.\, A'C = A'A_c \,.\, A'A_b = A'A \,.\, A'A_1$$

şi A_1 aparţine cercului (ABC).

24. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia

$$10a^2 - b^2 = 24.$$

M. G.

R. Membrul al doilea fiind divizibil cu 8, trebue ca

$$a = 2a_1 \ , \ b = 4b_1 \ ,$$

deci

$$5a_1^2 = 2b_1^2 + 3,$$

care cere

$$b_1 = 5c \pm 1,$$

deci

$$a_1^2 = 10c^2 \pm 4c + 1,$$

ecuaţie verificată pentru

$$a_1 = 1, 7, \ c = 0, 2.$$

Soluţiile ecuaţiei date sunt deci

$$a = 2 \ , \ b = \pm 4 \ ; \ \ a = 14 \ , \ b = 44.$$

25. In orice triunghiu avem:

$$\frac{a^2 - 2r_a r}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}B \mp i \operatorname{cotg} \frac{1}{2}C} + \frac{b^2 - 2r_b r}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}C \mp i \operatorname{cotg} \frac{1}{2}A}$$

$$+ \frac{c^2 - 2r_c r}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}A \mp i \operatorname{cotg} \frac{1}{2}B} = \frac{p}{r}(1 \pm i)$$

notaţiunile fiind cele obişnuite iar $i = \sqrt{-1}$.

GH. VASILIU.

R. Se ţine seama de relaţiile cunoscute:

$$\frac{a}{r} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}B + \operatorname{cotg} \frac{1}{2}C \; ; \; \frac{r_a}{r} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}B \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{2}C$$

şi analoagele lor; din care deducem cu uşurinţă că:

$$\frac{a^2 - 2r_a r}{r^2} = (\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}B + i \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C)(\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}B - i \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C)$$

şi analoagele.

Deci sumând:

$$\Sigma \frac{a^2 - 2r_a r}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}B \mp i \operatorname{cotg} \frac{1}{2}C} = r^2 \Sigma \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A \mp i r^2 \Sigma \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A =$$

$$= \frac{r^2 p^3}{r_a r_b r_c} \pm i \frac{r^2 p^3}{r_a r_b r_c} = \frac{p}{r}(1 \pm i).$$

26. Fie funcţiunile:

$$y = \sin x^2 \quad \text{şi} \quad z = \cos x^2.$$

Să se demonstreze relaţia:

$$z' = y' \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + x^2\right).$$

MIHAIL S. BOTEZ.

R. Inversele funcţiunilor date:

$$x^2 = \operatorname{arc\,sin} y \quad \text{şi} \quad x^2 = \operatorname{arc\,cos} z$$

derivate dau:

$$2x dx = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} \quad \text{şi} \quad 2x dx = -\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

sau:

$$\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1-y^2} = 2x\cos x^2 \quad \text{şi} \quad \frac{dz}{dx} = -2x\sqrt{1-z^2} = -2x\sin x^2$$

cari împărţite dau:

$$z'x = -y'x = y'x \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + x^2\right)$$

c. c. t. d.

PROBLEME PROPUSE

4475. In ce caz aria laterală a unui con circular drept este medie geometrică între aria totală şi aria bazei lui?

I. IONESCU.

4476. Se cere un patrat de opt cifre aşa ca numărul format de cele patru cifre de la stânga să fie media aritmetică între numărul format de cele patru cifre din dreapta şi rădăcina patrată a numărului căutat.

V. THÉBAULT.

4477. Să se găsească numărul întreg a cărui rădăcină pătrată este numărul zecimal *a, aaaa* . . . în care *a* este o cifră.

COL. GH. BUICLIU.

4478. Prin mijloacele jumătăţilor bazei unui triunghiu isoscel, ducându-se perpendiculare pe laturile egale se formează trei dreptunghiuri.

Să se demonstreze că perimetrele acestor dreptunghiuri sunt în progresie aritmetică.

PETRE MIRESCU.

4479. In planul unui triunghiu ABC se consideră punctele M şi M' şi triunghiurile lor pedale, respectiv $M_a\ M_b\ M_c$ şi $M'_a\ M'_b\ M'_c$.

Notăm punctele:

$m_a \equiv (AM'_a , M_b M_c); m_b \equiv (BM'_b , M_c M_a) ; m_c \equiv (CM'_c , M_a M_b)$

$m'_a \equiv (AM_a , M'_b M'_c); m'_b \equiv (BM_b , M'_c M'_a) ; m'_c \equiv (CM_c, M'_a M'_b).$

Se cere:

Să se arate că următoarele şase drepte:

$$M_a m_a , M_b m_b , M_c m_c ; M'_a m'_a , M'_b m'_b , M'_c m'_c$$

se întâlnesc în acelaş punct S.

2) In ce caz punctele M', M', S sunt colineare?

GH. D. SIMIONESCU.

4480. Există patrulatere având laturile, diagonalele şi suprafeţele exprimate în numere întregi?

MAIOR I. LINTEŞ.

4481. Se dă un triunghiu ABC şi se formează triunghiu A″B″C″ anticomplimentar cu ABC, ducând prin vârfurile A, B, C paralele cu laturile opuse. Se învârtesc triunghiurile BCA″ în jurul lui BC, CAB″ în jurul lui CA şi ABC″ în jurul lui AB, până când vârfurile A″, B″, C″ ajung în punctul D, astfel că tetraedrul ABCD este echifacial, cu laturile opuse egale, DA = BC, DB = CA, DC = AB. Fie H″ proecţia lui D pe planul ABC. 1°. Să se studieze aşezarea lui H″ faţă de triunghiul A″B″C″, ortocentrul H şi centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC. 2°. Să se calculeze volumul tetraedrului ABCD. 3°. Să se calculeze coordonatele baricentrice ale lui H″ în raport cu triunghiul de referinţă ABC [1]).

N. ABRAMESCU.

1) Să se consulte, N. ABRAMESCU, Asupra tetraedrelor echifaciale (Gaz. Mat., t. 10, 1904, p. 54) şi Formule pentru Geometria Triunghiului. (Extras din Gaz. Mat., 1907).

4482. Să se găsească condițiile, pentru ca ecuația

$$\frac{\alpha}{x-a}+\frac{\beta}{x-b}+\frac{\gamma}{x-c}=0$$

să aibă rădăcini reale; $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, sunt reale.

Să se studieze apoi situația rădăcinilor față de numerele a, b, c.

TH. ANGHELUȚĂ.

4483. Să se calculeze valoarea determinantului de ordinul $p+1$

$$D_{p+1}=\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{n!} & 0 & \frac{1}{(n-1)!} & 0 & \cdots\cdots \\ \frac{1}{n!} & 0 & \frac{1}{(n-1)!} & 0 & \frac{1}{(n-2)!} & \cdots\cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(n-1)!} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Există o valoare a lui $p > 0$, pentru care determinantul este nul?

M. GHERMĂNESCU.

4484. Pe o moșie de formă triunghiulară ABC, se cere să se ducă prin punctul D, situat pe latura AB, o dreaptă DXY, în așa fel încât suprafața triunghiului BDX (X fiind pe latura BC) să fie a m^a parte din suprafața triunghiului XCY, (Y fiind situat pe latura AC). Discuție.

GH. VASILIU.

4485. Să se verifice egalitatea

$$4\sin^2\frac{\pi}{9}+\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{9}=2.$$

C. IONESCU-BUJOR.

4486. Să notăm, cu (a, b, c), *c. m. c. d* al numerelor a, b, c întregi şi pozitive. Fie $\Phi_i(N)$ numărul cantităţilor (a, b, c) pentru care

$$(i, j, N) = 1 \quad i = 1, 2, \ldots, N \; ; \; j = 1, 2, \ldots, N$$

N fiind un număr dat. Să punem:

$$\Phi_2(N) = \Phi_1(\Phi_1(N)) \; ; \; \Phi_3(N) = \Phi_2(\Phi_2(N)), \ldots, \text{etc.}$$

Să se arate că:

1°. Seria

$$\Phi_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Phi_n}{\Phi_1\Phi_2\ldots\Phi_{n-1}}$$

e convergentă şi suma ei S verifă inegalităţile

$$\frac{6}{\pi^2-6}.N^2 < S < 4N^2.$$

2°. Expresia

$$\sqrt{\Phi_1^2+\sqrt{\Phi_2^2+\sqrt{\Phi_3^2+\ldots+\sqrt{\Phi_n^2}}}}$$

e convergentă şi limita ei e mai mică decât $\frac{8}{5}N^2$.

T. POPOVICI.

Rectificare. Problema 3808 propusă la pag. 480; Vol. XXXIV G. M., se complectează astfel: Să se găsească 3 numere întregi în progresie aritmetică, *de acelaşi număr de cifre*, ştiind că patratul unuia este egal cu numărul ce se obţine scriind pe celelalte 2, unul după altul.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu M. (4428, 39, 59); *Apostol V. R.* (4409, 43); *Berdan C.* (4472); *Bogdan Gr. I.* (4409, 30, 43, 59); *Boitan P. N.* (4443); *Bucur N. V.* (4409, 18, 43, 59); *Buzescu V. A.* (4444); *Buzincu D. I.* (4409, 43, 57, 59, 71); *Ceauşescu V.* (4306, 409, 18, 30, 43, 44); *Ceauşoglu V.* (4457); *Chiriac I. C.* (4409, 27, 39); *Cocea Gh. I.* (4406); *Cojocaru P.* (4457, 59, 71); *Constantin Constanța* (4459); *Cotescu C.* (4459); *Cristea G. Em.* (4443); *Dimitriu C. I.* (4430, 39, 43, 59); *Dobrescu P.* (4218, 459, 71); *Dumitrescu I. C. P. A.* (4443); *Enăşescu D. V.* (4409, 31, 43); *Gavrilescu N. C.* (4312, 409); *Goldenberg M. E.* (4459); *Grigorescu V.* (4456); *Grumăzescu M.* (4460); *Hilf A.* (4455); *Ionescu V.* (4418, 30, 31, 39); *Isac C. D.* (4418, 31); *Mănac M.* (4456); *Mihalcea Şt. D.* (4443); *Năstase M.* (4444, 56); *Negrea Mircea* (4456); *Nițescu C. G.* (4460); *Opran C.* (4443); *Roman I. N.* (4443); *Sager I.* (4456); *Stănciulescu Gh.* (4443); *Stoica D. Al.* (4443, 51, 59); *Țițeica I. I.* (4457).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe acelaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau couse în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani complecţi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“
Casa Gazeta Matematică
Calea Griviţei No. 158
Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceiaş adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN.**

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XL

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1935

BIBLIOTECA ... SIBIU

SUMARUL

1. Sur le tétraèdre orthocentrique . . . . . *V. Thébault*
2. Un curs forestier de matematici . . . . . *I. Ionescu*
3. Despre eforturi dinamice . . . . . *Maior I. Linteş*
4. Asupra unor tetraedre . . . . . *C. Ionescu-Bujor*
5. Premiul pentru concursul „Gazetei Matematice".
6. Note matematice: 26 — 29.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 245.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 1386, 2889, 2671, 2986, 4103, 4200, 4235, 4246, 4347, 4390, 4429.
11. Exerciţii: 27.
12. Probleme propuse: 4487 — 4498.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1935

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică" având sediul în Bucureşti („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela „*Gazeta Matematică*" în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 65, 66, 68, 70, 76, 80, 84, 89, 91, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 14, 16, 17, 21, 26, 38, 40, 41, 42, 45, 46, 47, 49, 50, 52, 54, 58, 61, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela „*Gazeta Matematică*" cu preţul de 12 lei.

SUR LE TÉTRAÈDRE ORTHOCENTRIQUE

1. Rappelons d'abord des propriétés d'un triangle dans lequel A_m, B_m, C_m et A_h, B_h, C_h sont les milieux des côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ et les pieds des hauteurs relatives à ces mêmes côtés. Soient (O) le cercle circonscrit, de rayon R, H l'orthocentre du triangle, P l'intersection des droites AA_n et $C_m B_m$ et un cercle de centre A_n, de rayon ρ, qui coupe la droite $C_m B_m$ en M_a et N_a. On a

$$\overline{HM_a^2} = \overline{HP^2} + \overline{PM_a^2} = | HA_h - PA_h |^2 + \overline{A_h M_a^2} - \overline{PA_h^2}$$

$$= \rho^2 - HA_n \cdot HA = \rho^2 + \tfrac{1}{2} | \overline{HO^2} - R^2 |$$

$$= \rho^2 + 4R^2 - \tfrac{1}{2} | a^2 + b^2 + c^2 | . \qquad (1)$$

Par analogie, les cercles de centres B_n, C_n, de rayon ρ, coupent respectivement les droites $A_m C_m$, $B_m A_m$ en des points M_b et N_b, M_c et N_c tels que

$$\overline{HM_b^2} = \overline{HM_c^2} = \rho^2 + 4R^2 - \tfrac{1}{2} | a^2 + b^2 + c^2 | = \overline{HM_a^2} .$$

Nous retrouvons ainsi la réciproque d'un théorème de STEINER [1]: *Trois cercles de même rayon décrits des pieds des hauteurs d'une triangle* ABC, *d'orthocentre* H, *rencontrent les côtés du triangle complémentaire en six points situés sur un cercle de centre* H [2]).

2. Considérons un tétraèdre *orthocentrique* ABCD, ($BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = a'$, $DB = b'$, $DC = c'$). Soient H l'orthocentre, (O) la sphère circonscrite, de rayon R, G le centre de gravité, G_a, G_b, G_c, G_d les centres de gravité des faces BCD, CDA, DAB, ABC, H_a, H_b, H_c, H_d les pieds des hauteurs, (orthocentres des triangles des faces). α, β, γ, α', β', γ' les milieux des arêtes précédentes du tétraèdre.

Du point H_d, par exemple, comme centre, décrivons une sphère, de rayon ρ, qui coupe les droites $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ en des points M et N, P et Q, S et T. Soient K et D' les points où la hauteur DH_d perce le plan $\alpha\beta\gamma$ et la sphère (O).

1) CRELLE, XXX — 273. — *Oeuvres*, t. II. p. 345.
2) *Journal de* VUIBERT XXV p. 145.

On a, par exemple,

$$\overline{HM}^2 = \overline{HK}^2 + \overline{MK}^2 = \overline{HK}^2 + \rho^2 - \tfrac{1}{4}\overline{DH_d}^2.$$

Mais,

$$HK = \tfrac{1}{2} DH_d - HH_d \quad , \quad HD' = 3HH_d ;$$

d'où

$$\overline{HM}^2 = \rho^2 - HH_d \,.\, DH = \rho^2 + \tfrac{1}{3} \mid \overline{HO}^2 - R^2 \mid = \rho^2 + \tfrac{1}{3} \mid 4\overline{OG}^2 - R^2 \mid .$$

Comme

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \Sigma \tfrac{1}{16} a^2 = R^2 - \tfrac{3}{16} (a^2 + a'^2),$$

on a finalement

$$\overline{HM}^2 = \rho^2 + R^2 - \tfrac{1}{4} \mid a^2 + a'^2 \mid = \overline{HN}^2 = \ldots = \overline{HT}^2. \qquad (2)$$

Par analogie, les sphères, de rayon ρ, de centres H_a, H_b, H_c coupent les droites $(\beta\gamma', \gamma'\alpha', \alpha'\beta), \ldots,$ en six points dont les distances à l'orthocentre H du tétraèdre sont égales à HM.

Dès lors, le théorème relatif au triangle s'étend comme suit au tétraèdre orthocentrique :

Quatre sphères de même rayon décrites des pieds des hauteurs d'un tétraèdre orthocentrique, d'orthocentre H, *comme centres recontrent, dans chacune des faces, les droites joignant les milieux des arêtes en vingt-quatre points d'une sphère de centre* H.

3. Soient H' l'orthocentre du tétraèdre ortocentrique $G_aG_bG_cG_d$, ω le milieu du segment rectiligne HH', autrement dit le centre de la *seconde* sphère des douze points, de rayon $\frac{1}{3}$ R, du tétraèdre ABCD.

1°. La sphère de centre G_d et de rayon G_dH, par exemple, coupe les arêtes BC, CA, AB en M, N, P, et on a

$$\overline{HM}^2 = \overline{HH_d}^2 + \overline{H_dM}^2 = \overline{HH_d}^2 + \overline{H_dH'}^2 = 2\overline{H_d\omega}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{HH'}^2$$

$$= \tfrac{2}{9} \mid R^2 + \overline{OH}^2 \mid ,$$

puisque $HH' = \frac{2}{3} OH$.

Par analogie, les sphères de centres G_a, G_b, G_c, passant par l'orthocentre H, rencontrent les arêtes des faces BCD, CDA, DAB en des points dont les distances au point H sont égales à HM. On a d'ailleurs

$$\overline{HM}^2 = \tfrac{2}{9} \mid R^2 + 4\overline{OG}^2 \mid = \tfrac{1}{9} \mid 10R^2 - \tfrac{3}{2}(a^2 + a'^2) \mid . \qquad (3)$$

D'où ce théorème :

Des centres de gravité des faces d'un tétraèdre orthocentrique, comme centres, on décrit des sphères passant par l'orthocentre. Elles coupent les arêtes des faces corespondantes en vingt-quatre points d'une sphère (S) *dont le centre est l'orthocentre du tétraèdre.*

2°. La sphère de centre H_d et de rayon $H_d H'$, par exemple, coupe les arêtes BC, CA, AB en M', N', P'. On a

$$H'M'^2 = H'G_d^2 + H_d H'^2 = 2H_d\omega^2 + \tfrac{1}{2} HH'^2 = \tfrac{2}{9} \mid R^2 + OH^2 \mid . \quad (4)$$

Dès lors :

Des pieds des hauteurs d'un tétraèdre orthocentrique ABCD, *comme centres, on décrit des sphères pasant par l'orthocentre* H' *du tétraèdre* $G_a G_b G_c G_d$. *Elles coupent les arêtes des faces correspondantes du tétraèdre* ABCD *en vingt-quatre points d'une sphère* (S') *de centre* H'.

En vertu des relations (3) et (4), *les deux sphères* (S), (S') *sont égales.*

N. B. Ces sphères étendent un tétraèdre orthocentrique des cercles du triangle que nous avons signalés il y a deja longtemps [1]).

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

UN CURS FORESTIER DE MATEMATICI

In *„Istoricul Invățământului Ingineriei în România"* (București 1932) am arătat că Domnitorul BARBU ȘTIRBEI adusese în țară, din Franța, în Iulie 1851, pe Inginerul inspector silvic REICHMOND, pe subinspectorul REICHHOMME și pe guardul general PATRAS pentru a organiza Serviciile de amenajări și de conservare a pădurilor Statului. Ei au stat la noi trei ani și au constituit *Comisiunea forestieră a Valachiei.* Iarna ei adunau pe agenții silvici și îi instruiau, director al Școalei fiind REICHMOND. Nu am putut da însă peste cursurile făcute în acea Școală.

1) *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1910 — 278. G. M. XXXIII-15.

De curând însă D-l Inginer I. S. ANTONIU mi-a dat în cercetare două caețele scrise pe hârtie albă neliniată, cartonate, în mărime de 165 × 100 mm care au aparținut Inginerului ION GIURCOVICI, de origină din Dalmația, venit în țara noastră pe la 1845. El a fost Inginer Șef al Serviciilor tecnice la Primăria Capitalei, a construit șoseaua București-Oltenița, a fost întreprinzător de lucrări publice și a predat unele cursuri la Școala de Silvicultură. Toate aceste informațiuni mi-au fost date de descendenți ai familiei GIURCOVICI. Prin *Cererea* No. 242 din acest an, am cerut noi informațiuni.

Caețelele, de care vorbirăm poartă data: *Decembre 1852,* astfel că cursurile nu au putut fi făcute decât la Școala lui REICHMOND.

Cursurile sunt scrise în limba franceză, cu erori de exprimare și de ortografie, cu ștersături, adăogiri, îndreptări, modificări. Se vede că ele au fost scrise repede în vederea cursului; nu este exclusă posibilitatea ca aceste caețele să fie niște note luate în clasă de vreun elev, care avea bune cunoștințe de limba franceză. Se știe că Comisiunii forestiere a României i se atașase șase tineri cu cunoștințe de limba franceză și de matematici. Totuși, și ipoteza că manuscrisele din cele două caețele sunt ale dalmațianului inginer GIURCOVICI nu se poate înlătura. Pentru aceasta ar trebui studiate arhivele Primăriei și ale Ministerului de interne, de care depindeau atunci șoselele, spre a se compara scrisul. In tot cazul, dispunem acum de cursuri făcute la prima noastră Școală de Silvicultură.

Primul caețel are pe pagina întâia scrise clar cuvintele: *„Auteur fussieux"* (!). El este intitulat: *Notions de botanique, cours forestier",* și conține 170 pagini. Cercetarea lui nu interesează pe cititorii acestei reviste.

Al doilea caețel conține două părți. Prima este intitulată: *„Notions de Mathèmatiques,* (sic) *cours forestier".* Partea a doua este intitulată: *„De l'Economie forestière* (sic)". Acesta din urmă este un curs de silvicultură, de 114 pagini, de care nu ne vom ocupa, deși sunt subliniate principii care și-ar putea găsi aplicațiunea și în afară de păduri, ca de exemplu: *„Moins d'arbres, plus de bois",* ce s'ar putea aplica la inflația școlară de azi, la inflația de funcționari, etc.

Partea întâia a Cursului de matematici ocupă 11 pagini și tratează despre *logaritmi.* Se deosibesc patru cazuri la căutarea

logaritmului unui număr: căutarea logaritmilor numerelor peste 10000, căutarea logaritmilor numerelor cu zecimale, căutarea logaritmilor zecimalelor fără întregi, căutarea logaritmilor fracțiilor ordinare. Pe acestea le transformă mai întâiu în zecimale și apoi le ia logaritmul; e și o notiță ulterioară scrisă cu creionul în care se spune că se poate găsi logaritmul unei fracții ordinare scăzând logaritmul numitorului din al numărătorului. La căutarea numărului corespunzător unui număr consideră un singur caz. Vorbește de *caracteristică* fără a spune ce este, și arată cum se fac operațiunile cu caracteristice pozitive și negative. In toată expunerea sunt numai reguli și procedee de calcul; nici un exemplu numeric, nici o aplicațiune.

Partea a doua a Cursului de Matematici este întitulată: „*Géomètrie* (sic)". Se începe cu teoreme asupra ariilor plane și cu reguli pentru evaluarea lor. Pentru aria cercului, ia valoarea archimediană $\pi = 22/7$. Trece de aci la geometria în spațiu unde se dau propietăți ale planelor, perpendicularelor, paralelelor, unghiurilor plane (diedre), unghiurile solide, corpurile prismatice, poliedrele regulate; apoi cilindrul și conul. La trunchiul de con vorbește de piramide, pe care însă nu le-a descris. Și aci lipsesc exemple numerice, aplicațiuni, exerciții, probleme, etc.

Din cele expuse până aci reese că se dedeau cunoștințe matematice foarte slabe la cursurile Școalei silvice întemeiată la 1852. Ele sunt cu mult inferioare cursurilor de matematici ce se dedeau pe atunci în școalele secundare din Muntenia. Nuuai la 1860 s'au întemeiat cursuri serioase pentru învățământul silvic, la care matematicile s'au predat de renumitul Inginer de pe vremuri CONSTANTIN ANINOȘANU. Și acea Școală a durat numai doi ani.

I. IONESCU.

DESPRE EFORTURI DINAMICE

Rezistența unei piese oarecare, supusă la un efort *static* (foarte lent), diferă de rezistența aceleeași piese supusă la un efort *dinamic* (foarte rapid, crescător sau descrescător).

Plecând dela ecuația generală a lui d'ALEMBERT, îmi propun a calcula *oboseala* unei piese supusă la eforturi dinamice.

La tracțiune și compresiune

Ecuația mișcării rectiline este :

$$1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

unde u este translația secțiunii x (elongația) și v este viteza de propagare a deformațiunilor sau celeritatea.

Utilizând integrarea prin desvoltare în serie și mărginindu-mă numai la primii doi termeni ai seriei, am găsit că oboseala la eforturi dinamice a piesei în secțiunea x, este :

$$2) \qquad (\sigma_d)_x = \sigma_s \cdot \frac{F_d}{F_s}\left[1 - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{F''_d}{F_d} \cdot \frac{3l^2 - x^2}{3\,!}\right]$$

unde F_d este efortul dinamic și F_s efortul static, F''_d este derivata a doua a efortului dinamic în raport de timp ; σ_s este oboseala statică și $(\sigma_d)_x$ este oboseala dinamică în secțiunea x, iar l este lungimea piesei, presupusă prismatică și de secțiune constantă.

Dacă efortul dinamic este regresiv, pornind dela un maximum egal efortului static, atunci $F''_d < 0$ și deci :

$$(\sigma_d)_x > \sigma_s .$$

La torsiune

Analog, deducem că :

$$3) \qquad (\tau_d)_x = \tau_s \cdot \frac{M_d}{M_s}\left[\left(1 - \frac{1}{v'^2} \cdot \frac{M''_d}{M_d} \cdot \frac{l^2 - x^2}{2\,!}\right) + \frac{\partial M_d}{\partial x} \cdot \frac{x}{M_d} \cdot \left(1 - \frac{1}{v'^2} \cdot \frac{\dfrac{\partial M''_d}{\partial x}}{\dfrac{\partial M_d}{\partial x}} \cdot \frac{3l^2 - x^2}{3\,!}\right)\right]$$

unde v' este celeritatea la torsiune, M_d și M_s sunt momentele de torsiune dinamice și statice, iar M''_d derivata a doua în raport de timp.

Și aici, în condițiunile de mai sus, avem :

$$(\tau_d)_x > \tau_s .$$

La flexiune

Analog avem:

$$4) \quad (\varphi_d)_x = \varphi_s \cdot \frac{M_d}{M_s} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{M''_d}{M_d} \cdot \frac{l^2 - x^2}{2!}\right) + \frac{\partial M_d}{\partial x} \cdot \frac{x}{M_d} \cdot \left(1 - \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{\frac{\partial M''_d}{\partial x}}{\frac{\partial M_d}{\partial x}} \cdot \frac{3l^2 - x^2}{3!}\right)\right].$$

Deci în condițiunile de mai sus putem avea:

$$(\varphi_d)_x > \varphi_s .$$

La compresiune cu flambaj

Static oboseala este:

$$n_s = \sigma_s + \varphi_s .$$

Dinamic, vom avea:

$$5) \quad (n_d)_x = (\sigma_d)_x + (\varphi_d)_x$$

formulă care servește și pentru calculul teoretic al *rezilienței.*

Și aici avem cazuri când:

$$(n_d)_x > n_s .$$

Observațiuni:

Calculul construcțiunilor aeronautice, planoare și motoare, cerând greutate mică și rezistență mare, necesită verificarea condițiunilor dinamice, în care funcționează.

MAIOR I. LINTEȘ.

ASUPRA UNOR TETRAEDRE

Dacă un vârf al unui tetraedru se proectează pe fața opusă în anume puncte remarcabile ale acelei fețe, între muchiile tetraedrului există relații interesante.

1°. *Fie* TABC *un tetraedru,* O *și* H *respectiv centrul cercului circumscris triunghiului* ABC *și ortocentrul acestui triunghiu.*

Dacă proecția vârfului T *pe planul* ABC *se află pe dreapta lui* EULER *a triunghiului* ABC *și împarte segmentul* OH *în raportul* k, *există următoarele relații între muchii:*

$$(1+k)\,\overline{TA}^2 + k\,.\,\overline{BC}^2 = (1+k)\,\overline{TB}^2 + k\,.\,\overline{AC}$$
$$= (1+k)\,\overline{TC}^2 + k\,.\,\overline{AB}^2. \qquad (1)$$

Pentru demonstrație, se notează A′ mijlocul muchei BC, A_1 și A_2 respectiv proecțiile vârfurilor T și A pe muchia BC, T_1 proecția vârfului T pe planul ABC.

Din relațiile

$$\overline{TB}^2 - \overline{TC}^2 = 2\,\overline{BC}\,.\,\overline{A'A_1} \qquad \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2\,\overline{BC}\,.\,\overline{A'A_2}$$

se deduce

$$\frac{\overline{TB}^2 - \overline{TC}^2}{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} = \frac{\overline{A'A_1}}{\overline{A'A_2}}\,.$$

Cum TT_1 este perpendiculară pe planul ABC, iar TA_1 perpendiculară pe muchia BC, urmează că T_1A_1 este deasemenea perpendiculară pe BC, deci paralelă cu dreptele HA_2 și OA′, încât,

$$\frac{\overline{A'A_1}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{OT_1}}{\overline{T_1H}} = k$$

de unde,

$$\frac{\overline{A'A_1}}{\overline{A'A_2}} = \frac{k}{1+k}$$

$$\frac{\overline{TB}^2 - \overline{TC}^2}{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} = \frac{k}{1+k}$$

sau

$$(1+k)\,(\overline{TB}^2 - \overline{TC}^2) = k\,.\,(\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2)$$

în fine,

$$(1+k)\,\overline{TB}^2 + k\,.\,\overline{AC}^2 = (1+k)\,\overline{TC}^2 + k\,.\,\overline{AB}^2$$

și, repetându-se demonstrația pe muchia AC, se află rezultatul enunțat.

2°. Reciproc: *Dacă între muchiile unui tetraedru* TABC *există relațiile:*

$$(1+k)\,\overline{TA}^2 + k\,.\,\overline{BC}^2 = (1+k)\,\overline{TB}^2 + k\,.\,\overline{AC}^2$$
$$= (1+k)\,.\,\overline{TC}^2 + k\,.\,\overline{AB}^2$$

proecția vârfului T *pe planul* ABC, *se află pe dreapta lui* EULER *a triunghiului* ABC *și împarte segmentul* OH *în raportul* k.

Condițiile dau

$$\frac{\overline{TB}^2 - \overline{TC}^2}{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} = \frac{k}{1+k}$$

și cum

$$\overline{TB}^2 - \overline{TC}^2 = 2\,\overline{BC} \cdot \overline{A'A_1} \qquad \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2\,\overline{BC} \cdot \overline{A'A_2}$$

urmează

$$\frac{\overline{A'A_1}}{\overline{A'A_2}} = \frac{k}{1+k}, \text{ deci } \frac{\overline{A'A_1}}{\overline{A_1A_2}} = k,$$

încât — T_1 fiind acum punctul în care perpendiculara ridicată în A_1 pe BC tae OH,

$$\frac{\overline{OT_1}}{\overline{T_1H}} = k;$$

iar proecția vârfului T pe planul ABC se află pe A_1T_1. Considerând relația

$$\frac{\overline{TC}^2 - \overline{TA}^2}{\overline{BC}^2 - \overline{BA}^2} = \frac{k}{1+k},$$

extrasă din condițiile enunțului și repetând pe muchia AC raționamentul precedent, se constată că perpendiculara ridicată în B_1 pe AB (B_1 fiind proecția vârfului T pe AC) împarte segmentul OH în raportul k, deci trece prin T_1; deasemenea această dreaptă T_1B_1 conține proecția vârfului T pe planul ABC.

Cum proecția lui T pe planul ABC se află pe ambele drepte T_1A_1, T_1B_1 — este chiar T_1 și proprietatea enunțului e dovedită.

Deci: *Condițiile necesare și suficiente pentruca, în tetraedrul* TABC, *proecția vârfului* T *pe planul* ABC *se fie situată pe dreapta lui* EULER *a triunghiului* ABC *și să împartă segmentul* OH *în raportul* k, *sunt:*

$$(1+k)\,\overline{TA}^2 + k \cdot \overline{BC}^2 = (1+k)\,\overline{TB}^2 + k \cdot \overline{AC}^2$$
$$= (1+k)\,\overline{TC}^2 + k \cdot \overline{AB}^2.$$

3°. ABC fiind un triunghiu dat, există o infinitate de tetraedre TABC al căror vârf T se proectează pe dreapta lui EULER a triunghiului ABC, împărțind segmentul OH în raportul k.

Locul geometric al vârfului T este o perpendiculară pe planul ABC. Ecuația carteziană a perpendicularei apare îndată, dacă se consideră triedrul tridreptunghiu ωxyz astfel ca axele ωx, ωy să fie în planul ABC. Atunci

$$A(a_x, a_y, 0),\ B(b_x, b_y, 0),\ C(c_x, c_y, 0),\ T(x, y, z).$$

In acest caz, relațiile dintre muchiile tetraedrului TABC devin:

$$(1+k)[(x-a_x)^2+(y-a_y)^2+z^2]+k[(b_x-c_x)^2+(b_y-c_y)^2]$$
$$=(1+k)[(x-b_x)^2+(y-b_y)^2+z^2]+k[(c_x-a_x)^2+(c_y-a_y)^2]$$
$$=(1+k)[(x-c_x)^2+(y-c_y)^2+z^2]+k[(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2]$$

sau

$$2(1+k)(xa_x+ya_y)-(1+k)(a_x^2+a_y^2)-k[(b_x-c_x)^2+(b_y-c_y)^2]$$
$$=2(1+k)(xb_x+yb_y)-(1+k)(b_x^2+b_y^2)-k[(c_x-a_x)^2+(c_y-a_y)^2] \quad (2)$$
$$=2(1+k)(xc_x+yc_y)-(1+k)(c_x^2+c_y^2)-k[(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2]$$

care reprezintă ecuația perpendicularei pe planul ABC al cărei picior se află pe dreapta lui EULER a triunghiului ABC și împarte segmentul OH în raportul k.

4°. *Cazuri particulare:*

a) Condițiile necesare și suficiente pentru ca, în tetraedrul TABC, *proecția vârfului* T *pe planul* ABC *să fie centrul de greutate al triunghiului* ABC, *sunt.*

$$3\overline{TA}^2+\overline{BC}^2=3\overline{TB}^2+\overline{AC}^2=3\overline{TC}^2+\overline{AB}^2. \quad (3)$$

Se obțin punând în (1) $k=\frac{1}{2}$.

b) Condițiile necesare și suficiente pentru ca, în tetraedrul TABC, *proecția vârfului* T *pe planul* ABC *să fie centrul cercului lui* EULER *al triunghiului* ABC, *sunt.*

$$2\overline{TA}^2+\overline{BC}^2=2\overline{TB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{TC}^2+\overline{AB}^2, \quad (4)$$

obținute punând $k=1$.

c) Când proecția lui T este ortocentrul H, $k=\infty$.

In acest caz A_1 se confundă cu A_2, deci

$$\overline{TB}^2-\overline{TC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2$$

şi alte două relaţii analoage, care conduc la:

$$\overline{TA}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{TB}^2 + \overline{AC} = \overline{TC}^2 + \overline{AB}^2, \qquad (5)$$

condiţie necesară şi suficientă pentru ca, în tetraedrul TABC, *proecţia vârfului* T *pe planul* ABC *să fie ortocentrul triunghiului* ABC.

d) Când proecţia lui T pe planul ABC este O, centrul cercului ABC, $k = 0$ şi relaţiile (1) devin

$$\overline{TA} = \overline{TB} = \overline{TC}. \qquad (6)$$

5°. In ce condiţiuni proecţiile a două vârfuri ale unui tetraedru ABCD, pe feţele opuse, se află pe dreptele lui EULER ale acestor feţe?

Pentru ca proecţia vârfului D pe planul ABC să se afle pe dreapta lui EULER a triunghiului ABC, e necesar şi suficient să existe relaţiile:

$$(1+k)\,\overline{DA}^2 + k \cdot \overline{BC}^2 = (1+k)\,\overline{DB}^2 + k \cdot \overline{CA}^2 = (1+k)\,\overline{DC}^2 + k \cdot \overline{AB}^2 \qquad (7)$$

(k fiind raportul în care proecţia lui D împarte segmentul OH).

De aici se deduce:

$$k \cdot \overline{CB}^2 + (1+k)\,\overline{DA}^2 = k \cdot \overline{CA}^2 + (1+k)\,\overline{DB}^2$$

care este una dintre cele două relaţii necesare şi suficiente pentru ca proecţia vârfului C pe planul DAB să se afle pe dreapta lui EULER a triunghiului DAB. In cât, condiţiunile necesare şi suficiente acestei proprietăţi a vârfului C sunt:

$$k \cdot \overline{CB}^2 + (1+k)\,\overline{DA}^2 = k \cdot \overline{CA}^2 + (1+k)\,\overline{DB}^2 = k \cdot \overline{CD}^2 + (1+k)\,\overline{AB}^2.$$

Comparând cu (7), urmează:

$$(1+k)\,\overline{DC}^2 + k \cdot \overline{AB}^2 = k \cdot \overline{CD}^2 + (1+k)\,\overline{AB}^2$$

sau

$$\overline{DC}^2 = \overline{AB}^2 \quad , \quad \overline{DC} = \overline{AB}.$$

Deci:

Pentru ca într'un tetraedru ABCD *proecţiile vârfurilor* C *şi* D *respectiv pe planele* ABD *şi* ABC *să se afle pe dreptele lui*

EULER *ale triunghiurilor* ABD *şi* ABC, *iar proecţia vârfului* D *să împartă segmentul* OH *în raportul* k, *e necesar şi suficient ca:*

1) *Muchia formată de cele două vârfuri să fie egală cu muchia opusă:* $\overline{DC} = \overline{AB}$.

2) Să existe relaţiile

$$(1+k)\overline{DA}^2 + k \cdot \overline{BC}^2 = (1+k)\overline{DB}^2 + k \cdot \overline{CA}^2 = (1+2k)\overline{DC}^2. \quad (8)$$

6°. *Pentru ca în tetraedrul* ABCD *proecţiile a trei vârfuri* B, C, D *respectiv pe planele* ACD, ABD, ABC *să se afle pe dreptele lui* EULER *ale triunghiurilor* ACD, ABD, ABC *şi proecţia vârfului* D *să împartă segmentul* OH *în raportul* k, *e suficient ca patrulaterul strâmb* ABCD *să aibă toate laturile egale şi să existe relaţia*

$$\frac{(1+k)\overline{BD}^2 + k \cdot \overline{AC}^2}{1+2k} = \overline{AB}^2.$$

Intr'adevăr, acest caz cuprinde în sine cazul precedent (5°) ale cărui condiţiuni trebuesc astfel indeplinite. Cum proecţia vârfului B pe planul ACD se află pe dreapta lui EULER a triunghiului ACD, e suficient, ţinând seamă de relaţia (8)

$$k \cdot \overline{BC}^2 + (1+k)\overline{DA}^2 = (1+k)\overline{BD}^2 + k \cdot \overline{AC}^2$$

să existe egalitatea $\overline{BC} = \overline{DA}$ pentru a fi îndeplinite condiţiile cerute de proprietatea impusă lui B, anume:

$$(1+k)\overline{BC}^2 + k \cdot \overline{DA}^2 = (1+k)\overline{BD}^2 + k \cdot \overline{AC}^2$$
$$= (1+k)\overline{BA}^2 + k \cdot \overline{CD}^2. \quad (9)$$

Am spus «e suficient», pentrucă s'ar putea lua şi

$$\overline{BD} = \overline{AC}.$$

Pentru că $\overline{BC} = \overline{AD}$, $\overline{BA} = \overline{DC}$, relaţiile (9) conduc la:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$

şi apoi la egalitatea

$$\frac{(1+k)\overline{BD}^2 + k\overline{AC}^2}{1+2k} = \overline{AB}^2.$$

7°. Pentruca proecțiile vârfurilor B, C, D pe planele ACD, ABD, ABC să se afle pe dreptele lui EULER ale triunghiurilor respective, ținând seama de aceiași relație (8)

$$k \cdot \overline{BC}^2 + (1+k)\,\overline{DA}^2 = (1+k)\,\overline{BD}^2 + k \cdot \overline{AC}^2$$

e suficient deasemenea

$$\overline{BD} = \overline{AC}$$

și relațiile cerute de proprietatea lui B se scriu astfel:

$$k \cdot \overline{BC}^2 + (1+k)\,\overline{DA}^2 = k \cdot \overline{BD}^2 + (1+k)\,\overline{AC}^2$$

$$= k \cdot \overline{BA}^2 + (1+k)\,\overline{CD}^2,$$

de unde se deduce

$$\overline{BD} = \overline{AC} = \overline{AB} = \overline{CD}$$

și

$$\frac{k \cdot \overline{BC}^2 + (1+k)\,\overline{DA}^2}{1+2k} = \overline{AB}^2.$$

In cât, proprietății 6° se alătură următoarea:

Pentru ca în tetraedrul ABCD *proecțiile a trei vârfuri* B, C, D *respectiv pe planele* ACD, ABD, ABC *să se afle pe dreptele lui* EULER *ale triunghiurilor* ACD, ABD, ABC *și proecția vârfului* D *să împartă segmentul* OH *în raportul* k, *e suficient ca patrulaterul strâmb* ABDC *să aibă laturile egale între ele și să existe relația:*

$$\frac{k \cdot \overline{BC}^2 + (1+k)\,\overline{DA}^2}{1+2k} = \overline{AB}^2.$$

8°. Dacă, avându-se în vedere relațiile (7), care exprimă că proecția vârfului D pe planul ABC se află pe dreapta lui EULER a triunghiului ABC și împarte segmentul OH în raportul k, se impune condiția ca proecția vârfului A pe planul BCD să se afle pe dreapta lui EULER a triunghiului BCD, se deduce:

$$\overline{DA} = \overline{BC}$$

și

$$(1+k)\,\overline{DB}^2 + k \cdot \overline{CA}^2 = (1+k)\,\overline{DC}^2 + k \cdot \overline{AB}^2 = (1+2k)\,\overline{BC}^2.$$

Dacă şi vârful C se bucură de o proprietate analoagă, se află condiţiile suficiente

$$DA = \overline{BC} = \overline{DB} = \overline{AC}$$

şi

$$\frac{(1+k)\,\overline{DC}^2 + k\,.\,\overline{AB}^2}{1+2k} = \overline{AC}^2.$$

Şi se poate enunţa proprietatea care se ataşează precedentelor două :

Pentru ca în tetraedrul ABCD *proecţiile a trei vârfuri* A, C, D *respectiv pe planele* BCD, ABD, ABC *să se afle pe dreptele lui* EULER *ale triunghiurilor* BCD, ABD, ABC *şi proecţia vârfului* D *să împartă segmentul* OH *în raportul* k, *e suficient ca patrulaterul strâmb* ADBC *să aibă laturile egale şi să existe egalitatea*

$$\frac{(1+k)\,\overline{DC}^2 + k\,.\,\overline{AB}^2}{1+2k} = \overline{AC}^2.$$

9⁰. *Dacă în tetraedrul* ABCD *proecţiile a trei vârfuri pe feţele opuse se află pe dreptele lui* EULER *ale acestor feţe şi proecţia vârfului al patrulea pe faţa opusă se află pe dreapta lui* EULER *a feţei.*

Dacă ipoteza acestei proprietăţi se referă la punctele B, C, D, există condiţiile

a) $$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$

$$\frac{(1+k)\,\overline{BD}^2 + k\,.\,\overline{AB}^2}{1+2k} = \overline{AB}^2$$

sau

b) $$\overline{AC} = \overline{BD} = \overline{AB} = \overline{CD}$$

$$\frac{k\,.\,\overline{BC}^2 + (1+k)\,\overline{DA}^2}{1+2k} = \overline{AB}^2.$$

In prima situaţie,

$$k\,.\,\overline{AC}^2 + (1+k)\,\overline{BD}^2 = k\,.\,\overline{AB} + (1+k)\,\overline{CD}^2$$
$$= k\,.\,\overline{AD}^2 + (1+k)\,\overline{BC}^2$$

în cealaltă,

$$1+k)\,\overline{AD}^2 + k\,.\,\overline{BC}^2 = (1+k)\,\overline{AB}^2 + k\,.\,\overline{CD}^2$$
$$= (1+k)\,\overline{AC}^2 + k\,.\,\overline{BD}^2.$$

Deci în ambele cazuri sunt îndeplinite condițiunile necesare pentru ca proecția punctului A pe planul BCD să fie situată pe dreapta lui EULER a triunghiului.

Dacă ipoteza se referă la punctele A, C, D, există condițiile

$$c) \qquad \frac{(1+k)\,\overline{DC}^2 + k \cdot \overline{AB}^2}{1+2k} = \overline{AC}^2$$

$$\overline{DA} = \overline{BC} = \overline{DB} = \overline{AB}.$$

Și se formează imediat condițiile necesare pentru ca punctul B să satisfacă proprietății enunțată.

Dacă ipoteza se referă la vârfurile A, B, D sau la vârfurile A, B, C condițiile care există nu sunt decât două dintre cele 3 grupe (*a*), (*b*), (*c*) prezentate, care, după cum s'a văzut, situează proecțiile vârfurilor C, D pe dreptele lui EULER ale fețelor opuse.

10°. Se pot concentra rezultatele precedente astfel:

Pentru ca în tetraedrul ABCD *proecția oricărui vârf pe planul determinat de celelalte trei vârfuri să se afle pe dreapta lui* EULER *a triunghiului format de acele vârfuri și proecția vârfului* D *să împartă segmentul* OH *în raportul* k, *e necesar și suficient ca unul din patrulaterele strâmbe formate de cele 4 vârfuri ale tetraedrului să aibă laturile egale și să existe relația*

$$(1+k)\,\delta^2 + k \cdot \beta^2 = (1+2k)\,\alpha^2$$

unde α *este lungimea comună a celor 4 laturi ale patrulaterului considerat,* δ *este muchia tetraedrului, care trece prin* D *și nu aparține patrulaterului, iar* β *este cealaltă muche a tetraedrului care nu aparține patrulaterului.*

11°. In proprietățile precedente k a fost finit. Când $k = \infty$, am arătat (4°, *c*) că proecția vârfului T al tetraedrului TABC, pe planul ABC, este ortocentrul triunghiului ABC și există relațiile:

$$\overline{TA}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{TB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{TC}^2 + \overline{AB}^2.$$

Această condiție fiiind și suficientă, atrage pentru punctele A, B, C proprietăți analoage proprietății punctului T, încât se poate enunța:

Dacă într'un tetraedru ABCD *proecția unui vârf pe fața opusă se află în ortocentrul acestei fețe, proecțiile celorlalte vârfuri pe fețele opuse se află deasemenea în ortocentrele fețelor respective.*

In acest caz, ABCD e un tetraedru ortocentric. Caz particular al tetraedrului ortocentric este tetraedrul regulat.

C. IONESCU-BUJOR.

PREMIU PENTRU CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE"

D-şoara PREDUȚA D. BUNGEȚEANU, studentă la Facultatea de Științe din București, a donat și anul acesta societății *Gazeta Matematică* suma de 1000 lei pentru premiile ce se acordă la concurs. Donația D-sale este însoțită de următoarea scrisoare:

Onor. Delegației Societății „Gazeta Matematică",

Am onoare a vă ruga să bine voiți a primi și în anul acesta, modesta mea contribuție de una mie lei, în memoria tatălui meu, Profesor D. BUNGEȚEANU, *pentru premiile ce se acordă la concursul „Gazeta Matematică".*

Cu distinse mulțumiri

PREDUȚA D. BUNGEȚEANU

București, 17 Februarie 1935.

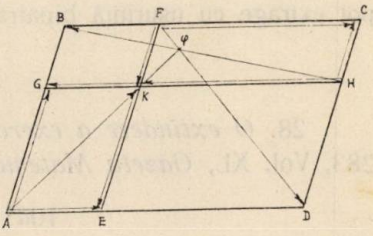
S'a luat cunoștință de această nouă donație a D-şoarei PREDUȚA BUNGEȚEANU în adunarea generală de la 20 Februarie 1935 și s'a hotărît a i se exprima mulțumiri în numele societății noastre și a viitorilor premiați ai concursului din acest an.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII.

NOTE MATEMATICE

26. *Géométrie et Mécanique.* Voici une démonstration simple, utilisant des notions élémentaires de la Statique, de la première partie de notre *Problème* 3694, (*Gazeta Matematică*, XXXVIII — 65), qui s'énonce ainsi :

Par un point K *intérieur à un parallélogramme* ABCD on trace *les parallèles aux côtés qui rencontrent* AB *et* CD *en* G *et* H, DA *et* BC *en* E et F. *Montrer que les droites* (AK, DF, BH) *sont concourantes.*



Appliquons en A et K quatre forces dirigées suivant les côtés du parallélogramme AGKE et représentées en grandeur par ces côtés. Nous avons ainsi un système de forces en équilibre. Cet équilibre ne sera pas détruit si l'on applique un système de forces analogues au précédent aux sommets F, H du parallélogramme KFCH. Or, les forces AG, AE peuvent être remplacées par leur résultante AK ; les forces HC et HG = HK + KG, par la résultante HB ; enfin, les forces FC et FE = FK + KE, par la résultante FD.

Le système est donc en équilibre sous l'action des trois forces AK, FD *et* HB *dont les directions doivent par suite concourir en un même point.*

Remarque. Ce raisonnement, qui s'applique aussi aux triples de droites concourantes (BK, AH, CE), (CK, BE, DG), (DK, CG, AF), (GF, EH, AC), (HF, EG, BD), subsiste pour une position *arbitraire* du point K dans le plan du parallélogramme ABCD.

V. THÉBAULT.

27. *Cuburi formate din cifre diferite între ele.* Urmând metoda dată de D-l V. THÉBAULT în suplimentul de pe Octomvrie 1934 al revistei *Mathesis*, găsim următoarele cuburi ale căror cifre sunt toate diferite între ele.

$3^3 = 27$; $4^3 = 64$; $5^3 = 125$; $6^3 = 216$; $8^3 = 512$;

$9^3 = 729$; $12^3 = 1728$; $13^3 = 2197$; $16^3 = 4096$;

$17^3 = 4913$; $18^3 = 5832$; $19^3 = 6859$; $21^3 = 9261$;

$22^3 = 10648$; $24^3 = 13824$; $27^3 = 19683$; $29^3 = 24389$
$32^3 = 32768$; $35^3 = 42875$; $38^3 = 54872$; $41^3 = 68921$;
$59^3 = 205379$; $66^3 = 287496$; $69^3 = 328509$; $73^3 = 389017$
$75^3 = 421875$; $76^3 = 438976$; $81^3 = 592704$; $88^3 = 681472$
$93^3 = 804357$; $97^3 = 912673$; $135^3 = 2460375$;
$145^3 = 3048625$; $203^3 = 8365427$; $289^3 = 2413769$
$297^3 = 26198073$; $302^3 = 27543608$; $311^3 = 32461759$.

Din tabelul dat de D-l V. THÉBAULT în suplimentul citat, se pot extrage cu uşurinţă bipatratele scrise cu cifre diferite între ele.

COL. GH. BUICLIU.

28. *O extindere a exerciţiului 22.* In exerciţiul 22 de la pag. 283, Vol. XL, *Gazeta Matematică* se arată că ecuaţia

$$10a^2 - b^2 = 2$$

nu are soluţiuni în numere întregi. Aceasta se poate demonstra şi observând că pentru ca diferenţa $10a^2 - b^2$ să se termine cu 2, trebue ca b^2 să se termine cu 8. Pe această cale se poate demonstra că ecuaţiunea

$$10a^2 - b^2 = c$$

nu are soluţiuni întregi când numărul c se termină cu una din cifrele 2, 3, 7 sau 8.

GH. BUICLIU.

29. *Demonstraţie stereometrică a teoremei lui* PASCAL.

Plecăm de la această definiţie a conicei reale : secţiunea plană într'un iperboloid cu o pânză.

Fie 1, 2, 3 ; 1′, 2′, 3′ două grupe de câte trei puncte ale secţiunei prin planul P în iperboloidul cu o pânză H. Insemnăm cu I, II, III ; I′, II′, III′ respectiv generatoarele rectilinii de prima şi a doua speţă ce trec prin punctele de mai sus.

E clar că punctele de sprijin

I I′ , II II′ , III III′

ale generatoarelor cu aceste nume nu sunt colineare. Altfel, dreapta pe care ar fi aşezate, conţinută evident de iperboloid, ar coincide

cu generatoarele *diferite* I, II, III sau I′, II′, III′. Deci cele trei puncte de sprijin definesc un anume plan Π, care nu se confundă cu P.

Pe de altă parte planele definite de generatoarele II, III′ şi III, II′ tae planul P după dreptele

23′ 32′.

Deci punctul de intersecţie al acestora se găseşte pe dreapta de tăiere a celor două plane, care e evident aceeaşi cu dreapta întinsă de punctele II II′ şi III III′.

Altfel spus, intersecţia dreptelor 23′, 32′ se găseşte pe dreapta de tăiere a planelor P, Π. Aceeaşi observaţie pentru intersecţia dreptelor analoage 31′, 13′ şi 12′, 21′. Avem aşa dar situaţia proiectivă bine cunoscută din exagrama lui PASCAL.

D. B.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XL. No. 11. Noemvrie 1934. New-York. Adunarea de vară dela Williomstown, de J. R. KLINE. STONE despre spaţiul lui HILBERT, de E. HILLE. Ediţia *Principia* lui NEWTON de către CAJORI, de D. E. SMITH. TARDI despre geodesie, de W. D. LAMBERT.

Idem. No. 12. Decemvrie 1934. O proprietate aritmetică a şirurilor recurente de al doilea ordin, de M. WARD. Construcţia unui sistem triad de 31 elemente, de H. S. WITE. Despre enumerarea cuburilor magice, de D. N. LEHMER. Extensiunea rangului funcţiunilor, de E. J. MC SHANE. Matricele principale ale unei matrice RIEMANN, de A. A. ALBERT. Serii de subgrupuri transfinite, de G. BIRKHOFF. Locul spaţiilor $-m$ unind punctele corespunzătoare a $(m+1)$ puncte a spaţiilor $-n$ în relaţiune proective din spaţiul $-r$, de B. C. WONG. O notă asupra unităţilor în câmpurile superciclice, de H. S. VANDIVER. O problemă de aranjamente, de M. H. MARTIN. Criterii pentru ireductibilitatea polinomialelor, de L. WEISNER. O expresiune a restului în formula de cuadratură a lui GAUSS, de J. V. USPENSKY. Despre teoria reziduurilor funcţiunilor poligenice, de V. C. POOR. Notă asupra numerelor lui MERSENNE, de R. E. POWERS. Clasa numeriler maxime asociate cu unele ecuaţiuni simetrice în n reciproce, de N. STELFORD & H. A. SIMMON. Funcţiuni implicite de mai multe funcţiuni periodice, de R. H. CAMERON. Asupra unei leme a lui FEJÉR, de LINCOLN LA PAZ. O aproximaţiune a unei funcţiuni analitice prin polinomiale, de O. J. FARRELL. Notă asupra unui tip simplu de algebră în care legea anulării adunării nu are loc, de H. S. VANDIVER.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXVIII. No. 1. Iulie 1934. Buenos Aires. Clădirea societăţii ştiinţifice din Argentina: Memoriu asupra construcţiunii ei, de G. BUONTEMPO & C. E. GÉNEAU. Inaugurarea noului edificiu social, de C. E. G. Opera Societăţii Ştiinţifice Argentine, de Ing. N. B. MORENO.

Boletin Matematico. Anul VII. No. 8. Octomvrie 1934. Buenos Aires. Teorema lui ROLLE pentru funcţiuni de mai multe variabile, de B. I. BAIDAFF.

Observaţiuni asupra calculului lui $\sqrt[mk]{a}$, de P. SERGESCU.

Journal de Mathématiques Elémentaire publié par H. VUIBERT. Anul 59. No. 9. Februarie 1935. Paris.

The Mathematical Gazete. Vol. XIX. No. 232. Februarie 1935. Londra. Asociaţiunea matematică. Adunarea anuală. Noi membri onorari. (BOREL, HADAMARD, HARDY, SMITH, WHITTAKER). „The Food of the Gods" (expresiune cu care unii botează matematica), de E. H. NEVILLE. Unele aspecte în desvoltarea metodelor statistice moderne, de J. O. IRWIN. Ecuaţia lui LAGRANGE, de R. J. A. BARNARD. Extensiunea dată de HAMILTON teoremei lui FEUERBACH, de N. M. GIBBINS. Coeficienţii seriilor pentru tang$x$, de E. F. SIMONDS.

Ştiinţă şi Progres. Anul I. No. 9. Februarie 1935. Târgul Mureş. Proprietăţile cercului celor 9 puncte (al lui EULER) şi ale dreptei lui SIMSON, de N. ABRAMESCU.

R. ESTÈVE & H. MITAULT. *Cours de géométrie* à l'usage des classes de seconde, première et mathématique de l'enseignement secondaire. Tome I. Géométrie plane. (Classe de seconde. Paris 1935.

Acest tratat este croit după ideile noi de a se face cât mai puţin apel la lumea fizică, fără a fi o geometrie abstractă. Se pun în evidenţă postulatele; se face uz de vectori şi se definesc translaţia şi rotaţia ca corespondenţe de puncte. Se evită demonstraţiile prin suprapunere şi răsturnare. Figurilor inverse li s'au dat definiţiuni strict plane. Geometria e împărţită în două părţi: *lineară* când nu se cere o unitate de măsură pentru toate direcţiunile şi *metrică* în cazul contrariu. Construcţiile geometrice sunt lăsate la urmă. Volumul se termină cu Geometria vectorială şi cu noţiuni de Trigonometrie. După expunerea geometriei sunt date 331 exerciţii variate şi interesante.

Cartea conţine următoarele Capitole: I. Geometria dreptei; II. Geometria lineară a planului, transpunere, translaţie. şi homotetie; III. Arilie din punct de vedere linear; IV. Deplasări şi simetrie; V. Aplicaţiunile deplasărilor şi simetriei; VI. Cercul; Asemănarea şi relaţiuni metrice; VIII. Ariile din punct de vedere metric; IX. Construcţiile; X. Noţluni de geometrie vectorială plană; XI. Noţiuni de trigonometrie. Urmează 43 pagini de exerciţii. La diferitele chestiuni tratate sunt date exerciţii în afară de cele dela finele cărţii, şi anume în număr de 279.

E un tratat interesant şi din care profesorii şi elevii pot extrage chestiuni şi aplicaţiuni pentru studiul geometriei plane.

I. I.

IOAN T. ANDREIAN. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. *Cercetări. Consideraţiuni geometrice, consecinţe algebrice.* Iaşi 1934.

G. T. GHEORGHIU. *Sur les fonctions méthasphériques.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Science*). Paris 1934.

G. T. GHEORGHIU. *Sur un cas spécial des fonctions métasphériques.* (Extras din *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*). Roma 1934.

M. GHERMANESCO. *Sur les moyennes successives des fonctions* (Extras din *Bulletin de la Société Mathématique de France*). Paris 1934.

ILIE I. POPA. *Contribution à la Géométrie centro-afine différentielle.* Teză de Doctorat. Iaşi 1934.

Gazeta Matematică. *Supliment cu exerciţii.* Anul I. No. 5. Februarie 1935.

V. VÂLCOVICI. Conferinţe ţinute la postul de Radiodifuziune din Bucureşti. Bucureşti.

CERERI

245. Ce se ştie de profesorul de matematici BAGARRE (scris uneori BAGAR, alte ori BAGARD) care a profesat la Pensionul dela Miroslava de lângă Iaşi pe la 1831 ?

I. I.

DIVERSE

Secţiunea Matematică a Societăţii Române de Ştiinţe a ţinut şedinţă Luni 4 Februarie orele 21. Au vorbit D-nii: M. GHERMĂNESCU despre *«Combinări excepţionale omogene de funcţiuni»* şi R. WOINAROSKY despre *«Cinematica solidului în spaţiul euclidian»* cu **n** dimensiuni.

In şedinţa de Luni 18 Februarie, a vorbit D-l D. BARBILIAN despre *«Câteva geometrii ale triunghiurilor»*.

Urmând sugestiile D-lui Prof. G. ŢIŢEICA, Secţiunea Matematică ţine lunar o şedinţă de comunicări libere cu caracter elementar, adresate studenţilor mai înaintaţi cu interes pentru matematici.

Prima şedinţă a avut loc Joi 28 Februarie, la orele 17^{15}. Au comunicat: D-l D. CÂRSTOIU: *«O proprietate a conicelor»*.

D-l M. GHERMĂNESCU : *«Despre numărul maxim de rădăcini reale ale ecuației :*

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_x x^n = 0$$

unde un număr de coeficienți satisfac o relație de recurență.

D-l D. BARBILIAN : *«Interpretarea proprietății fundamentale a focarelor imaginare ale unei elipse, în real.*

Sporirea Bibliotecei

Corespondența lui TRAIAN LALESCU cu D-l N. ABRAMESCU, privitoare la publicarea unei Geometrii a Triunghiului. (Cinci scrisori și șase cărți poștale).

Donată de D-l N. ABRAMESCU.

E. BACALOGLO. Elemente de algebră. Pentru usul scolelor secundare. București 1870.

Donată de D-l CRIST N. IONESCU.

E. HERBERT. Comptabilité des travaux publics et tenue des bureaux des services des ponts et chaussées. Paris 1898.

Donată de D-l CRIST N. IONESCU.

G. RITT. Nouvelle arithmétique des écoles primaires. Paris 1858.

Donată de D-l Inginer I. IONESCU.

Portretele foștilor membrii ai Redacției *Gazeta Matematică :* OCTAV ALEXANDRINI, VASILE CRISTESCU, EMANOIL DAVIDESCU și ȘTEFAN N. MIREA.

Donate de D-l Inginer I. IONESCU.

JEAN BECQUEREL. Exposé élémentaire de la théorie d'Einstein Payot & C-ie. Paris 1922.

Donată de D-l Inginer C. SFINȚESCU.

C. SFINȚESCU. Edilitate.

Donată de D-l Inginer C. SFINȚESCU.

Exposition Universelle et Internationale de San Francisco. La Science française. (2 vol.) Librairie Larousse Paris. 1915.

Donată de D-l Inginer C. SFINȚESCU.

C. S. GRAF. Sammlung von Festigkeitsaufgaben aus dem Maschinenbau. Verlag von Moritz Perles. Wien. 1911.

Donată de D-l Inginer C. SFINȚESCU.

J. ROSINTAL. Pendentifs. Trompes et stalactites dans l'architecture orientale. Librairie Orientaliste Paul Geuthner. Paris 1928.

Donată de D-l Inginer C. SFINȚESCU.

Buletinul Societății Studenților în Matematice. Număr inaugural. București 1925. (litografiat).

Donat de D-l N. CIORĂNESCU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1386. *Se dă un cerc* C *în interiorul unui unghiu* XOY. *Să se ducă o tangentă, aşa ca punctul ei de contact să fie mijlocul segmentului din tangentă limitat de laturile unghiului dat. Ce devine construcţia, dacă* C *este tangent la una din laturile unghiului.*

I. S. TEODORESCU.

PROBLEMA 2889. *Se dă un cerc* C, *aşezat în interiorul unghiului* AOB. *Să se construiască o iperbolă tangentă la cercul* C *şi având asimptote laturile unghiului* AOB.

N. ABRAMESCU.

A doua problemă a fost propusă pentru a da indicaţii de rezolvare pentru întâia, la cari nu s'a primit nici o soluţie bună până acum.

Luând ca axe de coordonate bisectoarele unghiului dreptelor date OA şi OB, ecuaţia lor este $y^2 = k^2x^2$, iar a cercului $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, cu condiţiile

(1) $\frac{b}{a} < k$, care exprimă că centrul C (a, b) este interior unghiului, şi, presupunând, ceeace nu micşorează generalitatea, $a > 0$, $b > 0$, mai avem

(2) $\frac{Ka - b}{\sqrt{1 + k^2}} \geqslant r$, care exprimă că distanţa lui C la OA este mai mare sau cel puţin egală cu raza r a cercului. Mai trebue observat că avem şi $r < a$.

Insemnând cu α unghiul unei raze CM a cercului cu axa Ox, coordonatele punctului M ale cercului sunt

$$M\ (a + r\cos\alpha\ ,\ b + r\sin\alpha).$$

Tangenta la cerc în M fiind perpendiculară pe CM, are cosinusurile directoare egale cu $\sin\alpha$ şi $-\cos\alpha$. Un punct P al acestei tangente, definită prin punctul M şi cosinusurile directoare $\sin\alpha$ şi $-\cos\alpha$, are coordonate de forma

(3) $x = (a + r\cos\alpha) + \rho\sin\alpha,$

$$y = (b + r\sin\alpha) - \rho\cos\alpha\ ,\ \rho = MP.$$

Valorile lui ρ corespunzătoare punctelor P şi P' de intersecţie ale tangentei în M la cerc cu dreptele OA şi OB, sunt date de ecuaţia $y^2 = k^2x^2$, unde înlocuim pe x şi y cu valorile (3), şi obţinem

$$(b + r\sin\varkappa - \rho\cos\varkappa)^2 - k^2(a + r\cos\varkappa + \rho\sin\varkappa)^2 = 0.$$

M este mijlocul segmentului PP', când suma rădăcinilor ρ ale acestei ecuaţii este zero, adică

$$(4) \qquad (b + r\sin\varkappa)\cos\varkappa + k^2(a + r\cos\varkappa)\sin\varkappa = 0.$$

Aceasta este ecuaţia ce dă valorile lui $\varkappa$ corespunzătoare punctelor M căutate. Punând $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varkappa = u$, ecuaţia (4) devine

$$bu^4 - 2[ak^2 - r(1 + k^2)]u^3 - 2[ak^2 + r(1 + k^2)]u - b = 0,$$

sau

$$(5) \qquad f(u) \equiv u^4 - (p - q)u^3 - (p + q)u - 1 = 0,$$

$$p = \frac{2ak^2}{b}, \quad q = \frac{2r(1 + k^2)}{b}.$$

Pentru a discuta această ecuaţie, să construim, în raport cu două axe perpendiculare Ou, Ov, curbele (C) şi (C_1), ale căror ecuaţii sunt

$$v = u^4 - (p + q)u - 1, \quad v = (p - q)u^3.$$

Prima porneşte dela $+\infty$, se coboară subt axa Ou, până la minimul

$$v_1 = -\sqrt[3]{\frac{p+q}{4}}\left(3\frac{p+q}{4} + 1\right),$$

ce corespunde lui

$$u = \sqrt[3]{\frac{p+q}{4}},$$

apoi se urcă la $+\infty$, având ramuri infinite parabolice. Deci curba tae axa Ou în două puncte Q' şi Q, odată la stânga lui O, a doua oară la dreapta lui O.

A doua curbă $v = (p - q)u^3$ are în originea O un punct de inflexiune şi are două forme, după cum $p > q$ sau $p < q$. In cazul $p > q$, porneşte dela $-\infty$ se urcă până în origine, tangentă la Ou, unde are un punct de inflexiune, apoi se urcă până la $+\infty$. Când $p < q$, curba respectivă porneşte dela $+\infty$, se coboară până în

origine unde are un punct de inflexiune cu tangenta Ou, apoi se coboară până la $-\infty$.

Oricum ar fi p şi q, se vede că aceste curbe (C) şi (C_1) se tae în două puncte, unul la stânga lui O, altul la dreapta lui O. Deci ecuaţia $f(u)=0$ are două rădăcini, una negativă, alta pozitivă. In cazul $p>q$, rădăcina pozitivă a ecuaţiei $f(u)=0$ este mai mare ca abscisa lui Q, iar rădăcina negativă între O şi abscisa lui Q'.

Pentru a vedea cum sunt aranjate rădăcinile, să facem şirul

$$f(-\infty)>0\ ,\ f(-1)=-2q<0\ ,\ f(0)=-1<0,$$
$$f(1)=-2p<0\quad f(\infty)>0.$$

Deci rădăcina negativă este mai mică decât — 1, iar cea pozitivă mai mare ca 1. Astfel că $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=u$ fiind odată mai mare ca 1, şi altă dată mai mică decât — 1, urmează că

$$\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha'}{2}<\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}<\alpha'<\pi,$$

iar cealaltă valoare $\quad\dfrac{3\pi}{2}<\alpha''<2\pi.$

Deci sunt două puncte M' şi M", unde tangenta la cercul C are punctul de contact mijlocul segmentului din tangentă mărginit la dreptele OA şi OB. Sunt două iperbole având ca asimptote pe OA şi OB şi care să fie tangente la cercul C, una în M' şi a doua în M".

Notă. Vom publica cu plăcere preciziunile ce le vor găsi corespondenţii la această problemă.

PROBLEMA 2671. *Să se rezolve ecuaţia :*

$$F(a+x+b)-F(a+x-b)$$
$$-F(a-x+b)+F(a-x-b)=0,$$

unde :

$$F(\alpha)=a_1\sin\alpha+b_1\cos\alpha+a_2\sin2\alpha$$
$$+b_2\cos2\alpha+a_3\sin3\alpha+b_3\cos3\alpha.$$

V. ALACI.

Observăm că :

$$F(\alpha) = \sum_{k=1}^{3} (a_k \sin k\alpha + b_k \cos k\alpha),$$

şi deci ecuaţia din enunţ se poate scrie :

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{3} a_k [\sin k(a+x+b) - \sin k(a+x-b) - \sin k(a-x+b) + \sin k(a-x-b)] + \sum_{k=1}^{3} b_k [\cos k(a+x+b) - \cos k(a+x-b) - \cos k(a-x+b) + \cos k(a-x-b)] = 0.$$

Observând că :

$$\sin k(a+x+b) - \sin k(a+x-b) - [\sin k(a-x+b) - \sin k(a-x-b)] = 2\sin kb \cos k(a+x) - 2\sin kb \cos k(a-x) = 2\sin kb [\cos k(a+x) - \cos k(a-x)] = -4\sin kb \sin ka \sin kx$$

$$-\cos k(a+x+b) - \cos k(a+x-b) - [\cos k(a-x+b) - \cos k(a-x-b)] = -2\sin k(a+x)\sin kb + 2\sin k(a-x)\sin kb = -2\sin kb [\sin k(a+x) - \sin k(a-x)] = -4\sin kb \cos ka \sin kx,$$

ecuaţia (1) devine :

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{3} \sin kb (a_k \sin ka + b_k \cos ka) \sin kx = 0.$$

Notând pentru prescurtare :

$$\sin kb (a_k \sin ka + b_k \cos ka) = A_k,$$

ecuaţia (3) devine :

$$\sum_{k=1}^{3} A_k \sin kx = 0,$$

sau :

$$(3) \quad A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + A_3 \sin 3x = 0.$$

Cum :

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x\,,\ \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = -\sin x\,(1 - 4\cos^2 x),$$

ecuația (3) devine :

$$\sin x\,(A_1 + 2A_2\cos x - A_3 + 4A_3\cos^2 x) = 0.$$

De aci deducem :

$$\sin x = 0\ ,\quad \text{deci : } x = k\pi\ ,\quad (k = 0\ ,\ \pm 1\ ,\ \pm 2\ ,\ \ldots),$$

și :

$$4A_3\cos^2 x + 2A_2\cos x + A_1 - A_3 = 0,$$

care ne dă :

$$(4)\qquad \cos x = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3 + 4A_3^2}}{4A_3},$$

care nu ne poate da soluții, decât în cazul când numerile $A_1\,,\ A_2\,,\ A_3$, satisfac simultan inegalitățile :

$$-1 < \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3 + 4A_3^2}}{4A_3} < 1,$$

în care caz se pot afla toate arcele care satisfac ecuația (4).

Rădăcinele ecuației date sunt :

$$x = k\pi\ ,\quad (k = 0\ ,\ \pm 1\ ,\ \pm 2\ ,\ \ldots)$$

precum și acelea care pot fi date de (4).

Soluții date de D-nii : BERCOVICI MARTIN (Bârlad), BREZUICA ISTINIE (lic. Caracal), CĂLIN M. GH. (lic. Caracal), FLORESCU M. ULPIU (lic. Carol, Craiova), GHEORGHIU TH. GHEORGHE (lic. Galați), GRIGORESCU EMIL (Buzău), MAVRODIN D. DIMITRIE (lic. Eminescu, București), NICOLAU H. C., PANȚU Z. ION, POPESCU D. GH. (lic. Internat, Iași) și VASILIU C. ION (Șc. Polit., București).

V. A.

PROBLEMA 2986. *Să se calculeze unghiurile unui triunghiu dreptunghic între laturile căruia există relația :*

$$128\,\Sigma\,[(b^6 + c^6)^2 - a^{12}] = a^{12}\,(347 + 78\sqrt{2})$$

V. ALACI.

Observăm că avem:

$$\Sigma\,[(b^6+c^6)^2-a^{12}]=$$

$$=b^{12}+c^{12}+a^{12}+2b^6c^6+2c^6a^6+2a^6b^6=(a^6+b^6+c^6)^2,$$

$$347+78\sqrt{2}=(3+13\sqrt{2})^2,$$

astfel că relația dată devine

$$128\,(a^6+b^6+c^6)^2=a^{12}\,(3+13\sqrt{2})^2.$$

Extrăgând rădăcina patrată din ambii membrii, avem:

$$8\sqrt{2}\,(a^6+b^6+c^6)=\pm\,a^6\,(3+13\sqrt{2})$$

cum $a,\ b,\ c$ au valori positive, în membrul al 2-lea nu putem lua de cât semnul $+$, deci deducem:

$$(1)\qquad a^6+b^6+c^6=\frac{a^6\,(3+13\sqrt{2})}{8\sqrt{2}}\ .$$

Dar într'un triunghiu dreptunghic, avem:

$$b=a\ \sin B\quad,\quad c=a\ \cos B$$

și relația (1) devine după ce simplificăm cu a^6:

$$(2)\qquad 1+\sin^6B+\cos^6B=\frac{3+13\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}\ .$$

Avem însă:

$$\sin^6B+\cos^6B=(\sin^2B+\cos^2B)^3-2\sin^2B\ \cos^2B\ (\sin^2B+\cos^2B)$$

$$=1-\frac{3}{4}\ \sin^2 2B=1-\frac{3\,(1-\cos 4B)}{8}=\frac{5+3\cos 4B}{8}\ .$$

In virtutea acestei identități, relația (2) devine:

$$1+\frac{5+3\cos 4B}{8}=\frac{3+13\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}\ .$$

De aci deducem cu ușurință:

$$\cos 4B=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,$$

deci:

$$4B=45^0+2k\pi\qquad(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Cum $\sphericalangle B < 90^0$, rezultă pentru B numai valoarea:

$$B = 11^0,\ 15'\ \text{atunci}\ \ C = 78^0,\ 45'.$$

Problema este astfel rezolvată.

Soluții date de D-nii: BERDAN C. (Bârlad), CIORĂNESCU I. C-TIN (lic. Mănăstirea Dealu), GEORGESCU E. C-TIN (lic. Cantemir, București), GEORGESCU ER. FLORICA (lic. Cantemir, București), IONESCU I. PAUL (lic. Mănăstirea Dealu), ȘTEFĂNESCU EMIL (lic. Spiru-Haret, București) și VASILIU ION (lic. Mănăstirea Dealu).

V. A.

PROBLEMA 4108. *Să se rezolve ecuația*

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sec x} + \frac{1}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

C. V. COSTĂCHESCU.

Soluția I-a redijată după soluția primită de la D-l I. LENCO.

Transformând toate liniile trigonometrice în funcție de tangentă, obținem ecuația

$$\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} + \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

care ridicată la pătrat și găsind numitorul comun $\operatorname{tg} x$, pe care îl considerăm așa dar diferit de zero, rezultă după o nouă ridicare la pătrat ecuația

$$4\operatorname{tg}^5 x + 9\operatorname{tg}^4 x + 10\operatorname{tg}^3 x + 9\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x = 0.$$

Impărțind cu $\operatorname{tg} x \neq 0$, și înlocuind $\operatorname{tg} x$ prin y se obține ecuația reciprocă

$$4y^4 + 9y^3 + 10y^2 + 9y + 4 = 0,$$

care rezolvată ne dă

$$y_{1,2} = -1 \quad \text{și} \quad y_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-63}}{8} \quad \text{(imaginare)}.$$

Se obține așa dar numai

$$\operatorname{tg} x = -1$$

care ne dă

$$x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

excluzând $\operatorname{tg} x = 0$ care ar face ambii membri infiniți.

Soluția II-a dată de D-nii: CEZAR IVĂNESCU, D. MAVRODIN, M. MARGULIUS, N. A. ACIKGHEOZIAN, V. F. CEAUȘESCU, D. S. DOGARU, S. EFSTATE, S.-LT. E. MILEA, ȘT. E. OLTEANU, EM. PĂNOIU, N. PATRAULEA, I. C. PAREPEANU, M. I. POPESCU-STĂNEȘTI, TRIFOI CHIRIAC, PETRE M. VARLAM.

Ecuația dată se poate scrie

$$\frac{\cos x + \sin x + \cos^2 x \sin x + \sin^2 x \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}.$$

Eliminând numitorul comun $\sin x \cos x$ (deci $\sin x \cos x \neq 0$) se obține ecuația

$$2(\sin x + \cos x) - (\sin^3 x + \cos^3 x) = \sin^2 x - \cos^2 x$$

care se desface în

(1) $\sin x + \cos x = 0$ și (2) $2 - (\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = \sin x - \cos x.$

Prima ne dă sau

$\sin x = -\cos x$ sau prin ridicare la patrat $\sin 2x = -1$,

fiecare conducând la

$$x = (4k + 3)\frac{\pi}{4} = k\pi - \frac{\pi}{4}.$$

Cea de a doua se poate scrie

$1 + \sin x \cos x = \sin x - \cos x$

care prin indicare la patrat și făcând reducerile devine

$$\sin^2 x \cos^2 x + 4 \sin x \cos x = 0$$

care dă

(3) $\sin x \cos x = 0$ și $\sin x \cos x + 4 = 0.$ (4)

Ecuația (3) dă $x = k\frac{\pi}{2}$ iar ecuația (4) dă rădicini imaginare.

Soluția $x = k\frac{\pi}{2}$, o excludem însă dând valori infinite ambelor părți.

Notă. S'au primit alte soluții de la D-șoarele ADRIANA ABRAMESCU, DORINA FABIUS, precum și de la D-nii: M. MĂNESCU, I. C. SAVIN, I. C. ȘOVA, G. ȘT. ROȘCA și I. CURCHI.

COL. G. I. LIT.

PROBLEMA 4200. *Să se calculeze cu o eroare mai mică decât o secundă de arc unghiurile unui triunghiu, știind că mediana ce pleacă din un vârf și bisectoarea ce pleacă din alt vârf, tae laturile corespunzătoare sub unghiuri egale cu ale vârfurilor respective.*

N. C.

Soluție dată de D-l PANAIT C. MAZILU (stud. Șc. Polit. Buc.).

Fie un triunghiu ABC și $\overline{AA_1}$ mediana vârfului A și BB_1 bisectoarea interioară a unghiului B. Cum fiecare din aceste drepte face câte două unghiuri cu laturile respectiv opuse, vom avea de considerat 4 cazuri:

Cazul I. $\sphericalangle AA_1C = \sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle BB_1C = \sphericalangle ABC$.

Triunghiurile asemenea BB_1C și ABC ne dau:

$$\sphericalangle CBB_1 = \sphericalangle BAC,$$

iar triunghiurile asemenea AA_1C și ABC ne dau:

$$\sphericalangle CAA_1 = \sphericalangle ABC$$

deci:

$$\sphericalangle ABC < \sphericalangle BAC.$$

Dar am văzut că:

$$\sphericalangle ABC = 2 \sphericalangle BAC.$$

Cum aceste relații sunt incompatibile, acest caz nu admite soluție.

Cazul II. $\sphericalangle AA_1B = \sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle BB_1A = \sphericalangle ABC$.

(Notăm $\sphericalangle ABC = B$ și $\sphericalangle BAC = A$).

Triunghiurile asemenea BB_1A și ABC ne dau:

$$\sphericalangle B_1BA = C$$

deci:

$$B = 2C.$$

Triunghiurile asemenea AA_1B și BAC dau:

$$\frac{A_1B}{AB} = \frac{AB}{BC}.$$

Dar:

$$BC = 2A_1B.$$

Deci :

$$\overline{AB} = \overline{A_1B}\sqrt{2}.$$

Considerând tr. AA_1B putem scrie:

$$\frac{A_1B}{\sin C} = \frac{AB}{\sin A} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{\sin C} = \frac{\sqrt{2}}{\sin A}.$$

Dar din:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \text{ și } B = 2C$$

deducem

$$A = 180^0 - 3C.$$

Deci:

$$\sin A = \sin 3C.$$

Deci avem:

$$\sin 3C = \sqrt{2}\ \sin C.$$

Cum avem:

$$\sin 3C = 3\sin C - 4\sin^3 C$$

deducem prin simplificare (căci $0 < C < 60^0$):

$$3 - 4\sin^2 C = \sqrt{2} \quad \text{sau} \quad \sin^2 C = \tfrac{1}{4}(3 - \sqrt{2})$$

sau:

$$\boxed{\sin C = \tfrac{1}{2}\sqrt{3 - \sqrt{2}}},$$

de unde deducem:

$$C = 39^0 1' 36''$$

apoi:

$$B = 2 \sphericalangle c = 78^0 3' 12'' \text{ și } A = 62^0 55' 12''.$$

Cazul III. $\sphericalangle AA_1B = A$ și $\sphericalangle BB_1C = B$.
Tr. asemenea ABC și BB_1C dau:

$$A = \sphericalangle CBB_1 \text{ deci } B = 2A.$$

Tr. asemenea AA_1B și ABC dau iarăși $\overline{AB} = \overline{A_1B}\sqrt{2}$.
In triunghiul AA_1B putem scri:

$$\frac{A_1B}{\sin C} = \frac{AB}{\sin A} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{\sin C} = \frac{\sqrt{2}}{\sin A}.$$

Cum însă

$$A+B+C=180^0 \text{ sau } 3A+C=180^0$$

avem:

$$\sin C=\sin 3A \quad (0<A<60^0).$$

Deci:

$$\sin A=\sin 3A.\sqrt{2} \qquad \text{sau} \qquad \sin A=\sqrt{2}\,(3\sin A-4\sin^3 A)$$

sau:

$$1=\sqrt{2}\,(3-4\sin^2 A) \quad \text{sau} \quad \sin^2 A=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{8}$$

sau:

$$\boxed{\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{3-\frac{\sqrt{2}}{2}}},$$

care dă:

$A=49^0 12'44''$, apoi $B=2\sphericalangle A=98^0 25'28''$ şi $C=32^0 21'48''$.

Cazul IV. $\sphericalangle AA_1C=A$ şi $\sphericalangle BB_1A=B$.

Tr. asemenea ABC şi BB_1A ne dau $\sphericalangle B_1BA=C$, deci $B=2C$.

Tr. asemenea ABC şi AA_1C ne dau:

$$\sphericalangle A_1AC=B \quad \text{şi} \quad AC=A_1C\sqrt{2}.$$

In tr. AA_1C se poate scri:

$$\frac{A_1C}{\sin B}=\frac{AC}{\sin A} \qquad \text{sau} \qquad \frac{1}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}}{\sin A}.$$

Dar:

$$A+B+C=180^0 \quad \text{sau} \quad A+3C=180^0$$

deci:

$$\sin A=\sin 3C \quad \text{şi de mai sus:} \quad \sin B=\sin 2C.$$

Deci:

$$\sin 3C=\sqrt{2}\,\sin 2C$$

sau:

$$3\sin C-4\sin^3 C=2\sqrt{2}\sin C\cos C$$

sau:

$$3-4\sin^2 C=2\sqrt{2}\,\cos C \quad \text{sau} \quad -1+4\cos^2 C=2\sqrt{2}\,\cos C$$

sau:

$$4\cos^2 C-2\sqrt{2}\,\cos C-1=0.$$

Cum rădăcina negativă nu convine (ar da $\sphericalangle C > 90^0$) vom avea:

$$\cos C = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},$$

care este tocmai apotema dodecagonului regulat, deci:

$$C = 15^0 \text{ apoi } B = 30^0 \text{ și } A = 135^0.$$

Problema admite deci trei soluții în cazul *bisectoarei interioare:*

I. $\hat{A} = 62^0\,55'\,12''$: $\hat{B} = 78^0\,3'\,12''$: $\hat{C} = 39^0\,1'\,36''$.

II. $\hat{A} = 49^0\,12'\,44''$: $\hat{B} = 98^0\,25'\,28''$: $\hat{C} = 32'\,21'\,48''$.

III. $\hat{A} = 135^0$: $\hat{B} = 30^0$: $\hat{C} = 15^0$.

Să considerăm acum mediana AA_1 și *bisectoarea exterioară* BB_2 a unghiului B. Punctul B_2 poate să fie de partea lui A sau lui C. Să considerăm întâi cazurile când B_2 se găsește pe partea punctului A.

Cazul I. $\sphericalangle AB_1B = B$ și $\sphericalangle AA_1B = A$.

Tr. asemenea AA_1B și ABC ne dau:

$$\overline{AB} = \overline{A_1B}\sqrt{2}.$$

Tr. asemenea ABC și BB_1C ne dau:

$$A = \sphericalangle CBB_1 = \frac{B}{2} + \frac{\pi}{2}$$

deci:

$$B = \sphericalangle 2A - 180^0 \quad \text{din} \quad A + B + C = 180^0$$

deducem deci:

$$3A + C = 360^0 \quad \text{și deci} \quad \sin 3A = -\sin C.$$

In tr. AA_1B avem:

$$\frac{A_1B}{\sin C} = \frac{AB}{\sin A} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{-\sin 3A} = \frac{\sqrt{2}}{\sin A}$$

sau:

$$\sin A + \sqrt{2}\,(3\sin A - 4\sin^3 A) = 0$$

sau:

$$1 + \sqrt{2}\,(3 - 4\sin^2 A) = 0 \quad \text{sau} \quad \sin A = \tfrac{1}{2}\sqrt{3 + \frac{\sqrt{2}}{2}}\,.$$

Convine soluția $A > 90^0$ căci se vede de mai sus că aceasta e o condiție.

Găsim :

$A = 105^0\,42'\,15''$ apoi $B = 31^0\,24^0\,30''$ și $C = 42^0\,53'\,15''$.

Cazul II. $\sphericalangle AB_1B = B$ și $\sphericalangle AA_1C = A$.

Tr. asemenea ABC și AA_1C ne dau:

$$AC = A_1C\sqrt{2}.$$

Ca și în cazul precedent avem:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle \frac{B}{2} + 90^0 \quad \text{sau} \quad \sphericalangle B = 2\hat{A} - 180^0$$

și deci:

$$\sin B = -\sin 2A.$$

In triunghiul AA_1C avem:

$$\frac{A_1C}{\sin B} = \frac{AC}{\sin A} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{-\sin 2A} = \frac{\sqrt{2}}{\sin B} \quad \text{sau} \quad \cos A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Găsim:

$A = 110^0\,42'\,16''$, $B = 41^0\,24'\,32''$ și $C = 27^0\,53'\,12''$.

Cazurile în care $B = \sphericalangle BB_2D$ nu pot conveni, căci $\sphericalangle BB_1D$ fiind exterior triunghiului $AB B_1$ am avea:

$$B = \pi - A + \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} \quad \text{sau} \quad 3B + 2A = 3\pi \quad \text{sau} \quad 2A = 3\pi - 3B.$$

Trebue apoi $A + B + C = \pi$ sau $2A + 2B + 2C = 2\pi$

sau $3\pi - 3B + 2B + 2C = 2\pi$ sau $2C = B - \pi$

ori cum trebuie ca $B < \pi$ ar rezulta pentru C valori negative.

Fie acum B_2 *de aceeași parte cu* C *și anume cazul:*

$$\sphericalangle A = \overset{\frown}{AA_1C} \quad \text{și} \quad \hat{B} = \overset{\frown}{BB_2C}$$

vom avea ca și mai sus:

$$AC = A_1C\sqrt{2}$$

iar tr. $\overset{\frown}{ABC}$ și $\overset{\frown}{ABB^2}$ dau:

$$\hat{C} = \frac{\pi}{2} + \frac{\hat{B}}{2} \quad \text{sau} \quad \hat{B} = 2\hat{C} - \pi$$

deci:

$$\sin\hat{B} = -\sin 2C \quad \text{din} \quad A + B + C = \pi$$

deducem:

$\hat{A} + 2\hat{C} - \pi + C = \pi$ sau $A = 2\pi - 3C$ deci $\sin A = -\sin 3C$.

Cum avem:

$$\frac{AC}{\sin A} = \frac{A_1C}{\sin B} \quad \text{deducem} \quad \frac{\sqrt{2}}{-\sin 3C} = \frac{1}{-\sin 2B}$$

sau:

$$4\cos^2 C - 2\sqrt{2}\cos C - 1 = 0$$

convine rădăcina negativă $\left(C > \frac{\pi}{2}\right)$.

Deci:

$$\cos C = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

Deci:

$$\hat{C} = 105^0 \quad : \quad \hat{B} = 30^0 \quad : \quad \hat{A} = 45^0.$$

Se vede uşor că celelalte trei cazuri nu convin. Deci avem trei soluţii în cazul bisectoarei exterioare:

I. $\hat{A} = 105^0\,42'\,15''$: $\hat{B} = 31^0\,24'\,30''$: $\hat{C} = 42^0\,53'\,15''$.

II. $\hat{A} = 110^0\,42'\,16''$: $\hat{B} = 41^0\,24'\,32''$: $\hat{C} = 27^0\,53'\,12''$.

III. $\hat{A} = 45^0$: $\hat{B} = 30^0$: $\hat{C} = 105^0$.

Avem deci în total şase soluţiuni.

Au considerat numai cazul bisectoarei interioare şi numai cazurile indicate, D-nii: CHIRIAC CONST. şi M. MARGULIUS (cazul I), MAVRODI D. (cazul II).

BORZA AL. N., MIRCEA A. NEGREA şi I. SAGER (cazul III).

In afară de acest ultim caz, la soluţiile primite, nu există concordanţă la secundă, aşa că nu garantăm dacă prima condiţie din enunţul problemei este satisfăcută. Soluţia D-lui P. MAZILU arată ce înseamnă «a pune bine o problemă».

N. C.

PROBLEMA 4235. *Dreptele care unesc vârfurile unui tetraedru* ABCD *cu un punct* P *din spaţiu străpung feţele opuse în* A_1, B_1, C_1, D_1. *Fie* A_2, B_2, C_2, D_2 *simetricele vârfurilor în raport cu aceste puncte.*

Dacă se pune:

$A_1P/PA = \alpha$, $B_1P/PB = \beta$, $C_1P/PC = \gamma$, $D_1P/PD = \delta$, *şi dacă cu* V, V_1, V_2 *înseamnă volumele tetraedrelor* ABCD, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ *şi cu* V_a, V_b, V_c, V_d *ale tetraèdrelor cu vârfurile în* P *având ca baze feţele tetraedrului* ABCD, *avem relaţia:*

$$V_2 + V - 8V_1 = -2\Sigma\,[2(\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) + (\beta + \gamma + \delta)]\,V_a .$$

(Enunţ corectat). V. THÉBAULT.

Soluţie şi generalizare date de D-l N. N. MIHĂILEANU (student). Se observă mai întâi că punctele A_1, B_1, C_1, D_1 sunt perfect determinate prin rapoartele $A_1P : PA = \alpha, \ldots$ încât interpretarea lor geometrică e superfluă.

Vom trata problema în modul următor:

Fie A_i, A_j, A_k trei puncte în spaţiu şi P un alt punct arbitrar. Pe dreptele PA_i, PA_j, PA_k se determină punctele:

$$A'_i\,P : PA_i = \alpha_i\ ,\ A'_j\,P : PA_j = \alpha_j\ ,\ A'_k\,P : PA_k = \alpha_k$$

şi punctele A''_i, A''_j, A''_k astfel ca:

$$A''_i\,A_i : A'_i\,A_i = A''_j\,A_j : A'_j\,A_j = A''_k\,A_k : A'_k\,A_k = l.$$

Avem între volumele

$$PA_i\,A_j\,A_k = v\ ,\ PA'_i\,A'_j\,A'_k = v'\ ,\ PA''_j\,A''_i\,A''_k = v'',$$

o relaţie de forma:

$$(I)\quad v'' - (1-l)^3 v - l^3 v' = l(1-l)[l(\alpha_i\,\alpha_j + \alpha_j\,\alpha_k + \alpha_i\,\alpha_k) - (1-l)(\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k)].$$

In adevăr luând ca origină de coordonate punctul P,

$$v = h\,|\,x\ y\ z\,| \qquad \left(h = -\frac{1}{6}\right)$$

şi din modul cum au fost definite punctele A', A'' rezultă pentru coordonatele lor:

$$A'\,[-\alpha x\ ,\ -\alpha y\ ,\ -\alpha z]$$

$$A''\,\{[(1-l) - l\alpha]\,x\ ,\ [(1-l) - l\alpha]\,y\ ,\ [(1-l) - l\alpha]\,z\}$$

x, y, z fiind coordonatele punctului respectiv A cu indicele lui α. Deci:

$$v' = -\alpha_i\,\alpha_j\,\gamma_k\,v$$

$$v'' = [(1-l)-l\alpha_i\,][(1-l)-l\alpha_j\,][(1-l)-l\alpha_k\,]\,v$$

şi cum:

$$\text{(II)}\quad [(1-l)-l\alpha_i\,][(1-l)-l\alpha_j\,][(1-l)-l\alpha_k\,]$$
$$= (1-l)^3 - l^3\alpha_i\,\alpha_j\,\alpha_k + l^2(1-l)(\alpha_i\,\alpha_j + \alpha_j\,\alpha_k + \alpha_i\,\alpha_k)$$
$$- l(1-l)^2(\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k)$$

se justifică relaţia între volume.

Evident că dacă luăm încă un punct A şi scriem încă cele trei relaţii de forma (I), neglijând de fiecare dată câte unul din punctele A_i, A_j, A_k, se obţine însumând proprietatea tetraedrului.

PROBLEMA 4246. *Să se determine numerile* α, β, α', β' *cari satisfac egalităţile următoare:*

$$\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1\ ;\ \alpha\bar{\alpha'} + \beta\bar{\beta'} = 0\ ;\ \alpha'\alpha' + \beta'\bar{\beta'} = 1.$$

Numerile $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\alpha'}$, $\bar{\beta'}$ *sunt imaginarele conjugate respectiv ale numerilor* α, β, α', β'. *Să se deducă cazul particular când numerile sunt reale.*

TH. ANGHELUŢĂ.

A rezolvat problema: D-l DIMITRIE MAVRODIN.

Soluţie. Pentru determinarea numerilor căutate este mai potrivită reprezentarea numerilor complexe prin forma trigonometrică.

Să punem deci

$$\alpha = r_1\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\ ;\ \beta = r_2\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$
$$\alpha' = r'_1\,(\cos\varphi'_1 + i\sin\varphi'_1)\ ;\ \beta' = r'_2\,(\cos\varphi'_2 + i\sin\varphi'_2).$$

Substituind aceste expresiuni în prima şi ultima din ecuaţiile date, obţinem egalităţile:

$$r_1^2 + r_2^2 = 1\ ;\ r'^2_1 + r'^2_2 = 1.$$

Prin difiniţie modulele nu pot fi numere negative şi putem pune

$$\text{(1)}\quad \begin{cases} r_1 = \cos\omega\ ;\ r_2 = \sin\omega \\ r'_1 = \sin\omega'\ ;\ r'_2 = \cos\omega', \end{cases}$$

ω şi ω' fiind deci cuprinse între 0 şi $\dfrac{\pi}{2}$.

Pe de altă patre ecuația a doua dată devine, cum se vede ușor,

$$r_1 r'_1 [\cos(\varphi_1 - \varphi'_1) + i \sin(\varphi_1 - \varphi'_1)]$$
$$= r_2 r'_2 [\cos(\pi + \varphi_2 - \varphi'_2) + i \sin(\pi + \varphi_2 - \varphi'_2)].$$

De aici deducem ecuațiile

$$\varphi_1 - \varphi'_1 = \varphi_2 - \varphi'_2 + \pi + 2k\pi$$
$$r_1 r'_1 = r_2 r'_2$$

k fiind un număr întreg. Din prima ecuație putem deduce unul din argumente de ex.

$$\varphi'_2 = \pi + \varphi_2 - \varphi_1 + \varphi'_1 \qquad (2)$$

suprimând pe $2k\pi$ care nu schimbă valoarea numărului complex care are argumentul φ'_2. A doua ecuație, care exprimă egalitatea modulelor, devine ținând seamă de egalitățile (1)

$$\sin(\omega - \omega') = 0.$$

$$\therefore \quad \omega = \omega',$$

căci arcele ω și ω' sunt în primul cadran.

Numerile căutate sunt deci

$$\alpha = \cos\omega (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \quad \beta = \sin\omega (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$
$$\alpha' = \sin\omega (\cos\varphi'_1 + \sin\varphi'_1) \quad \beta' = \cos\omega (\cos\varphi'_2 + i \sin\varphi'_2)$$

φ'_2 fiind dat de egalitatea (2).

Caz particular. Numerile α, β, α', β' vor fi reale dacă

$$\varphi_1 = k_1\pi \; ; \; \varphi_2 = k_2\pi \; ; \; \varphi'_1 = k'_1\pi$$

iar din (2) atunci obținem

$$\varphi'_2 = (k_2 - k_1 + k'_1 + 1)\pi,$$

k_1, k_2, k'_1 fiind numere întregi.

Dacă în același timp vrem să avem egalitatea

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1 \qquad (3)$$

atunci trebuie ca numărul $k_2 + k'_1$ să fie fără soț. In particular egalitatea ultimă este satisfăcută dacă luăm

$$k_2 = 1 \; , \; k'_1 = 0 \quad \text{și} \quad k_1 = 0$$

și atunci avem

$$\alpha = \cos\omega \; ; \; \beta = \sin\omega$$
$$\alpha' = \sin\omega \; ; \; \beta' = \cos\omega.$$

Problema propusă generalizează formulele de schimbare de axe ortogonale în plan, origina axelor rămânând fixă.

Observare. Dacă în general alipim condițiilor date și ecuația (3) atunci se găsește lesne

$$\alpha = \cos\omega\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad ; \quad \beta = \sin\omega\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$
$$\alpha' = \sin\omega\,(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) \quad ; \quad \beta' = \cos\omega\,(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1).$$

PROBLEMA 4347. *Să se calculeze expresiunea*

$$C_{p+n-1}^{p-1}\,C_{p+m+n-1}^{p-1} - C_\lambda^1\,C_{p+n}^{p-1}\,C_{p+m+n}^{p-1} + C_\lambda^2\,C_{p+m+1}^{p-1}\,C_{p+m+n+1}^{p-1} + \ldots + (-1)^\lambda\,C_{p+n+\lambda-1}^{p-1}\,C_{p+m+n+\lambda-1}^{p-1}.$$

Să se generalizeze. Pentru ce valoare întreagă a lui λ, *această sumă este zero,* m, n, p *fiind întregi și pozitivi?*

M. GHERMĂNESCU.

Soluție dată de D-l D. MAVRODIN (Student).

Scriem, după formula binomului lui NEWTON :

$$(1-x)^\lambda = 1 - C_\lambda^1 x + C_\lambda^2 x^2 - \ldots + (-1)^\lambda C_\lambda^\lambda x^\lambda.$$

Înmulțind ambii membri ai egalității cu x^{p+n-1}, obținem :

$$f(x) = x^{p+n-1}(1-x)^\lambda = x^{p+n-1} - C_\lambda^1 x^{p+n} + C_\lambda^2 x^{p+n+1} - \ldots + (-1)^\lambda C_\lambda^\lambda x^{p+n+\lambda-1}.$$

Derivând în ambii membri, avem :

$$f'(x) = (p+n-1)\,x^{p+n-2} - C_\lambda^1 (p+n)\,x^{p+n-1} + \ldots + (-1)^\lambda C_\lambda^\lambda (p+n+\lambda-1)\,x^{p+n+\lambda-2}.$$

Derivând din nou, găsim :

$$f''(x) = (p+n-1)(p+n-2)\,x^{p+n-3} - C_\lambda^1 (p+n)(p+n-1)\,x^{p+n-2} + \ldots + (-1)^\lambda C_\lambda^\lambda (p+n+\lambda-1)(p+n+\lambda-2)\,x^{p+n+\lambda-3}.$$

Derivând cu totul de $(p-1)$ ori, găsim :

$$f^{(p-1)}(x) = (p+n-1)\ldots(n+1)\,x^n - C_\lambda^1 (p+n)\ldots(n+2)\,x^{n+1} + \ldots + (-1)^\lambda C_\lambda^\lambda (p+n+\lambda-1)\ldots(n+\lambda+1)\,x^{n+\lambda}.$$

Impărţind în ambii membri cu $(p-1)!$, avem:

$$\frac{f^{(p-1)}(x)}{(p-1)!} = C_{p+n-1}^{p-1}\, x^n - C_\lambda^1\, C_{p+n}^{p-1}\, x^{n+1} + \ldots + (-1)^\lambda C_\lambda^\lambda\, C_{p+n+\lambda-1}^{p-1}\, x^{n+\lambda}.$$

Inmulţind, din nou cu x^{p+m-1}, în ambii membri, avem:

$$\frac{x^{p+m-1} f^{(p-1)}(x)}{(p-1)!} = C_{p+n-1}^{p-1}\, x^{p+m+n-1} - C_\lambda^1\, C_{p+n}^{p-1}\, x^{p+m+n} + \ldots + (-1)^\lambda C_\lambda^\lambda\, C_{p-m+\lambda-1}^{p-1}\, x^{p+m+n+\lambda-1}.$$

Derivând de $(p-1)$ ori şi împărţind ambii membri cu $(p-1)!$, avem:

$$\varphi(x) = \left[\frac{x^{p+m-1} f^{(p-1)}(x)}{(p-1)!\,(p-1)!}\right]^{(p-1)} = C_{p+n-1}^{p-1}\, C_{p+m+n-1}^{p-1}\, x^{m+n} - C_\lambda^1\, C_{p+n}^{p-1}\, C_{p+m+n}^{p-1}\, x^{m+n+1} + \ldots + (-1)^\lambda C_\lambda^\lambda\, C_{p+n+\lambda-1}^{p-1}\, C_{p+m+n+\lambda-1}^{p-1}\, x^{m+n+\lambda}.$$

sau:

$$\varphi(x) = \left[\frac{x^{p+m-1}}{(p-1)!^2} \cdot \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\left[x^{p+n-1}(1-x)^\lambda\right]\right]^{(p-1)}(\alpha).$$

Vedem că făcând pe $(x=1)$, căpătăm tocmai expresia din enunţ, pe care însemnând-o cu E, avem:

$E = \varphi(1)$, unde $\varphi(1)$ e $\varphi(x)$ din (α) în care am făcut pe $x=1$.

O generalizare ar fi să calculăm expresia:

$$C_{p+n_1-1}^{p_1-1}\, C_{p+n_1+n_2-1}^{p_2-2}\, C_{p+n_1+n_2+n_3-1}^{p_3-1} \ldots C_{p+n_1+n_2+\ldots n_k-1}^{p_k-1} - C_\lambda^1\, C_{p+n_1}^{p_1-1}\, C_{p+n_1+n_2}^{p_2-1}\, C_{p+n_1+n_2+n_3}^{p_3-1} \ldots C_{p+n_1+n_2+\ldots n_k}^{p_k-1} + \ldots + (-1)^\lambda C_\lambda^\lambda\, C_{p+n_1+n_2+\lambda-1}^{p_1-1}\, C_{p+n_1+n_2+\lambda-1}^{p_2-1} \ldots C_{p+n_1+n_2+\ldots+n_k+\lambda-1}^{p_k-1}.$$

Prin aceeaş metodă găsim:

$$\varphi_n(x) = \left[\frac{x^{p+n_k-1}}{(p-1)^k}\left[x^{p+n_{k-1}-1}\left[x^{p+n_{k-2}-1}\left[\ldots\left[x^{p+n_1-1}(1-x)^\lambda\right]^{(p-1)}\right]^{(p-1)}\right]^{(p-1)}\ldots\right]^{(p-1)}\right.$$

De unde :

$E_n = \varphi_n(1)$, unde $\varphi_n(1)$ e $\varphi_n(x)$, unde am făcut pe $x = 1$.

In cazul expresiei E, pentru ca suma să fie zero, trebue ca factorul $(1 - x)^\lambda$ să fie zero.

Dar cum $x = 1$, acest factor va fi 0 dacă va fi ridicat la o putere pozitivă.

Derivând de $(p - 1)$ ori , $(1 - x)^\lambda$ va deveni $(1 - x)^{\lambda - p + 1}$ şi derivând din nou de $(p - 1)$ ori va fi la puterea $\lambda - 2p + 2$; aşa dar trebue ca : $\lambda > 2(p - 1)$, pentru ca suma să fie zero. Dacă condiţia nu e îndeplinită, atunci suma poate să nu fie zero, depinde de ceilalţi factori.

In cazul general E_n , trebue ca : $\lambda > k(p - 1)$.

PROBLEMA 4390. *Fie α unghiul cu care s'a rotit pământul într'un interval dat şi ω unghiul pe care-l fac axele longitudinale ale unui pat orizontal la începutul şi la sfârşitul intervalului. Să se găsească poziţia patului aşa fel ca unghiul ω să fie minim.*

V. VÂLCOVICI.

Fie φ unghiul $\left(\geqslant 0 \text{ şi } \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ pe care-l face axa longitudinală a patului cu direcţia Vest-Est a locului. Vom considera un sistem de axe rectangulare având originea în centrul paralelului locului, axa Ox paralelă la direcţia VE, axa Oz aşezată în lungul axei polilor şi dirijată spre nord, axa Oy rezultând în mod univoc în ipoteza sistemului dextrors.

Vom reprezenta patul prin versorul său, cu punctul de aplicaţie în origine. Vom însemna, în fine, cu λ latitudinea locului pe pământ şi cu x_1, y_1, z_1 coordonatele extremităţei versorului patului. Observând că intersecţia orizontului cu planul meridian al locului face unghiul λ cu axa polilor, vom scrie fără nici o dificultate :

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = \cos\varphi \\ y_1 = \sin\varphi \,.\, \sin\lambda \\ z_1 = \sin\varphi \,.\, \cos\lambda \end{cases}$$

După ce pământul s'a rotit de unghiul α în jurul axei polilor, coordonatele capătului versorului patului devin x_2, y_2, z_2. Între aceste mărimi şi coordonatele x_1, y_1, z_1 există relaţiile evidente:

$$(2) \qquad \begin{cases} x_2 = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha \\ y_2 = -x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha \\ z_2 = z_1. \end{cases}$$

Se înţelege că vom putea scrie:

$$\cos\omega = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

sau, ţinând seamă de valorile (2) ale coordonatelor x_2, y_2, z_2:

$$\cos\omega = (x_1^2 + y_1^2) \cdot \cos\alpha + z_1^2.$$

Nu ne mai rămâne de cât să introducem valorile (1) ale coordonatelor x_1, y_1, z_1, pentru a avea formula căutată, care ne dă unghiul ω:

$$\cos\omega = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \cdot \sin^2\lambda) \cdot \cos\alpha + \sin^2\varphi \cdot \cos^2\lambda.$$

Vom scrie relaţia precedentă sub forma:

$$(3) \qquad \cos\omega = \cos\alpha + (1 - \cos\alpha) \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\lambda.$$

Variaţia lui ω ne va fi lămurită de derivata sa în raport cu φ:

$$\sin\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = -(1 - \cos\alpha) \cdot \cos^2\lambda \cdot \sin 2\varphi,$$

Se vede din această formulă că membrul al doilea se anulează pentru:

a) $\varphi = 0$

b) $\varphi = \frac{\pi}{2}$

c) $1 - \cos\alpha = 0$

dacă presupunem că pentru locul unde se află patul nu avem $\cos\lambda = 0$ (patul nu este aşezat la pol).

Este evident că ultimul caz — *c)* — nu prezintă nici un interes. Pentru a preciza natura valorilor lui ω în cazurile *a)* şi *b)*, va trebui să facem apel la derivata a doua:

$$\sin\omega \frac{d^2\omega}{d\varphi^2} = -\cos\omega \cdot \left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right)^2 - 2\cos 2\varphi \cdot \cos^2\lambda \cdot (1 - \cos\alpha).$$

Dacă ținem seamă de faptul că $\frac{d\omega}{d\varphi}$ se anulează în cazurile *a)* și *b)* deducem:

$$\sin\omega \frac{d^2\omega}{d\varphi^2} < 0 \tag{4}$$

în cazul *a)* și

$$\sin\omega \frac{d^2\omega}{d\varphi^2} > 0 \tag{5}$$

în cazul *b)*.

Putem spune deci, presupunând că $sin\omega$ rămâne pozitiv, că *a)* corespunde unui maxim, iar *b)* unui minim pentru ω. Dacă însemnăm cu ω_M și cu ω_m respectiv valoarea maximă și valoarea minimă a lui ω, vom avea

adică $$\cos\omega_M = \cos\alpha$$

și $$\omega_M = \alpha$$

$$\cos\omega_m = \cos\alpha + (1 - \cos\alpha) \cdot \cos^2\lambda.$$

In special, pentru o semirotație a pământului ($\alpha = \pi$), obținem

$$\omega_M = \pi \quad , \quad \omega_m = 2\lambda.$$

La poli $\left(\lambda = \frac{\pi}{2}\right)$ avem $\omega_M = \omega_m$, ceeace de altfel se scoate și din (3), care devine în acest caz $\omega = \alpha$, La latitudinea capitalei noastre însă, ω_M este ceva mai mare de cât $2\omega_m$. La ecuator ω_m este nul.

Se vede din valoarea maximă a lui ω, că pentru a satisface condiția impusă ca $sin\omega$ să fie pozitiv, trebue să ne oprim la $\alpha = [0, \pi]$. Este evident însă că studiul complect al variației lui ω, pentru valorile lui α superioare lui π, se face fără nici o dificultate pe formulele găsite. De altfel pentru latura practică a problemei propuse nu interesează de cât intervalul $\alpha = [0, \pi]$.

Din cele ce preced putem trage concluzia că pentru un somn de cel mult 12 ore, patul are deviația unghiulară maximă dacă este așezat în lungul paralelului. (EV sau VE) și deviația unghiulară minimă dacă este așezat în lungul meridianului (SN sau NS).

Cum turburarea proceselor fiziologice în somn crește probabil cu deviația axei longitudinale a omului, rezultă că poziția patului în lungul meridianului este cea mai recomandabilă pentru a avea un somn liniștit. V. V.

S'a primit o încercare de soluție în care se dovedește că rezolvitorul nici nu a înțeles enunțul.

PROBLEMA 4429. *Să se găsească numerile de două cifre, care înmulțite cu diferența cifrelor să ne dea diferența cuburilor cifrelor lor.*

V. THÉBAULT.

Soluția I.

Conform enunțului avem:

$$(10 \cdot a + b)(a - b) = a^3 - b^3$$

a și b fiind cifrele numărului.

Ținând însă seamă că:

$$a^3 - b^3 \equiv (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

atunci avem:

$$10 \cdot a + b = a^2 + ab + b^2.$$

Ordonând după puterile lui a și rezolvând, găsim:

$$a = \frac{10 - b \pm \sqrt{(10 - b^2) - 4b(b - 1)}}{2}$$

unde pentru $b > 3$ avem rădăcini imaginare.

In consecință avem:

b	0	1	2	3
a	10	9	—	16

cari ne dă soluțiunile:

$$13 \ , \ 63 \ , \ 91.$$

Soluția II.

Relația de bază se mai poate scrie:

$$(10 - a)\, a = b\,(b + a - 1).$$

Membrul I al acestei relații este maxim pentru $a = 5$, prin urmare valoarea maximă a lui b va fi dedusă din relația:

$$25 = b\,(b + 4).$$

De unde se vede că $b \leqslant 3$. Restul urmează ca la prima soluție.

I. L.

Au rezolvat problema complet D-nii: M. AMĂRĂȘTEANU, I. GH. BOGDAN, C. COSTESCU, C. DĂSCĂLESCU, V. CEAUȘESCU, V. ENĂȘESCU, D. MIHALCEA și F. SAVOVICI.

Au rezolvat parțial problema, dând soluțiile indicate în dreptul fiecăruia, D-nii: V. GRIGORESCU (63 și 13), V. N. BUCUR (63, 91), I. N. SAGER (91), P. COJOCARU (63, 91) și I. BUZINCA (63, 91).

EXERCIŢII

27. Să se calculeze suma

$$\sum_{i=1}^{i=m} \operatorname{tg} ia - \operatorname{tg} (i+1)\, a.$$

I. B. FLORESCU.

R. Utilizăm relaţia

$$\operatorname{tg} (m+1)\, a = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} ma}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} ma}$$

sau

$$\operatorname{tg} ma \operatorname{tg} (m+i)\, a = \frac{\operatorname{tg} (m+i)\, a}{\operatorname{tg} a} - \frac{\operatorname{tg} ma}{\operatorname{tg} a} - 1$$

în care făcând pe m să ia valorile întregi dela 1 la m, şi adunând relaţiile obţinute, după reducerea termenilor asemenea se obţine

$$\sum_{i=1}^{i=m} \operatorname{tg} ia \,.\, \operatorname{tg} (i+1)\, a = \frac{\operatorname{tg} (m+i)\, a}{\operatorname{tg} a} - m - 1.$$

PROBLEME PROPUSE

4487. O tablă de grosime uniformă omogenă are şapte găuri circulare egale şi conturul exterior poligonal. Intre găuri şi dela ele la margini este aceeaşi distanţă. Când greutatea tablei este minimă?

I. IONESCU.

4488. Se cere patratul de forma $abc90abc$.

V. THÉBAULT.

4489. Fie ABC un triunghiu înscris în cercul de centru O şi fie A'B'C' triunghiul său ortic, iar A''B''C'' triunghiul său median. Se mai consideră punctul A_1 de intersecţie a înălţimii BB' cu dreapta OC'', punctul A_2 în care OB'' întâlneşte înălţimea CC' şi punctele B_1, B_2, C_1, C_2 obţinute prin permutări circulare între vârfurile A, B, C. Se consideră punctele A'_1, A'_2, B'_1, B'_2, C'_1, C'_2 simetrice ale punctelor A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 în raport cu centrul O.

Să se arate că:

1°. Perpendicularele duse prin A, B, C respectiv pe dreptele AA'_1, BB'_1, CC'_1 formează un triunghiu $\alpha\beta\gamma$ omologic cu triunghiul $\alpha'\beta'\gamma'$, format de dreptele B'C'', C'A'', A'B''.

2°. Perpendicularele duse prin A, B, C respectiv pe dreptele AA'_2, BB'_2, CC'_2 formează un triunghiu $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ omologic cu triunghiul $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1$, format de dreptele B''C', C''A', A''B'.

3°. Axele de omologie ale celor două grupuri de triunghiuri coincid.

N. BOTEA.

4490. Se dă patrulaterul ABCD şi se notează:

$$E \equiv (AB\ ;\ CD)\ ;\ F \equiv (AD\ ;\ BC)\ ;\ I \equiv (AC\ ;\ BD).$$

Fie Δ_1 dreapta ortocentrelor celor patru triunghiuri formate de laturile patrulaterului ABCD şi Δ_1, Δ_2 dreptele analoage în patrulaterele IAED şi IAFB.

Ce condiţie trebue să îndeplinească patrulaterul ABCD pentru ca dreptele Δ_1, Δ_2, Δ_3 să fie concurente?

GH. D. SIMIONESCU.

4491. Fie dat tetraedrul ABCD aşa fel ca muchia DA să fie perpendiculară pe planul ABC; diedrul Δ având dreapta DA ca muche şi acelaş plan bisector cu diedrul format de planele ADB, ADC; P, Q punctele în care Δ este întâlnit de dreapta BC. B', C' fiind punctele de întâlnire ale sferelor DAPB, DAQC cu dreptele AC, AB, să se afle locul geometric al intersecţiei planelor DBB', DCC' când diedrul Δ se desface sau se închide.

C. IONESCU-BUJOR.

4492. n fiind dat, să se determine ν aşa fel încât numărul

$$t_\nu = C_{n+\nu-1}^{2\nu-1} \cdot C_{n+\nu}^{\nu}$$

să aibă cea mai mare valoare. Aplicaţie $n = 1000$.

N. C.

4493. In orice triunghiu există relația :

$$\operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec}^2 B + \operatorname{cosec}^2 C \geq 4.$$

AL. A. ROȘU.

4494. Să se calculeze produsele :

$$P_1 = \sin\alpha \,.\, \sin(\alpha + h) \,.\, \sin(\alpha + 2h) \ldots \sin(\alpha + nh)$$

$$P_2 = \cos\alpha \,.\, \cos(\alpha + h) \,.\, \cos(\alpha + 2h) \ldots \cos(\alpha + nh).$$

GH. VASILIU.

4495. Să se rezolve ecuațiunea

$$\sin z + \cos z = i$$

unde i este simbolul imaginar.

GH. TH. GHEORGHIU.

4496. Se dă ecuația

$$x^3 + px + q = 0,$$

coeficienții p, q fiind reali. Știind că această ecuație are rădăcinile reale, să se arate că pătratele rădăcinilor ei sunt inferioare lui

$$-\frac{4p}{3}.$$

TH. ANGHELUȚĂ.

4497. Intre polinoamele P_q , Q_q , R_r , S_{p+q} există relația

$$P_p\, Q_q\, R_r + Q'_q\, R_r + Q_q\, S_{p+q} = 0$$

indicii fiind gradele respective, iar Q' fiind derivata lui Q. Să se demonstreze că dacă ecuațiunea $Q_q = 0$ are rădăcini simple, atunci $R \equiv Q$.

Ce putem spune, când aceeași ecuațiune are rădăcini multiple ?

M. GHERMĂNESCU.

4498. Locul centrelor conicilor supraosculatoare unei conici fixe, într'un punct dat al ei, este diametrul acelui punct.

LT. MIHAIL I. FOCȘENEANU.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Antonescu N. F. D-ra (4475); *Bacărea Alex.* (4459); *Bădescu A.* (4460, 62); *Blaga Em.* (4459); *Bloza E.* (4318); *Bogdan G. I.* (4475, 85); *Bogza Vasile* (4318, 430, 59); *Boiangiu I. Gh.* (4443); *Bucur Virgil* (4424, 71); *Buzincu I. I.* (4459, 60, 75, 85); *Ceauşescu V.* (4424); *Chiriac C.* (4462); *Chiriţă M.* (4471); *Ciucă I.* (4460); *Cocea Gh. Th.* (P); *Cojocaru P. P.* (4460, 75, 85); *Cotescu C.* (4471, 75, 85); *Deceanu Gh.* (4459); *Dumbrăvescu A.* (4475); *Dumbrăvescu D.* (4485); *Dumitriu C. I.* (4457, 75); *Dumitru Isac* (4459, 71); *Enăşescu D. V.* (4305, 459, 75); *Gavrilescu N. Const.* (4318, 434, 59, 71); *Ionescu Virgil* (4471, 75); *Iordache Enache* (4409, 30, 43, 59); *Isac C. D-tru* (4443); *Mănac M.* (4459, 62); *Mazilu P. P.* (4418, 30, 43); *Mihalcea St. D.* (4475, 85); *Millu I. N.* (4434); *Năstase M.* (4409); *Şabac Ion* (4408, 09, 13, 34); *Stănescu Gh.* (4459); *Stoica Al.* (4436, 62); *Streder Ion* (4428, 71); *Ţarălungă D.* (4459); *Ţiţeica I. I.* (4375, 418, 19, 75, E); *Unter Biby D-ra* (4409, 18, 30, 39, 43, 57, 59, 60, 71, 75, 85).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondența se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“
Casa Gazeta Matematică
Calea Griviței No. 158
București 2.

BIBLIOTECA „ASTRA“ SIBIU

Abonamentele se trimit pe aceiaș adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN.**

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XL

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1935

BIBLIOTECA CENTRALĂ

SUMARUL

1. „Formule de M. Botesu de Jassy" . . *A. Myller.*
2. Cărţi vechi de matematică . . . . . *I. Ionescu.*
3. Asupra sumei unor serii . . . . . *Gh. D. Simionescu.*
4. Despre ortopol . . . . . *Lt. Mihail Focşeneanu.*
5. Asupra unor sume trigonometrice . *Ion V. Mătieş.*
6. Premiul „Inginer Al. Roşu".
7. Note matematice: 30 — 35.
8. Bibliografie.
9. Cereri: 246.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 2003, 3878, 4156, 4282, 4304, 4305, 4317, 4351, 4353, 4439, 4475.
12. Exerciţii: 28 — 31.
13. Probleme propuse: 4499 — 4510.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1935

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 11, 12, 18, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 66, 68, 70, 76, 80, 84, 89, 91, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 14, 16, 17, 21, 26, 38, 41, 42, 45, 46, 47, 49, 50, 52, 54, 58, 61, 64, 65, 66, 68, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 500, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela „*Gazeta Matematică*" cu preţul de 12 lei.

Avem plăcerea a anunţa că dela 10 Aprilie a. c. mai fac parte din Societatea noastră şi D-nii: ING. V. CHIRICESCU, ING. ULPIU M. FLORESCU, ING. VICTOR POPESCU şi GENERAL N. PRAPORGESCU.

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XL *SUPLIMENT* No. 8

DARE DE SEAMĂ

asupra mesei comune a membrilor „Gazetei Matematice" din seara zilei de 20 Februarie 1935, pentru sărbătorirea d-lui ing. AUREL IOANOVICI

Este în afară de orice îndoială că din acest an viaţa *Gazetei* intră într'o perioadă nouă. Această respectabilă persoană care este *Gazeta,* după ce a dus destulă vreme sărăcie, schimbând locuinţe din an în an, dela un prieten la altul, a ajuns în sfârşit astăzi să aibă casa ei. Şi cum realizarea acestui vis de 4 decenii nu poate fi privită cu răceală, ca un fapt banal, *Gazeta,* entusiasmată, radioasă şi veşnic tânără, îşi sărbătoreşte casa şi mai ales îşi sărbătoreşte prietenii cari au ajutat-o la construcţia ei. In seara aceasta a fost rândul d-lui AUREL IOANOVICI, noul delegat al Societăţii, vechi membru al ei şi vechi corespondent din timpul copilăriei sale. In realizările minunate ale d-lui IOANOVICI, *Gazeta* vede şi o părticică de influenţă a sa şi d-l IOANOVICI e cel dintâi care o admite. Prin căldura manifestată de numărul mare de membrii prezenţi, sărbătorirea d-lui IOANOVICI a luat proporţia unei sărbători a *Gazetei biruitoare.*

Dar casa nu este singura realizare a acestui an, care dă dreptate augurilor, ce prevăd din semne imperceptibile simplilor muritori un viitor strălucit *Gazetei.* Gazeta şi-a mărit paginele dela 40 la 48, şi mai ales a făcut anul acesta ceeace ar fi părut imposibil altădată. S'a realizat prin *«Supliment»* o mare difuzare a spiritului *«Gazetei»* în cele mai depărtate colţuri ale ţării şi succesul mereu crescând al acestui *«supliment»* arată că ideia d-lui prof. ŢINO, creatorul şi realizatorul *«Suplimentului»* a fost fecundă şi plină de promisiuni pentru viitorul matematicelor în ţara noastră românească, viitor ce părea compromis în ultimii ani.

Şi apoi anul acesta a adus un gând nou: acela al realizării unei tipografii a *Gazetei,* pentru care d-l col. BUICLIU a şi adus prima cărămidă.

In faptul că membrii simt nevoia de a se întâlni cât mai des la mese colegiale, diferite de obişnuitele şedinţe ale Societăţii stă o altă dovadă a trăiniciei tot mai mari a *«Societăţii Gazeta Matematică».* Anul acesta au avut loc până acum două mese şi vom mai avea desigur încă cel puţin două: una cu prilejul concursului dela Paşti, iar alta când *Gazeta* va intra în a cincea decadă. Şi să sperăm că în viitor vom ajunge la mese lunare.

Masa a avut loc în sala de sus a restaurantului *Modern.* Membrii se adună la ora 9, venind în grupuri dela *Casa Gazetei,* unde avusese loc o adunare generală a Societăţii, şi se aşează în jurul unei lungi mese. Au luat parte următorii membri, pe cari îi citâm în ordine alfabetică: d-nii BRUCKNER V., BOTEA N., BUDEANU I. C., BUICLIU GH., BUNESCU D. AL., BUŞILĂ I., CAMBUREANU V., CHIŢULESCU I., CIORĂNESCU N., FILIPESCU GH., GEORGESCU I. N., GEORGESCU N. N., GHERMĂNESCU M., GHIMUŞ D. A., GRIGORESCU C., HANGANU D. M., ILIESCU GH., IOACHIMESCU GH. A., IOANOVICI A., IONESCU BUJOR C., IONESCU I., LINTEŞ I., LITEANU I. G., MANOILESCU M., ORĂŞANU C., PANTAZI A., REVICI T., ROŞU AL., ROŞU V., SĂPUNARU S. G., SIMIONESCU D. G., STAN D., TEODORESCU C., ŢINO O., ŢIŢEICA GH., ULESCU AL., VASILIU M., ZAPAN GR.

La mijlocul mesei iau loc stâlpii cei mari ai Gazetei: d-nii ION IONESCU, A. IOACHIMESCU şi G. ŢIŢEICA, sărbătoritul d-l IOANOVICI, delegaţii şi stâlpii mai mici. La cele două capete se află strânşi membrii actualei redacţii. La capătul din spre sobă se află partea mai cu greutate: d-nii ŢINO, LINTEŞ şi ILIESCU. La capătul opus tinereţea şi veselia: cei mai tineri membri ai *Gazetei* sunt grupaţi în jurul d-lui CEZAR ORĂŞANU.

Insemn, după notele pe care le-am putut lua, toasturile ţinute:

D-l G. ŢIŢEICA începe printr'o comparaţie între cei cu studii clasice şi matematicieni. Acei dintâi fac proces matematicienilor, acuzându-i că nu au posibilitatea de a înţelege viaţa. Sufletele lor ar fi reci, prin ele ar bate vântul. Realitatea este cu totul alta. In sufletele matematicienilor este mai multă căldură şi un exemplu îl avem în d-l IOANOVICI. D-sa cu devotament şi cu sacrificii şi-a propus să realizeze casa şi a realizat-o. Nu a realizat-o singur dar a fost unul din cei mai de seamă. Să trăiască.

Dar în afară de aceasta d-l IOANOVICI are şi alt merit. A întrebuinţat beton armat pentru construcţia casei, dar acelaş beton l-a întrebuinţat şi pentru solidaritatea dintre noi. Să-i mulţumim.

Tardiv aflu (D-l ŢIŢEICA nu participase la şedinţa Societăţii ce a premers mesei) că pentru devotamentul său d-l IOANOVICI a fost *pedepsit*, fiind ales în delegaţia societăţii. Propun ca să ridicăm toţi paharul cu sufletele calde în cinstea d-lui IOANOVICI.

D-l COL. BUICLIU: Deşi funcţia mea de delegat a încetat astăzi, daţi-mi voie să mă folosesc de un prilej, rar în Societate, de a avea printre noi pe d-l MANOILESCU, care a construit un etaj al casei. D-sa a dat primul milion pe care am ştiut să-l multiplicăm. Să trăiască.

La cuvântul sărbătoritul d-l AUREL IOANOVICI: Iertaţi-mă, spune d-sa, dacă copleşit de emoţie nu găsesc cuvinte ca să-mi exprim mulţumirea. In chestiunea localului *Gazetei*, mi-am ţinut angajamentul, luat faţă de d-l IONESCU, de a construi în preţ de cost. După încheierea socotelilor am găsit un beneficiu de 230.000 lei, care după angajamentul luat se cuvenea *Gazetei*, căreia i-am înapoiat. Cred că ar trebui sărbătoriţi în primul rând cei cari de 40 de ani muncesc fără preget. D-nii IONESCU, IOACHIMESCU şi ŢIŢEICA ne sunt cunoscuţi de când eram elevi de liceu; fiind studenţi i-am avut apoi profesori, iar astăzi îi avem colegi. Ridic paharul în cinstea lor.

D-l ŢIŢEICA: Se poate trage şi altă concluzie. Meritele sunt ale socotelilor d-lui IOANOVICI.

D-l I. IONESCU caută să restabilească adevărul. D-sa a spus d-lui IOANOVICI: Când n'ai de lucru fă-ne casa, dar fă-ţi toate socotelile, căci dacă cheltueşti mai mult, peste banii pe care-i avem nu-ţi dăm nici o leţcaie. D-l IOANOVICI a avut mare risc. Diferenţa i se cuvenea d-sale. Dacă d-sa a crezut altfel cu atât mai bine! Poate să mai dea şi altădată! Dar vreau să însemn şi alt fapt. Sunt 33 de ani de când am rostit primul toast în onoarea antreprenorilor români, care o duceau greu. Azi lucrurile s'au schimbat mult. Cred că este prima dată acum când cineva, care-şi face o casă, dă o masă în cinstea antreprenorului. Această minune a realizat-o sărbătoritul nostru. Să trăiască d-l IOANOVICI.

D-l BUNESCU: Ne-a umplut de frică, de a nu afla S. T. B., mărturisirea d-lui IOANOVICI că preţul casei a fost mai mic decât cel din deviz. Frica a trecut căci d-l FILIPESCU este de faţă. In a doua parte să trec la d-l FILIPESCU ca director la S. T. B. Cu tot ajutorul d-lor TANCRED CONSTANTINESCU, MANOILESCU şi IOANOVICI tot nu am fi putut face casa fără ajutorul d-lui FILIPESCU. Să trăiască d-l FILIPESCU.

D-l FILIPESCU protestează de complicitatea pe care i-o presupune d-l BUNESCU. D-l BUNESCU este probabil funcţionar la stat. Altfel ar şti că un contract odată iscălit nu mai poate fi de fel schimbat.

D-l N. I. GEORGESCU reaminteşte de donaţia de 500 de lei, făcută de d-l COL. BUICLIU, pentru cea dintâi cărămidă a nouei întreprinderi ce va fi

Tipografia Gazetei Matematice. Să-i mulţumim deci d-lui COL. BUICLIU pentru acest gest şi pentru cei doi ani cât a fost în delegaţia Societăţii şi să-i urăm de a persista şi pe viitor în opera începută.

D-l CIORĂNESCU aminteşte de o fabulă a lui ALEXANDRESCU, care începe cu versul:

„Minuni în vremea noastră nu cred a se mai face".

Desigur că dacă ALEXANDRESCU ar trăi astăzi şi-ar schimba părerea. D-l CIORĂNESCU face o clasificare a minunilor, care pot fi de două feluri: 1° datorite imprevizibilului; 2° cuprinzând acţiuni omeneşti, ce derogă dela legile la care ţine omul mediu, omul statistic. Minuni de această a doua categorie se întâmplă la *Gazeta Matematică*, unde vedem oameni ce fac lucruri, ce ies din preocupările oamenilor obişnuiţi; cu mari greutăţi duc o revistă, ce nu se adresează decât unei elite restrânse, primesc scrisori dela copii pe care le citesc cu toată atenţia. Mai ales noi cei tineri ne simţim copleşiţi de tot ce s'a făcut înaintea noastră şi nu ştim cum să ne exprimăm mai bine mulţumirea. In numele celor tineri închin în sănătatea întemeietorilor.

Cuvintele d-lui CIORĂNESCU fac pe d-l prof. ŢIŢEICA să amintească de lucrarea unui mare umanist ERASMUS *din Rotterdam* intitulată *«Elogiul nebuniei»*.

După atâtea toasturi serioase d-nii ORĂŞANU şi GHERMĂNESCU încearcă să descreţească frunţile prin câte o epigramă.

Epigrama d-lui ORĂŞEANU este oferită arhitectului *Gazetei* d-l ŞTEFĂNESCU şi este provocată de constatarea că stilul ales pentru G. M. nu este stilul românesc ci cel neo-grec:

Arhitectul răsfoind Gazeta
Găsi într'însa pe α şi β,
Şi crezând că revista este grecească,
Uită de arhitectura românească.

Epigrama d-lui GHERMĂNESCU a fost oferită d-lui IOANOVICI:

Abuzând de faptul că te afli aci
O nedumerire vreau a-mi lămuri:
Ai muncit o vară ca să faci palatul,
Şi acum că-i iarnă faci pe delegatul?!

Dar marele succes de veselie al serii îl obţine d-l C. ORĂŞANU printr'o reuşită parodie a legendei Mănăstirei de Argeş (în care meşterul Manole devine meşterul Aurel, iar „cei nouă meşteri mari, calfe şi zidari" sunt „nouă asistenţi, toţi băieţi leventi").

Cel din urmă ia cuvântul d-l M. MANOILESCU. D-sa observă în evoluţia membrilor 3 faze: 1° cea când lucrează la Gazetă; 2° cea când lucrează la Gazetă şi iau parte la mese şi 3° cea când iau parte numai la mese. D-sa se consideră în ultima fază şi încearcă oarecare melancolie gândindu-se la tâmplele ce au început să albească şi amintindu-şi de fata de 16 ani, care era *Gazeta* în momentul când a cunoscut-o. Pe atunci, spune d-l MANOILESCU, *Gazeta* era săracă. Băieţi tineri veniţi pentru prima dată în Bucureşti, *Gazeta* a reprezentat pentru noi primul contact cu viaţa şi cea dintâi formă de viaţă colectivă. Am putut să credem o clipă că aceasta este lumea în care vom trăi o viaţă întreagă. Azi gândesc şi eu că *Gazeta* constituie o excepţie şi numai o excepţie, pentru vremea ei şi cea de azi. Un val care vine din depărtări şi care pe deasupra superficialităţii care domină astăzi, este un vânt regenerator, caută salvarea tuturor popoarelor în centrele de muncă, insule necuprinse de valul materialismului. *Gazeta Matematică*, reprezintă o continuă reacţiune, o biciuire a moravurilor dela noi, o continuă educare a sufletului românesc.

Matematica reprezintă o seriozitate într'o țară de flecari, o răspundere într'o țară, în care oamenii nu obișnuesc să dea socoteală de ceeace fac, o disciplină într'o țară de dezordine, o verificare într'o țară fără verificare. Ea este școala pe care trebue să o facă românul. Omul fără matematică termină la *«Corso»*, care constitue contrastul cu *Gazeta* noastră. Aceasta este *Gazeta* și acesta este meritul ei istoric, dacă se vor mai găsi și de astăzi în 50 de ani oameni cari să o continue.

Ne-am adunat aci să sărbătorim pe unul din produsele acestei cofetării, care este *Gazeta*. In această floră sau faună colegul IOANOVICI este un exemplar foarte interesant, care reprezintă tot ce e mai esențial în produsele *Gazetei:* pasiunea științei și construcției. Profesor căutat de elevi el este în acelaș timp și constructorul, realizatorul. El nu va privi niciodată cu melancolie realizarea unei vieți, căci dela *Bucur Ciobanul* nu sunt mulți cari să fi făcut atât pentru acest oraș, care e Bucureștiul.

Din astfel de insule ca *Gazeta Matematică,* puse la un loc, va ieși într'o zi, care nu poate să întârzie, punctele de sprijin, pe care va trăi statul nostru românesc. El trebue să răsară într'o zi ca împlinirea idealului, care este și astăzi o virtualitate. Atunci câteva puncte luminoase se vor detașa. Printre ele, scris cu litere de foc, va sta numele acesta simplu : *«Gazeta Matematică».*

La ora $11^1/_2$ ne ridicăm dela masă. Se formează mai multe grupuri, unele mai mari, altele mai mici, după interesul pe care-l reprezintă punctul central. D-nul CEZAR ORĂȘANU în vervă ca întotdeauna spune anecdote și calomnii pe socoteala *Gazetei* (cea de 40 de ani). Un grup numeros se formează în jurul d-lui V. BRUCKNER. D-sa s'a întors tocmai dela Moscova și toți sunt curioși să afle amănunte dintr'o călătorie atât de rară.

Ca reporter corect plec cel din urmă. In față la *«Royal»* întâlnesc un grup numeros. Sunt o parte din membrii societății noastre, ce nu se îndură să se despartă și ascultă o nouă anecdotă a d-lui ORĂȘANU.

Ca la toate mesele noastre a fost căldură multă și s'a glorificat această *divină Matematică,* fără de care nici o realizare de seamă nu este posibilă, în orice domeniu de activitate. Și pentrucă profanii ar putea considera această afirmare ca interesată și nedreaptă mă voi adresa la cineva din afară de specialitatea noastră. Mă gândesc la subtilul poet PAUL VALÉRY și anume mă urmărește un discurs, pe care l-a ținut acum trei ani la Academia Franceză, pentru omagierea lui GOETHE. GOETHE nu a fost geometru. El însuși se considera incapabil de a opera în orice mod prin semne și cifre. Și totuși VALÉRY l-a surprins în flagrant delict de intenție geometrică, găsind o chemare ciudată la un ajutor matematic, și chiar de un ordin mai înalt, în faimosul său memoriu asupra Metamorfozei Plantelor. GOETHE gândește că transformările care se observă în plante ar putea să se explice combinând forțele elementare și legăturile care acționează în producția vegetală și se exprimă în următorii termeni: „Sunt convins că urmând acest drum se va ajunge să se explice formele atât de variate ale florilor și fructelor. Numai ar trebui ca noțiunile de *extensiune,* de *contracțiune,* de *compresiune* și de *anastomoză* să fie bine fixate *și să poată fi mânuite ca formule algebrice,* pentru a le întrebuința când se poate". Este imposibil, exclamă VALÉRY, să se dorească și să se definească mai clar o varietate de calcul simbolic analog cu acelea pe care dinamica și fizica le instituе și le folosește în mod curent.

Și revenind la neamul nostru românesc, voiu aminti un lucru, pe care unii nu îl vor fi știind. MIHAIL EMINESCU a simțit într'o perioadă a vieții lui nevoia de a face studii aprofundate de calcul diferențial și integral și a fost convins că *fără Matematică nu suntem în stare să pătrundem adevărata fire a lucrurilor.*

N. BOTEA.

„FORMULE DE M. BOTESU DE JASSY“

In anul 1872 renumitul matematician belgian E. CATALAN a publicat în volumul 34 al Buletinului Academiei de Ştiinţe din Bruxelles un memoriu cu titlul de mai sus. Acolo stabileşte câteva formule pentru transcendenta lui EULER, care e diferenţa dintre primii n termeni ai seriei armonice şi $\log n$. CATALAN porneşte în dezvoltările lui de la formula, care o numeşte a lui BOTEZ şi e următoarea :

$$\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} = \log 2 - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \frac{1}{2^p} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p}{(2n+1)(2n+2)\ldots(2n+p)}.$$

Pe atunci, la noi, acei cari se ocupau cu matematicele nu făceau lucrări originale ; numai EM. BACALOGLU publicase între anii 1859 şi 1862 câteva articole în *Archiv* şi în *Zeitschrift der Mathematik*. De aceea lucrarea lui BOTEZ are pentru noi importanţă : e printre primele lucrări matematice originale şi prima care a fost luată în consideraţie în străinătate şi a provocat o altă lucrare.

N. ST. BOTESŬ nu a făcut ca BACALOGLU studii speciale în străinătate ; a fost un autodidact ; titlul lui era modest : «vechiŭ elevŭ alŭ Liceuluĭ din Iassy» ; l-a absolvit în 1860. Între anii 1856 şi 1860 cursul superior al acestui liceu era o şcoală de «învăţătură înaltă». Aci era profesor IOAN POPP, din pleiada lui BĂRNUŢIU, om de seamă, inginer cu studii superioare de la Politechnica din Viena, care preda, nu numai matematicele, dar şi lecţiuni elementare de inginerie. Ţara avea pe atunci mare nevoe de ingineri şi elevii lui POPP erau apreciaţi şi foarte căutaţi ca atari. Aşa şi-a început BOTEZ cariera inginerească. In 1872, când a descoperit formule, era «Conductore Cl. I în corpulŭ Inginerilorŭ de ponţi şi şiosele».

Ca foarte mulţi ingineri era pasionat de matematici, îl interesa seria armonică. Ştia că divirgenţa ei se probează aşezând termenii în grupuri, în număr infinit, unde suma termenilor din fiecare grup e mai mare ca $\frac{1}{2}$. Această limită inferioară a sumei termenilor unui grup nu-l mulţumea ; voia o expresie precisă pentru suma termenilor grupului general şi a răuşit să o obţină ; e dată de formula de sus. Ea arată că suma a n termeni consecutivi din seria armonică, cuprinşi

între al n-lea şi al $(2n + 1)$-lea termen, tinde spre $\log 2$ când n creşte la infinit.

Cercetările le-a publicat într'o broşură: *„Proprietatea Seriei armonice cu utilitatea ei scienţifică cercetată, disvălită şi demonstrată prin Analisa elementare*[1]*"*. Această broşură împreună cu o traducere franceză a fost trimeasă Academiei belgiene, unde CATALAN a luat cunoştinţă de dânsa.

Lucrarea are unele desvoltări prea lungi, neobişnuite în memoriile matematice, calcule numerice nu prea utile şi unele expuneri ce trădează lipsuri în cultura matematică, dar aceste defecte, explicabile de altfel, nu ne pot împiedeca să apreciem o logică sigură, ingeniozitatea şi metoda riguroasă cu care a atacat şi demonstrat teoremul. Rezultatul e o formulă interesantă, care la noi ar trebui popularizată cu ocazia cursurilor unde se vorbeşte de Seria armonică.

A. MYLLER.

CĂRŢI VECHI DE MATEMATICĂ

In Biblioteca D-lui Inginer D. LEONIDA se găsesc legate la un loc două aritmetici, format mic de 65 × 120 partea tipărită, apărută acum 376 de ani.

Prima din acestea este întitulată: **„Arithmetices** | *erotemata pverilia.* | *In quibus sex species huius utilissimae artis, & Regula, quam* | *uocant, Detri, breuiter & perspi* | *cue tradintur. In gratiam & u* | *sum scholarum puerilium Lati* | *narum collecta, & in lucem* | *iam recens edita, à* | **Luca Lossio** *Luneburgensi.* | *Cum Gratia & Priuilegio.* | *Franc. Apud Haered, Chr. Egen* | *Anno MDLIX"*.

Cartea are formatul mic 125 × 65 mm şi conţine 63 pagini numai. Ea începe cu o Prefaţă, plină de consideraţiuni religioase, şi e încheiată la Luneburg în 7 Februarie 1557. Cartea este paginată numai pe foi.

1) A se vedea şi *Cererea* No. 21, Vol. XXI, pag. 450 şi răspunsul ei în Vol. XXVII, pag. 123, al *Gazetei Matematice*.

I. I.

Aritmetica este ştiinţa numerelor şi a socotelilor. Numărul este o mulţime de unităţi colectate. Numerele 1 — 9 sunt *digitus;* acestea înmulţite cu 10 sunt *articulus.* Din amestecul lor iese *numerus compositus.* Aritmetica are şase *species:* adunarea, scăderea, înmulţirea, progresiile şi regulile de trei. Se arată cum se scriu numerele cu cifrele arabe şi cum se fac operaţiunile aritmetice. Ele se fac ca şi azi, dar mai băbeşte. Aşa la scădere când scăderea elementară nu e posibilă se scrie un 1 înaintea cifrei descăzutului şi se şterge cifra precedentă scriind alta cu 1 mai puţin. Operaţiunilor li se fac probe.

Impărţirea se face ca şi azi, numai dispoziţia de calcul este alta. Iată cum se face împărţirea lui 2602357 prin 4307, care dă câtul 604 şi restul 929:

129	
2228129	
2602357	929
4307	4307
4307	604
4307	

Progresiunile au numai două pagini. Se trece la *Regula Detri* sau *Regula Mercatorum,* unde se dau mai multe exemple.

La finele Aritmeticii sunt tabele cu numele latine ale numerelor până la 21000000 numit *Ducenties uicies centena milia,* scris roman astfel: CCXXCM. Arată apoi cum se numesc numeralele *distributive, ordinale, adverbiale.* Cartea se termină cu tabele de măsuri, greutăţi şi monede. Nu e nimic despre fracţii.

In urma acestei cărţi este legată alta cam de acelaşi format, intitulată:

Rvdimen | ta arithmeticae | practicae a Doctor | re NICOLAO MEDLERO captvi | tyronum accomodata & iam | denuo locupletius acts | corectius edita. | Indicem Versa | pagella inucnics. | Witebergae | Anno | 1550. |

Din această carte nu sunt decât 110 pagini; tabla de materii arată că lipsesc însă puţine.

După o Prefaţă încheiată la 8 August 1548, autorul defineşte Aritmetica ca ştiinţa numerelor şi îi atribuie părţile: numeraţia, adunarea, scăderea, dublarea, înjumătăţirea, înmulţirea şi împărţirea.

Toate sunt succint tratate şi explicate, afară de ultimele două care au oarecare dezvoltare. Toate operaţiile se fac cam ca şi azi, afară de împărţire care se dispune altfel, şi anume ca în cartea de care am vorbit în Anul XXXIX, pag. 386.

După operaţiuni se tratează Regulile de Trei, şi cea de Societate. Urmează apoi fracţiile ordinare, operaţiile lor, Regula falşelor poziţiuni, proporţii, progresiuni. La fine se arată cum se extrag rădăcinile patrate şi cubice. Toate chestiunile sunt tratate sumar.

I. IONESCU.

ASUPRA SUMEI UNOR SERII

Seriile de care vreau să mă ocup au termenul general:

$$(1) \qquad U_n = \frac{n^m}{a^{n-1}} \qquad (m = 1,2,\ldots m).$$

Suma acestor serii a fost calculată de D-l GR. MOISIL în cazurile particulare $m = 1$, 2 şi 3, într'un articol din «R. M. T.» Vol. VI, pag. 131. Pentru cazul general D-sa dă numai o indicaţie, fără a stabili forma generală a coeficienţilor ce intră în expresia acestor sume.

In cele ce urmează îmi propun să fac tocmai acest lucru, însă pe o cale diferită de a D-lui MOISIL.

Să facem transformarea: $x = \frac{1}{a}$. Seria devine:

$$(2) \qquad S_m = \sum_{n=1}^{\infty} n^m x^{n-1} = 1 + 2^m x + 3^m x^2 + \ldots n^m x^{n-1} + \ldots$$

Aceasta e o serie *întreagă,* convergentă în interiorul cercului $|x| = 1$, deci seriile obţinute prin derivare vor fi convergente în acelaşi domeniu ca şi seria (2).

Pentru $m = 0$, obţinem seria geometrică:

$$S_0 = 1 + x + x^2 + \ldots x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

Să înmulțim această relație cu x și să derivăm. Găsim:

$$S_1 = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots nx^{n-1} + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Repetăm aceiași operație și obținem succesiv:

$$S_2 = \sum_1^\infty n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}\ ;\ S_3 = \sum_1^\infty n^3 x^{n-1} = \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}\ ^{1})$$

$$S_4 = \sum_1^\infty n^4 x^{n-1} = \frac{1+11x+11x^2+x^3}{(1-x)^5}\ ;\ S_5 = \sum_1^\infty n^5 x^{n-1} =$$

$$= \frac{1+26x+66x^2+26x^3+x^4}{(1-x)^6}.$$

Din aceste câteva exemple se vede că sumele acestea se prezintă sub formă interesantă. Gradul polinomului dela numărător e cu o unitate mai mic decât indicele lui S, iar puterea lui $(1-x)$ la numitor, cu o unitate mai mare decât același indice. Această observație ne va permite să scrim în general:

$$(3)\quad S_m = \frac{P_{m-1}(x)}{(1-x)^{m+1}} = \frac{Q^0_{m-1} + Q^1_{m-1}x + Q^2_{m-1}x^2 + \ldots Q^{m-1}_{m-1}x^{m-1}}{(1-x)^{m+1}}$$

unde Q^i_{m-1} $(i=0, 1 \ldots m-1)$ sunt coeficienții polinomului $P_{m-1}(x)$.

Prin înmulțirea lui S_m cu x și derivare obținem pe S_{m+1}:

$$S_{m+1} = \frac{\left[Q^0_{m-1}+2Q^1_{m-1}x+3Q^2_{m-1}x^2+\ldots m\,Q^{m-1}_{m-1}x^{m-1}\right](1-x)^{m+1}+(m+1)(1-x)^m x P_{m-1}}{(1-x)^{2m+2}}$$

$$= \frac{\left[Q^0_{m-1}+2Q^1_{m-1}x+3Q^2_{m-1}x^2+\ldots mQ^{m-1}_{m-1}x^{m-1}\right](1-x)+(m+1)x\left[Q^0_{m-1}+Q^1_{m-1}x+\ldots Q^{m-1}_{m-1}x^{m-1}\right]}{(1-x)^{m+2}}$$

Dar pe S_{m+1} îl putem scrie ca și pe S_m:

$$S_{m+1} = \frac{P_m(x)}{(1-x)^{m+2}} = \frac{Q^0_m + Q^1_m x + \ldots Q^m_m x^m}{(1-x)^{m+2}}.$$

1) In articolul citat suma $S_3\left(x = \frac{1}{a}\right)$ e dată greșit datorită unei erori de calcul.

BIBLIOTECA CENTRALA ASOCIAȚIUNII SIBIIU

Identificând numărătorii celor două expresii ale lui S_{m+1}, găsim următoarele relații între coeficienți:

$$
\begin{aligned}
&Q_m^0 = Q_{m-1}^0 = \ldots Q_0^0 = 1 \\
&Q_m^1 = 2Q_{m-1}^1 + mQ_{m-1}^0 \\
&Q_m^2 = 2Q_{m-1}^2 + (m-1)\,Q_{m-1}^1 \\
&Q_m^3 = 4Q_{m-1}^3 + (m-2)\,Q_{m-1}^2 \qquad (4) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&Q_m^{m-1} = mQ_{m-1}^{m-1} + 2Q_{m-1}^{m-2} \\
&Q_m^m = Q_{m-1}^{m-1} = \ldots Q_0^0 = 1.
\end{aligned}
$$

Aceste relații ne vor permite să găsim forma generală a coeficienților. In adevăr în Q_m^1 să facem pe m succesiv egal cu $1, 2, 3 \ldots m$. Vom avea $(Q_{m-1}^0 = 1)$:

$$
\begin{array}{ll}
Q_1^1 = 1 & 2^{m-1} \\
Q_2^1 = 2Q_1^1 + 2 & 2^{m-2} \\
Q_3^1 = 2Q_2^1 + 3 & 2^{m-3} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
Q_{m-1}^1 = 2Q_{m-2}^1 + m - 1 & 2 \\
Q_m^1 = 2Q_{m-1}^1 + m &
\end{array}
$$

Dacă înmulțim în prima egalitate cele două părți cu 2^{m-1}, în a doua cu 2^{m-2} etc. și adunăm, găsim:

$$Q_m^1 = m + 2(m-1) + 2^2(m-2) \ldots 2^{m-2}.2 + 2^{m-1}.1$$

$$\therefore\ 2\,Q_m^1 = 2m + 2^2(m-1) + 2^3(m-2) + \ldots 2^{m-1}.2 + 2^m.1.$$

Scăzând relațiile obținem:

$$Q_m^1 = -m + 2 + 2^2 + \ldots 2^{m-1} + 2^m = 2^{m+1} - (m+2).$$

Să calculăm acum coeficientul lui x^2 din $P_m(x)$. In Q_m^2 vom da lui m valori dela 2 la m:

$$Q_2^2 = 1 = 2^2 - 3 \qquad 3^{m-2}$$

$$Q_3^2 = 3Q_2^2 + 2Q_2^1 = 3Q_2^2 + 2(2^3 - 4) \qquad 3^{m-3}$$

$$Q_4^2 = 3Q_3^2 + 3Q_3^1 = 3Q_3^2 + 3(2^4 - 5) \qquad 3^{m-4}$$

. . . . . .

$$Q_{m-1}^2 = 3Q_{m-2}^2 + (m-2)Q_{m-2}^1 = 3Q_{m-2}^2 + (m-2)(2^{m-1} - m) \qquad 3.$$

$$Q_m^2 = 3Q_{m-1}^2 + (m-1)Q_{m-1}^1 = 3Q_{m-1}^2 + (m-1)[2^m - (m+1)]$$

Inmulțim relația I-a cu 3^{n-2}, a II-a cu 3^{n-3} etc. și adunăm:

$$Q_m^2 = (m-1)[2^m - (m+1)] + 3(m-2)(2^{m-1} - m) + \ldots + 3^{m-3} \cdot 2(2^3 - 4) + 3^{m-2}(2^2 - 3).$$

Vom calcula separat sumele:

$$A_1 = 2^m(m-1) + 3 \cdot 2^{m-1}(m-2) + \ldots 3^{m-3} 2^3 \cdot 2 + 3^{m-2} \cdot 2^2 \cdot 1$$

$$A_2 = (m+1)(m-1) + 3m(m-2) + 3^2(m-1)(m-3) + \ldots + 3^{m-3} \cdot 4 \cdot 2 + 3^{n-2} \cdot 3 \cdot 1.$$

Din A_1 deducem:

$$3A_1 = 3 \cdot 2^m(m-1) + 3^2 2^{m-1}(m-2) + \ldots + 3^{m-2} \cdot 2^3 \cdot 2 + 3^{m-1} \cdot 2^2 \cdot 1$$

$$2A_1 = 2^{m+1}(m-1) + 3 \cdot 2^m(m-2) + \ldots + 3^{m-3} \cdot 2^4 \cdot 2 + 3^{m-2} \cdot 2^2 \cdot 1$$

și prin scădere:

$$A_1 = -2^{m+1}(m-1) + 3 \cdot 2^m + 3^2 \cdot 2^{m-1} + \ldots + 3^{m-2} \cdot 2^3 + 3^{m-1} \cdot 2^2 = 3^m \cdot 2^2 - 2^{m+1}(m+2).$$

Pentru calculul lui A_2 vom scrie:

$$A_2 = (m+1)m + 3m(m-1) + 3^2(m-1)(m-2) + \ldots 3^{m-3} \cdot 4 \cdot 3 + 3^{m-2} \cdot 3.2$$

$$- [(m+1) + 3m + 3^2(m-1) + \ldots + 3^{m-3} \cdot 4 + 3^{m-2} \cdot]3 = A'_2 - A''_2.$$

Insă:

$$3A'_2 - A'_2 = 2A'_2 = -(m+1)m + 2[3m + 3^2(m-1) + \ldots + 3^{m-1} \cdot 3]$$

sau:

$$A'_2 = -\frac{(m+1)m}{2} + A''_2 + 3^m - (m+1) = A''_2 + 3^m - \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

$$\therefore \quad A_2 = A'_2 - A''_2 = 3^m - C_{m+2}^2.$$

Rezultă:

$$Q_m^2 = A_1 - A_2 = 3^m \cdot 4 - 2^{m+1}(m+2) - 3^m + C_{m+2}^2$$

$$\therefore \quad Q_m^2 = 3^{m+1} - 2^{m+1} C_{m+2}^1 + C_{m+2}^2.$$

Dacă facem un calcul analog pentru Q_m^3 găsim:

$$Q_m^3 = 4^{m+1} - 3^{m+1} C_{m+2}^1 + 2^{m+1} C_{m+2}^2 - C_{m+2}^3.$$

Din expresiile acestor coeficienți calculați, se vede că forma generală este:

$$(5) \qquad Q_m^k = (k+1)^{m+1} - k^{m+1} C_{m+2}^1 + \ldots$$

$$+ (-1)^\lambda (k-\lambda+1)^{m+1} C_{m+2}^\lambda + \ldots + (-1)^k C_{m+2}^k.$$

Făcând aci pe $k = 0, 1, 2, 3$ regăsim expresiile lui Q_m^0, Q_m^1, Q_m^2, Q_m^3. Dacă substituim lui k pe $(k+1)$, dăm peste expresia lui Q_m^{k+1}.

* * *

Analogia acestor coeficienți cu coeficienții binomiali se vede din sumele S_2, S_3, S_4, S_5. Voiu demonstra că și în cazul general avem:

$$Q_m^k = Q_m^{m-k}.$$

In «G. M.» Vol. XXXV pag. 311, se arată că dacă $n \leqslant m$ atunci:

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p [a + (n-p) r]^{m-1} = 0$$

unde a și r sunt numere oarecare. Să punem în loc de n: $(n+2)$. Vom avea, pentru $m = n+2$:

$$\sum_{p=0}^{m+2} (-1)^p [a + r(m+2-p)]^{m+1} = 0.$$

Dacă facem aci: $p = \lambda$; $r = 1$; $a = -(m-k+1)$ obținem:

$$\sum_{\lambda=0}^{m+2} (-1)^\lambda C_{m+2}^\lambda (k-\lambda+1)^{m+1} = 0$$

sau:

$$\sum_{\lambda=0}^{k} (-1)^\lambda C_{m+2}^\lambda (k-\lambda+1)^{m+1} - \sum_{\lambda=k+2}^{m+2} (-1)^{m+\lambda} C_{m+2}^\lambda (\lambda-k-1)^{m+1} = 0.$$

Insă $m + k$ şi $m - k$ fiind de aceeaşi paritate, putem scrie:

$$\sum_{\lambda=0}^{k} (-1)^{\lambda} C_{m+2}^{\lambda} (k-\lambda+1)^{m+1} - \sum_{\lambda=0}^{m-k} (-1)^{\lambda} C_{m+2}^{\lambda} (m-k-\lambda+1)^{m+1}$$

$$= Q_m^k - Q_m^{m-k} = 0. \qquad \text{Q. E. D.}$$

Rezultă că e suficient să se calculeze coeficienţii până la jumătatea numărului de termeni ca şi la binomul lui NEWTON.

Putem calcula şi suma acestor coeficienţi dacă notăm:

$$R_m = \sum_{i=0}^{m} Q_m^i$$

şi dacă adunăm relaţiile (4), obţinem:

$$R_m = (m+1)\, R_{m-1}.$$

Dăm aci lui n valorile $1, 2 \ldots m$ şi facem produsul.

Rezultă:

$$R_m = (m+1)!$$

Verificarea se face imediat atât pentru coeficienţi cât şi pentru suma lor pe sumele S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, calculate la început.

* * *

Dacă în expresiile sumelor S_m facem $x = \frac{1}{a}$, revenim la seriile (1), a căror sumă va fi:

$$S'_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^m}{a^{n-1}} = \frac{a^2}{(a-1)^{m+1}} (Q_{m-1}^0 a^{m-1} + Q_{m-1}^1 a^{m-2} + \ldots + Q_{m-1}^{m-1}) = \frac{a^2 P_{m-1}(a)}{(a-1)^{m+1}}.$$

Fracţia aceasta reprezintă suma seriei numai în domeniul ei de convergenţă, adică în exteriorul cercului $|a| = 1$, sau pentru seria S_m în cercul $|x| = 1$.

GH. D. SIMIONESCU
Prof. Lic. Militar „N. Filipescu".

DESPRE ORTOPOL

Incă de acum câțiva ani în urmă, când am studiat *cercurile ortopolare,* mi-am pus următoarea problemă referitoare la ortopol:

Care este locul geometric al ortopolului unei drepte fixe, în raport de un triunghiu variabil, care are 2 laturi fixe iar a treia înfășoară o curbă dată?

Un caz al problemei am tratat într'o notă trimeasă *„Foaiei Matematice"* dela Chișinău, pe vremea când apărea, însă dispariția ei a făcut ca nota să nu apară.

In rândurile de față vreau să iau problema sub alt aspect foarte interesant.

Să facem mai întâi nomenclatura datelor problemei (Fig. No. 1).

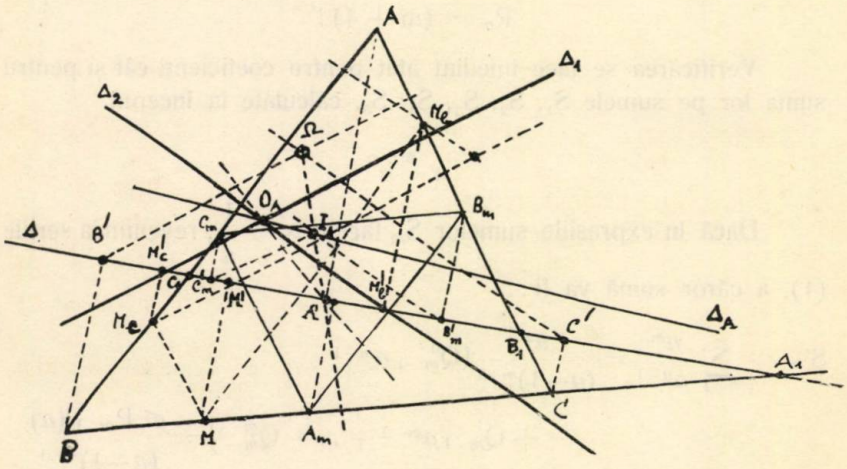


Fig. No. 1.

Un triunghiu ABC și o dreaptă Δ.

A′, B′, C′ proiecțiile lui ABC pe Δ și Ω, ortopolul lui Δ față de ABC.

A_m, B_m, C_m mijloacele laturilor lui ABC; A'_m, B'_m, C'_m proecțiile lor pe Δ.

I_A, I_B, I_C ortopolurile lui Δ față de $AB_m C_m$, $BC_m A_m$, $CA_m B_m$.

Un punct M pe BC. Paralelele din M la AB și AC le taie în M_b și M_c. M'_b, M'_c proecțiile lor pe Δ; Δ_1 și Δ_2 perpendicularele din M'_c pe CA și din M'_b pe AB care se taie în O_A.

Dreapta $O_A I_A$ o notăm cu Δ_A și tae pe Δ în α.

1°. *Care e locul geometric al ortopolului* Ω, *când* AB *și* AC *sunt fixe iar latura* BC *trece printr'un punct fix* M?

Pentru demonstrație e suficient să observăm că între B' și C' pe Δ, este o corespondență omografică. In adevăr la un punct B', prin construcție corespunde un singur punct C' și invers.

Perpendicularele $B'\Omega$ și $C'\Omega$ sunt deci *raze omoloage a două fascicole omografice.* După o teoremă cunoscută, intersecția lor Ω descrie *o conică.* Să vedem natura conicei.

Când BC devine MM_c, ortopolul se găsește pe dreapta Δ_1 și pe perpendiculara din A' la MM_c, adică pe CA. Cum aceste două drepte sunt paralele, înseamnă că în acest caz Ω e la infinit pe direcția Δ_1.

Analog când BC devine MM_b, ortopolul e la infinit pe direcția Δ_2.

Cum conica are puncte la infinit pe 2 direcții este desigur o *hiperbolă.*

Să găsim elementele hiperbolei.

Mai întâi *asimptotele* și *centrul.* Dacă considerăm două poziții ale lui BC, infinit vecine lui MM_c de ex., de o parte și de alta, observăm că corespund pentru ortopol două puncte la infinit, de o parte și de alta a lui O_A.

Cum pe direcția asimptotică Δ_1 hiperbola are 2 puncte la infinit, rezultă că *una din asimptote este chiar* Δ_1.

Analog *a doua este* Δ_2. Deci *centrul hiperbolei este* O_A.

Insă pentru definirea complectă a hiperbolei, mai trebuia un punct. Acesta este M' proecția lui M pe Δ, care corespunde poziției lui BC perpendiculară pe Δ. Acum hiperbola e perfect definită și putem enunța următoarea proprietate:

Locul geometric al ortopolului Ω (Δ, ABC), *când* AB *și* AC *sunt fixe iar* BC *trece printr'un punct fix* M, *este o hiperbolă ce trece prin proecția* M' *a lui* M *pe* Δ *și are ca asimptote pe* Δ_1 *și* Δ_2.

Această hiperbolă H_a s'o numim *hiperbolă ortopolară în raport de punctul* M.

2°. *Hiperbola* H_a *trece prin* A'. A' este ortopolul lui Δ, pentru cazul când BC, devine MA şi deci se găseşte în locul geometric.

Se poate verifica şi bazat pe proprietatea clasică a hiperbolei, referitoare la asimptote. M' este un punct al ei. Al doilea punct de pe Δ se găseşte luând intersecţiile lui Δ cu asimptotele Δ_1, Δ_2, adică M'_c, M'_b şi luând pe Δ dela M'_b spre M', o mărime $\overline{M'_b A'} = \overline{M'_c M'}$.

Ori $\overline{M'_b A'}$ şi $\overline{M'_c M'}$ sunt egale ca proecţii ale segmentelor egale, $\overline{AM_b}$ şi $\overline{MM_c}$, pe Δ.

3°. Să considerăm acum că M *se mişcă pe* BC. Pentru fiecare poziţie a lui M, corespunde câte o *hiperbolă ortopolară* H_a, care e locul geometric al ortopolului Ω când BC se învârte în jurul acelui punct. Toate acestea însă trec prin Ω ortopolul fix al Δ în raport de ABC. Ele mai trec de asemenea prin punctul fix A'.

Să vedem ansamblul acestor hiperbole. Ele trecând prin 2 puncte fixe Ω şi A', satisfac două condiţii. Cum direcţiile asimptotice la toate sunt aceleaşi, perpendiculare pe AB şi AC, înseamnă că mai satisfac încă 2 condiţii, deci total 4. *Au deci un grad de libertate,* adică *formează un fascicol.*

Putem enunţa proprietatea:

Totalitatea hiperbolelor ortopolare referitoare la punctul laturei BC, *formează un fascicol, care are unul din punctele fixe ortopolul* Ω.

4°. *Locul centrelor acestor hiperbole.* Inseamnă a găsl locul lui O_A. Exagonul $MM_b M'_b O_A M'_c M_c$ are laturile de direcţii fixe şi cinci din vârfuri descriu drepte. Al şaselea vârf, adică O_A, descrie şi el tot *o dreaptă.* De altfel este foarte uşor de demonstrat.

Pentru a determina dreapta, să găsim două puncte ale ei. Primul punct este I_A, ca fiind centrul hiperbolei pentru poziţia lui M în mijlocul lui BC, A_m. El este totodată ortopolul lui Δ faţă de $AB_m C_m$ şi se găseşte şi pe A'Ω. Cum B'_m şi C'_m sunt mijloacele lui $\overline{C'A'}$ şi $\overline{A'B'}$, se vede că I_A este mijlocul lui A'Ω.

Al doilea punct să fie α, pe care să vedem cum îl construim.

Să privim Fig. No. 2. Fie M_α punctul pentru care hiperbola H_a are centrul în α, pe dreapta Δ, M'_α proecția sa pe Δ.

M_b , M_c intersecțiile paralelelor din M_α la AB și AC, cu ele; m_α intersecția lui AM_α cu $M_b M_c$. Δ' o direcție perpendiculară pe Δ, care tae AB în L_c și AC în L_b iar m_a mijlocul lui $L_b L_c$.

Pentru ca centrul α să fie pe Δ, trebue ca dreapta $M_b M_c$ să fie perpendiculară pe Δ. Deci e paralelă cu Δ'. Mijlocul m_α al lui $M_b M_c$ este pe dreapta Am_a , care e și diagonală în paralelogramul $AM_b M_\alpha M_c$. Acest punct m_α fiind și mijlocul lui AM_α se găsește pe latura $B_m C_m$ a triunghiului median.

Deci punctul α se construiește astfel:

Fiind dată dreapta Δ, *se duce o perpendiculară* Δ' *pe ea, care tae laturile* AB *și* AC *în* L_c *și* L_b . *Unind vârful* A *cu mijlocul* m_a *al segmentului* $L_b L_c$ *și intersectând această dreaptă cu* $B_m C_m$, *găsim* m_α . *Perpendiculara din* m_α . *la* Δ, *o tae în* α,

Am construit astfel locul centrelor fascicolului de hiperbola H_a .

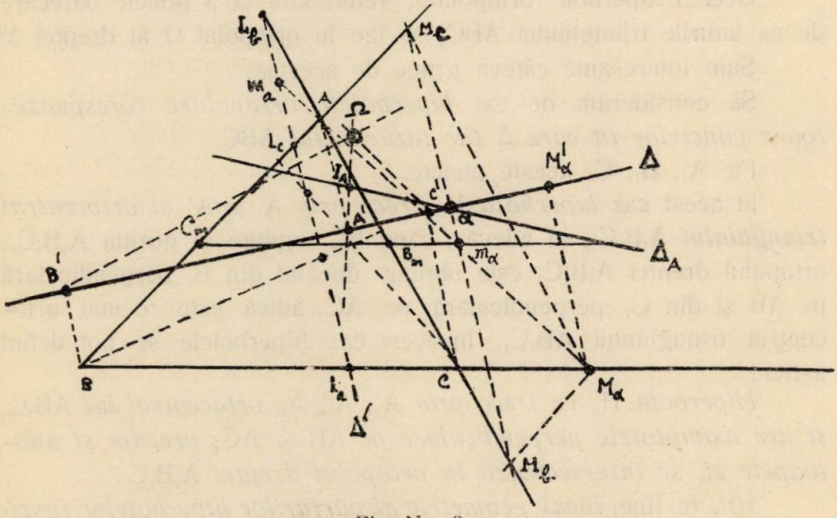


Fig. No. 2.

5°. Se știe că punctele M_α , M_β , M_γ sunt pe o dreaptă și deci, putem scri proprietatea:

Printre hiperbolele fascicolelor H_a , H_b , H_c *referitoare la cele trei laturi, există 3 hiperbole care au centrul pe* Δ. *Ele sunt hiperbolele ortopolare corespunzătoare la cele 3 puncte în linie dreaptă.*

6°. Se observă că locul centrelor, Δ_A trece prin mijlocul I_A al coardei fixe $A'\Omega$ şi deci e diametru conjugat direcţiei $A'\Omega$ care e perpendiculară pe BC. Deci *hiperbolele fascicolului* H_a *au un diametru fix, conjugat direcţiei perpendiculare pe* BC.

7°. In cazul când considerăm cele 3 hiperbole H_a, H_b, H_c referitoare la punctele A_m, B_m, C_m, acestea au centrele respectiv în I_A, I_B, I_C mijloacele segmentelor $\overline{A\Omega}$, $\overline{B'\Omega}$, $\overline{C'\Omega}$, care sunt pe o paralelă la Δ. Deci:

Hiperbolele ortopolare în raport de mijloacele laturilor, au centrele pe o paralelă la dreapta Δ.

8°. Se observă că *axele hiperbolelor fascicolului* H_a *sunt paralele cu bisectoarele unghiului* A. Analog pentru axele fascicolelor H_b, H_c, care sunt paralele cu bisectoarele unghiurilor B şi C.

9°. Să considerăm cele 3 fascicole H_a, H_b, H_c. Toate hiperbolele acestor fascicole trec prin ortopolul Ω al lui Δ.

Deci 3 hiperbole ortopolare, referitoare la 3 puncte oarecare de pe laturile triunghiului ABC, se tae în ortopolul Ω al dreptei Δ.

Sunt interesante câteva grupe de acestea.

Să considerăm de ex. *hiperbolele ortopolare corespunzătoare punctelor în care* Δ *tae laturile lui* ABC.

Fie A_1, B_1, C_1 aceste puncte.

In acest caz *hiperbola* H_a *trece prin* A_1 *şi* A' *şi ortocentrul triunghiului* $A_1B_1C_1$. In adevăr, când BC ajunge în poziţia $A_1B_1C_1$, ortopolul dreptei $A_1B_1C_1$ este obţinut ducând din B_1 perpendiculară pe AB şi din C_1 perpendiculară pe AC, adică este tocmai ortocentrul triunghiului AB_1C_1. In acest caz hiperbolele se pot defini astfel:

Hiperbola H_a *ce trece prin* A_1, A', A_h *ortocentrul lui* AB_1C_1 *şi are asimptotele perpendiculare pe* AB *şi* AC, *precum şi analoapele ei, se intersectează în ortopolul dreptei* $A_1B_1C_1$.

10°. In fine, *locul geometric al vârfurilor hiperbolelor fascicolului* H_a *este tot o hiperbolă, care are ca diametru dreapta* Δ_A, *conjugat direcţiei bisectoarei interioare a unghiului* A: *Această hiperbolă trece prin ortopolul* Ω. Proprietatea se demonstrează analitic imediat şi voiu reveni într'o notă.

LT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

ASUPRA UNOR SUME TRIGONOMETRICE

I. In cele ce urmează voiu face sumele

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(m+k)x \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} \cos(m+k)x$$

şi voiu da unele aplicaţii.

Voiu considera identitatea

$$\sin(m+n)x = \sin[(m+n-1)+1]x$$

$$= \sin(m+n-1)x\cos x + \sin x\cos(m+n-1)x$$

$$= 2\cos x \sin(m+n-1)x - [\sin(m+n-1)x\cos x - \sin x\cos(m+n-1)x].$$

$$(1) \quad \therefore \sin(m+n)x = 2\cos x \sin(m+n-1)x - \sin(m+n-2)x$$

analoagă cu identitatea

$$\sin(m+1)x = \sin mx \,.\, 2\cos x - \sin(m-1)x$$

lui THOMAS SIMSON.

Fac în (1) pe rând $n = 1, 2, \ldots, n-1$ şi obţin

$$(2) \quad \begin{cases} \sin(m+1)x = 2\cos x \sin mx - \sin(m-1)x \\ \sin(m+2)x = 2\cos x \sin(m+1)x - \sin mx \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \sin(m+n-1)x = 2\cos x \sin(m+n-2)x - \sin(m+n-3)x. \end{cases}$$

Adun relaţiile (2) la (1) şi obţin

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{n} \sin(m+k)x = 2\cos x \sum_{k=0}^{n-1} \sin(m+k)x - \sum_{k=-1}^{n-2} \sin(m+k)x$$

o identitate interesantă.

Fie

$$(4) \qquad S = \sum_{k=1}^{n} \sin(m+k)x$$

obţin pentru

$$(5) \quad \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(m+k)x = S + \sin mx - \sin(m+n)x \\ \sum_{k=-1}^{n-2} \sin(m+k)x = S + \sin mx + \sin(m-1)x - \sin(m+n-1)x - \sin(m+n)x. \end{cases}$$

Ținând seama de (4) și (5), (3) se scrie

$$2S(1-\cos x)=\cos x \sin mx-\cos x \sin(m+n)x-\sin mx+$$
$$\sin x \cos mx-\cos(m+n)x \sin x+\sin(m+n)x.$$
$$\therefore 2S(1-\cos x)=(1-\cos x)[\sin(m+n)x-\sin mx]$$
$$+\sin x[\cos mx-\cos(m+n)x].$$
$$\therefore S \sin\frac{x}{2}=\sin\frac{nx}{2}\left[\sin\frac{x}{2}\cos\frac{2m+n}{2}x+\cos\frac{x}{2}\sin\frac{2m+n}{2}x\right]$$

$$(6)\quad \therefore S=\sum_{k=1}^{n}\sin(m+k)x=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{2m+n+1}{2}x.$$

Pentru a calcula și pe

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(m+k)x$$

plec dela identitatea

$$(7)\quad \cos(m+n)x=2\cos x\cos(m+n-1)x-\cos(m+n-2)x$$

stabilită analog ca (1) și ajung la

$$(8)\quad \sum_{k=1}^{n}\cos(m+k)x=2\cos x\sum_{k=0}^{n-1}\cos(m+k)x-\sum_{k=-1}^{n-2}\cos(m+k)x$$

identitatea analoagă cu (3). Insemn pe

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(m+k)x=S'$$
$$\therefore \sum_{k=0}^{n-1}\cos(m+k)x=S'+\cos mx-\cos(m+n)x$$
$$\therefore \sum_{k=-1}^{n-2}\cos(m+k)x=S'+\cos mx+\cos(m-1)x-\cos(m+n-1)x-\cos(m+n)x$$

și în mod analog obțin din (8) relația căutată:

$$(9)\quad S'=\sum_{k=1}^{n}\cos(m+n)x=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{2m+n+1}{2}x.$$

II. **O altă metodă.** Plec dela expresiunea

$$(10)\quad E=\sum_{k=1}^{n}\cos(m+k)x+i\sum_{k=1}^{n}\sin(m+k)x \qquad (i=\sqrt{-1})$$

$$E=\sum_{k=1}^{n}[\cos(m+k)x+i\sin(m+k)x]$$

și ținând seama de identitatea cunoscută

$$\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha}$$

pot scrie

$$E=\sum_{k=1}^{n}e^{i(m+k)x}=e^{imx}\sum_{k=1}^{n}(e^{ix})^{k}$$

$$\therefore\quad E=e^{imx}(e^{ix}+e^{i2x}+\ldots+e^{inx})$$

$$\therefore\quad E=e^{imx}\frac{e^{i(n+1)x}-e^{ix}}{e^{ix}-1}=\frac{e^{i(m+n+1)x}-e^{i(m+1)x}}{e^{ix}-1}$$

sau

$$E=\frac{\cos(m+n+1)x-\cos(m+1)x+i[\sin(m+n+1)x-\sin(m+1)x]}{\cos x-1+i\sin x}$$

Inmulțesc cu conjugata numitorului, fac calculele și obțin în fine

$$(11)\quad E=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{2m+n+1}{2}x+i\sin\frac{2m+n+1}{2}x\right).$$

Egalez părțile reale, și coeficienții lui i din (10) și (11) și obțin

$$(12)\quad\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin(m+k)x=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{2m+n+1}{2}x\\[2ex]\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(m+k)x=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{2m+n+1}{2}x\end{cases}$$

relațiile căutate.

BIBLIOTECA CENTRALA „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

III. **Aplicații.** Din identitățile (12) se deduc alte identități trigonometrice și anume:

1°. Prin împărțire obțin identitatea

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \sin(m+k)x}{\sum_{k=1}^{n} \cos(m+k)x} = \operatorname{tg} \frac{2m+n+1}{2} x,$$

în care, dacă fac $m = 0$, $x = a$ și pun $2n$ în loc de n regăsesc un caz particular

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=2n} \sin ka}{\sum_{k=1}^{k=2n} \cos ka} = \operatorname{tg} \frac{2n+1}{2} a$$

problema 3860, propusă de D. I. MURĂROIU în *Gazeta Matematică* anul XXXV, No. 5 și rezolvată în anul XXXVI, la pagina 71.

2°. Prin adunarea identităților (12) se obține

$$\sum_{k=1}^{n} [\sin(m+k)x + \cos(m+k)x] = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \left[\sin \frac{2m+n+1}{2} x + \cos \frac{2m+n+1}{2} x \right]$$

și ținând seama de relația trigonometrică

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$$

pot scrie

$$(14) \quad \sum_{k=1}^{n} [\sin(m+k)x + \cos(m+k)x] = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \sqrt{2} \cos\left(\frac{2m+n+1}{2} x - \frac{\pi}{4} \right).$$

In mod analog dacă le scad relațiile (12), obțin

$$(15) \quad \sum_{k=1}^{n} [\sin(m+k)x - \cos(m+k)x] = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \sqrt{2} \sin\left(\frac{2m+n+1}{2} x - \frac{\pi}{4} \right).$$

Inmpart pe (15) cu (14) şi obţin identitatea:

$$(16)\qquad \frac{\sum_{k=1}^{n}[\sin(m+k)x-\cos(m+k)x]}{\sum_{k=1}^{n}[\sin(m+k)x+\cos(m+k)x]}=\operatorname{tg}\left(\frac{2m+n+1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right).$$

In cazul particular $m=0$, regăsesc problema 904 propusă de D-l EMIL MEREUŢĂ în *Revista Matematică* din Timişoara anul X, No. 2.

3⁰. Dacă în identităţile remarcabile

$$(17)\qquad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n}\sin(m+kr)x=\dfrac{\sin\dfrac{nrx}{2}}{\sin\dfrac{rx}{2}}\sin\dfrac{2m+r(n+1)}{2}x \\ \sum_{k=1}^{n}\cos(m+kr)x=\dfrac{\sin\dfrac{nrx}{2}}{\sin\dfrac{rx}{2}}\cos\dfrac{2m+r(n+1)}{2}x. \end{cases}$$

Inlocuind pe r cu $-r$ în (17) se obţin

$$(18)\qquad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n}\sin(m-kr)x=\dfrac{\sin\dfrac{nrx}{2}}{\sin\dfrac{rx}{2}}\sin\dfrac{2m-r(n+1)}{2}x \\ \sum_{k=1}^{n}\cos(m-kr)x=\dfrac{\sin\dfrac{nrx}{2}}{\sin\dfrac{rx}{2}}\cos\dfrac{2m-r(n+1)}{2}x. \end{cases}$$

Din identităţile (17) şi (18) se deduc alte identităţi analoage identităţilor (13), (14), (15) şi (16).

4⁰. In baza identităţilor (17) şi (18), problema 840 din *Revista Matematică* din Timişoara propusă de D-l C-TIN V. COSTĂCHESCU în No. 6 anul IX, se rezolvă cu uşurinţă. Problema 840 este: Să se rezolve ecuaţia

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(x-kr)+\sin x+\sum_{k=1}^{n}\sin(x+kr)=a.$$

Putem scrie imediat

$$\frac{\sin\frac{nr}{2}}{\sin\frac{r}{2}}\sin\left(x-\frac{x+1}{2}r\right)+\sin x+\frac{\sin\frac{nr}{2}}{\sin\frac{r}{2}}\sin\left(x+\frac{n+1}{2}r\right)=a$$

făcând în identitățile aplicate $x=1$, $m=x$. Fac calculul și obțin:

$$\sin x=a\frac{\sin\frac{r}{2}}{\sin(2n+1)\frac{r}{2}}$$

$$\therefore\quad x=ar\sin\left[a\frac{\sin\frac{r}{2}}{\sin(2n+1)\frac{r}{2}}\right].$$

In cazul particular $a=0$, soluția ecuației propuse e independentă de r și n și se obține în acest caz $x=k\pi$.

5⁰. Identitățile (17) pot servi la rezolvarea problemelor: 3886 și 3957 propuse în *Gazeta Matematică*.

ION V. MĂTIEȘ
Profesor Alba-Iulia.

PREMIUL „INGINER AL. ROȘU“

D-l AL. A. ROȘU a donat și în anul acesta suma de 500 lei pentru a se acorda, în memoria tatălui său, un premiu pentru activitatea originală cea mai rodnică avută de către abonații elevi de liceu, studenți ai Facultăților, elevi ai școalelor Politechnice și Militare din țară, în cursul Volumului XL, în domeniul geometriei elementare.

Activitatea va consta din articole, note și probleme originale de geometrie elementară.

In cazul când condițiunile impuse nu vor fi îndeplinite, premiul «ING. AL. ROȘU» se va acorda celui mai harnic corespondent al Gazetei, elev de liceu.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL „ING. AL. ROȘU“:
GENERAL GH. BUICLIU, ING. A. IOANOVICI,
AL. A. ROȘU.

NOTE MATEMATICE

30. Cu ocaziunea inaugurării *Casei Gazeta Matematică* s'au primit următoarele două scrisori:

«Cu prilejul inaugurării *Casei Gazeta Matematică*» Redacţia *„Revistei Matematice din Timişoara"* a hotărît să doneze pentru biblioteca *Gazetei Matematice* colecţia sa de 12 volume broşate; volumul I este epuizat, iar volumul XIV îl vom trimite după ce va fi broşat.

„Redacţia „R. M. T." exprimă în acelaşi timp viile sale sentimente de recunoştinţă şi admiraţiune pentru întemeietorii *Gazetei Matematice* şi a *Casei Gazeta Matematică* care începând de acum 40 ani, au răspândit în ţară, dragostea pentru ştiinţele matematice".

Primiţi, etc...

Redactor: (ss) V. ALACI.

„Societatea ştiinţifică dela Şcoala Politecnică din Timişoara", în şedinţa sa de la 18 Februarie 1935, a hotărît, în unanimitate, a dona pentru *Biblioteca Gazetei Matematice* colecţia întreagă de 5 volume din *„Bulletin scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara"* cu prilejul inaugurării *Casei Gazeta Matematică"*.

Totdeodată îşi exprimă bucuria şi admiraţia sa pentru strălucita înfăptuire ce este *„Casa Gazeta Matematică"* de unde vor porni undele spiritului ştiinţific, undele dragostei de ştiinţă şi de Ţară, care vor fi receptate de toate generaţiile ce se vor succeda la infinit, generaţii care vor înălţa mai mult prestigiul şi gloria ştiinţei româneşti.

Onoare, cinste şi recunoştinţă a unui neam întreg, întemeietorilor *Gazetei Matematice* şi corolarului ei care este *„Casa Gazetei Matematice"*.

Primiţi, etc...

Preşedinte: (ss) V. ALACI.

31. *Sur les médianes du triangle.* Soient A_m, B_m, C_m les milieux des côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ d'un triangle ABC; (O) le centre du cercle circonscrit, G le barycentre; m_a, m_b, m_c, les longueurs des médianes AA_m, BB_m, CC_m.

1. Si l'on pose

$$b^2 + c^2 = na^2,$$

n étant un coéfficient positif, les formules classiques relatives aux carrés des médianes du triangle peuvent s'écrire

$$m_a^2 = \left(\frac{2n-1}{4}\right)a^2 \ , \ m_b^2 = \frac{1}{4n}[-(n-2)\,b^2 + 2\,(n+1)\,c^2] \tag{1}$$

$$m_c^2 = \frac{1}{4n}[2\,(n+1)\,b^2 - (n-2)\,c^2]\ ;$$

d'où l'on tire

$$m_b^2 + m_c^2 = \left(\frac{n+4}{4}\right)a^2 \ , \ m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \tfrac{3}{4}\,(n+1)\,a^2. \tag{2}$$

2. Soit P_a l'intersection de la médiane AA_m avec le cercle (O) circonscrit au triangle. On a

$$A_m P_a = \frac{A_m B \,.\, A_m C}{A_m A} = -\frac{a^2}{4m_a}$$

$$= -\frac{4m_a^2}{2n-1} : 4m_a = \frac{m_a}{2n-1} = \frac{AA_m}{2n-1}\ . \tag{3}$$

3. *Cas particuliers.* 1°. Lorsque $n = 2$, le triangle ABC, dont les côtés vérifient la relation $b^2 + c^2 = 2a^2$, est appelé triangle *automédian*.

Dans ce triangle spécial,

$$m_a^2 = \tfrac{3}{4}\,a^2 \ , \ m_b^2 = \tfrac{3}{4}\,c^2 \ , \ m_c^2 = \tfrac{3}{4}\,b^2 \ ,$$

$$\text{et } m_b^2 + m_c^2 = \tfrac{3}{4}\,(b^2 + c^2) = \tfrac{3}{2}\,a^2 = 2m_a^2\,.$$

Le triangle que l'on peut construire avec les médianes de ce triangle est également *automédian*. De plus, en vertu de (3),

$$A_m P_a = \tfrac{1}{3}\,AA_m = GA_m \ , \ \text{et } GP_a = GA.$$

Dans un triangle automédian ABC, *la médiane* AA_m *coupe le cercle circonscrit au symétrique du barycentre* G *par rapport au milieu du côté* BC, *ou au symétrique du sommet* A *par rapport au barycentre* G [1]).

1) Propriété connue.

Le cercle circonscrit au triangle BGC *est égal au cercle circonscrit au triangle fondamental.*

Les points B_m , C_m , G *et* B , C , P_a *se correspondent dans une homothétie* $(G, \frac{1}{2})$ *et le cercle circonscrit au triangle* $AB_m C_m$ *passe par le barycentre* G *du triangle* ABC [1]).

2^0. Lorsque $n = 4$, le triangle ABC est tel que

$$m_b^2 + m_c^2 = 2a^2.$$

Plus généralement, si $n = 4k$,

$$m_b^2 + m_c^2 = (k + 1)\, a^2.$$

3^0. Dans le triangle spécial, où $n = 5$, on a

$$m_a^2 = \tfrac{9}{4}\, a^2 \,,\; m_b^2 = \tfrac{3}{20}\,(4c^2 - b^2) \,,\; m_c^2 = \tfrac{3}{20}\,(4b^2 - c^2),$$

puis

$$m_b^2 + m_c^2 = \tfrac{9}{4}\, a^2 = m_a^2,$$

et, en vertu de (3),

$$A_m P_a = \tfrac{1}{9}\, AA_m = \tfrac{1}{3}\, GA_m = G_a A_m \,,$$

G_a étant le barycentre du triangle BGC.

Dans un triangle ABC, *dont les côtés vérifient la relation* $5a^2 = b^2 + c^2$, *le triangle* BGC *est rectangle en* G [2]).

Le cercle circonscrit au triangle $BG_a C$ *est égal au cercle circonscrit au triangle fondamental.*

V. THÉBAULT.

32. *Patrate şi rădăcinile lor, cu cifre diferite.* In nota Nr. 19 de la pag. 169 am arătat că D-l V. THÉBAULT a publicat, în supliment în *Mathesis,* un tabel al patratelor care se scriu cu cifre diferite. Extrag din acel tabel următoarele patrate la care atât la ele cât şi la rădăcina lor, o cifră nu se întâlneşte de cât o singură dată:

$$2^2 = 4 \;;\; 3^2 = 9 \;;\; 4^2 = 16 \;;\; 7^2 = 49 \;;\; 8^2 = 64 \;;\; 9^2 = 81$$
$$17^2 = 289 \;;\; 18^2 = 324 \;;\; 24^2 = 576 \;;\; 29^2 = 841$$
$$53^2 = 2809 \;;\; 54^2 = 2916 \;;\; 57^2 = 3249 \;;\; 59^2 = 3481 \;;$$
$$72^2 = 5184 \;;\; 79^2 = 6241 \;;\; 84^2 = 7056$$
$$198^2 = 39204 \;;\; 209^2 = 43681 \;;\; 259^2 = 67081 \;;$$
$$567^2 = 321489 \;;\; 807^2 = 651249 \;;\; 854^2 = 723916.$$

1) J. NEUBERG, *Mathesis,* 1889 — 261.

2) Propriété connue.

Se observă că din aceste numere, la următoarele 2:

$$567^2 = 321489 \quad \text{şi} \quad 854^2 = 729316$$

cifrele rădăcinei şi ale pătratului formează un şir de cifre consecutive.

GENERAL GH. BUICLIU.

33. *Asupra unor divizibilităţi.*

Se cunoaşte relaţiunea:

1) $$a^{p(p-1)} - 1 = Mp^2$$

a fiind un întreg nedivizibil cu numărul prim p (vezi „*Culegerea de Probleme*“ sau „*Exercices d'Arithmétique*“ par FITZ-PATRICH).

Deasemenea se cunoaşte generalizarea lui EULER:

2) $$a^{\varphi(p^k)} - 1 = Mp^k$$

$\varphi(p^k)$ fiind indicatorul lui p^k iar k un număr întreg şi pozitiv.

Imi propun a face câteva extinderi.

I) *Dacă* a *şi* b *sunt două numere prime diferite, atunci avem:*

3) $$a^{b(b-1)} + b^{a(a-1)} - 1 = M(ab)^2$$

care se stabileşte uşor cu ajutorul relaţiei 1).

II) *Dacă* a, b, c, ... k, l *sunt numere prime diferite, atunci avem:*

4) $$\Sigma(b, c \ldots k, l)^{a(a-1)} - 1 = M(ab \ldots l)^2$$

şi

5) $$\Sigma a^{bc \ldots l(b-1)(c-1)\ldots(l-1)} - 1 = M(ab \ldots l)^2$$

care se stabilesc analog relaţiei 3).

III) *Dacă* A, B, C, ... K, L *sunt numere prime diferite şi* K *un întreg pozitiv, atunci avem:*

6) $$\Sigma(BC \ldots KL)^{\varphi(A^k)} - 1 = M(AB \ldots L)^k$$

şi

7) $$\Sigma A^{\varphi[(BC \ldots L)^k]} - 1 = M(AB \ldots L)^k$$

cari deasemenea se stabilesc în mod analog, cu ajutorul relaţiei 2).

Simplitatea acestor relaţiuni mă face să cred că, cel puţin parte din ele sunt cunoscute.

MAIOR I. LINTEŞ.

34. *Asupra unor exerciţii.*

1) *Exerciţiul No. 15* din G. M. XL se poate rezolva mai uşor punând condiţiunile:

$$10^7 \leqslant x^{24} < 10^8$$

de unde se vede uşor că:

$$1 < x \leqslant 2.$$

Deci singura soluţie este $x = 2$.

2) *Exerciţiul No. 16,* se poate rezolva mai uşor ţinând seamă de ultimele n cifre ale unui patrat perfect (G. M. XXXVII, No. 10), adică în cazul de faţă, de ultimele 5 cifre.

3) *Exerciţiul No. 17* se poate rezolva mai uşor scriind că:

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) = A^2 \cdot B^2$$

de unde se vede că nu avem soluţie decât, dacă:

$$a^2 + 1 = A \quad \text{şi} \quad a < b$$
$$b^2 + 1 = A \cdot B^2.$$

Apoi se găseşte lesne că:

$$a = 1 \quad \text{şi} \quad b = 7.$$

MAIOR I. LINTEŞ.

35. *Demonstraţia regulei lui* L'HÔPITAL.

Regula lui L'HÔPITAL pentru găsirea valorii ascunse a nedeterminărilor aparente se poate demonstra astfel:

Dacă expresiunea ia forma de $\frac{0}{0}$ atunci avem:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{0}{0} \qquad f(x) = \varphi(x)(x - a);$$

$$F(x) = \psi(x)(x - a) \quad \text{sau} \quad \lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

$$\lim \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)(x - a) + \varphi(x)}{\psi'(x)(x - a) + \psi(x)} = \lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Dacă $\frac{\varphi(x)}{(x)\,\psi}$ este iarăşi o nedeterminare, se ia derivata a doua a numărătorului şi a numitorului, etc.

GRIŞA MARGULIS.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAŢIUNII SIBIIU

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Volumul XLI. No. 1. Partea 2. Ianuarie 1935. New-York. Adunarea din Octomvrie dela New-York, de J. R. KLINE. Congresul matematic din Stokholm, de E. HILLE. COHEN-NAGEL despre logică de J. S. TURNER. Sumare de comunicări.

Mathesis. Tomul XLIX. No. 1—2. Ianuarie-Fevruarie 1935. Gembloux. Chestiuni de aritmetică, de V. THÉBAULT. Construcţia poligonului regulat de 17 laturi de R. GOORMAGHTIGH. Curba secţiunilor plane ale suprafeţelor strâmbe, de J. L. KRAMES. Asupra proecţiunilor axonometrice, de M. DEWECK. Note de geometrie analitică plană, de AD. M. Asupra integrării prin o metodă simbolică a unei ecuaţii cu derivate şi diferenţiale amestecate, de L. BRUWIER. Tratatul despre hosoedre al lui VITO CARAVELLI, de PAUL VER EECKE.

Mathematica. Vol. X. 1935. Cluj 1935. Sur les équations du 1-e ordre. Critère d'unicité, critère de multiplicité, par A. MARCHAND. Sur les équations de FRESNEL, par P. HUMBERT. Sur une équation quadrinôme, par J. DIEUDONNÉ. Deux remarques sur un théorème de M. ROGOSISNKI. Sur l'aproximation des fonctions convexes d'ordre supérieur, par. T. POPOVICIU. Sur certaines propriétés projectives des familles de surfaces, par AL. PANTAZI. Quelques remarques sur les courbes qui sont des complémentaires analitiques, par N. LUSIN. Sur les fonctions méromorphes au voisinage d'un point singulier à l'intérieur d'un angle, par J. SOULA. Sur la représentation intrinseque des surfaces, par G. CĂLUGAREANO. Sur l'intégration d'une equation fonctionelle, par TH. ANGHELUTZA. Sur l'intégration des différentielles totales, par A. DENJOY. Une nouvelle démonstration du théorème de DIRICHLET, par J. C. VIGNAUX. Sur un théorème de LAGUERRE, par T. POPOVICIU. Sur les zéros des polynomes, par N. OBRECHKOFF. Sur des opérations de la Topologie générale, par S. KEMPISTY. Fonctions métasphériques et leur extension, par GH. TH. GHEORGHIU. Remarques sur les solutions asymptotiques des équations différentielles, par T. PEYOVITCH. Sur un problème de M. RUZIEWICZ concernat les ensembles de mesure nulle, par W. SIERPINSKY. Sur la notion d'intégrale d'un substitution linéaire, par B. HOSTINSKY. Sur certaines équations fonctionelles definissant des polynomes, par T. POPOVICIU. La visite de M. EMILLE BOREL en Roumanie, par D. POMPEIU.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXVIII. Fascicola II. August 1934. Buenos Aires. Aplicaţiunile ştiinţifice ale aerofotografiei de J. OLSACHER. Notă despre homotetie şi inversiune, de B. I. BAIDAFF.

Journal de Mathematiques Elémentaires publié par H. VUIBERT. Anul 59. No. 10. Februarie 1935. Paris.

Idem. No. 11. Anul 59. Martie 1935. *Asupra unei proprietăţi generale a conicelor,* de L. LEAU.

Revista Matematică din Timişoara. Anul. XIV. No. 12. Februarie 1935. Timişoara. O metodă pentru calcularea unor produse trigonometrice, de V. ALACI. Domeniul matematicilor în clasificarea lui AUGUSTE COMTE, de N. O. ZAHARIA.

Idem. Anul XV. No. 1. Martie 1935. Sur les bissectrices du triangle, par V. THÉBAULT. Domeniul Matematicilor în Clasificarea lui AUGUSTE COMTE, de N. O. ZAHARIA.

Boletin Matematico. Anul VII. No. 9. Noemvrie 1934. Buenos Aires. Figura polară anarmonică a unui punct relativă la o conică sau cuadrică, de B. I. BAIDAFF. Determinarea maximului şi minimului funcţiunii

$$x^x y^y \ldots s^s (n - x - y \ldots - s)^{n-x-y-\cdots-s},$$ de B. I. BAIDAFF.

Cinci valori interesante ale unei medii generale de B. I. BAIDAFF şi J. B. SOUTO.

Bulletin scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara. Tome V. Fascicola 3–4. Une classe d'equations fonctionelles à solutions simples-discontinues, par V. ALACI. Sur certains emsembles finid, par M. SHAO-LIEN-CHOW. Sur l'équation $\Delta u = \lambda u$, par M. GHERMANESCO. Sur la projection bicentrale, par M. ST. BOTEZ. Sur certains fonctions attachées aux fonctions métasphérique, par GH. TH. GHEORGHIU. Interpretarea măsurătorilor la încercări de materiale, de C. C. TEODORESCU. Quelques questions de Balistique Extérieure par Com. I. LINTEŞ. Sur les efforts dynamiques, par Com. I. LINTEŞ, La refraction astronomique, par G. G. CONSTANTINESCO.

Revista Ştiinţifică „V. ADAMACHI". Vol. XX. No. 4. Decemvrie 1934 Iaşi.

Ştiinţă şi Progres. Anul I. No. 10. Martie 1935. Târgul-Mureş. Despre problema alergătorului, de G. CĂLUGĂREANU.

V. THÉBAULT. *Asupra tablei lui* PITAGORA. (Extras din *Anales de la Société scientifique de Bruxelles.* Supliment la *Mathesis*). Louvain 1935.

CL. SERVAIS. *Sur la géométrie du tétraèdre.* (Supliment la *Mathesis*). Bruxelles.

† TRAIAN LALESCU. *Culegere de Probleme de Geometrie descriptivă.* Ediţia II. Bucureşti 1935.

G. G. CONSTANTINESCU. *La Réfraction astronomique.* (Extras din *„Bulletin scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara"*) Timişoara 1935.

C. BUDEANU. *Sur le fonctionnement d'un appareil déformant.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Academie des sciences* de Paris). 1934.

Gazeta Matematică. Supliment cu exerciţii. Anul I. No. 6. Martie 1935. Bucureşti.

CERERI

246. In *Serbarea şcolară dela Iaşi de* A. D. XENOPOL şi C. ERBICEANU, scrisă cu ocaziunea semicentenarului Academiei Mihăilene în 1885, s'a dat şi lista cărţilor expuse la Expoziţiunea ce se făcuse cu acea ocaziune.

La pagina 285 găsim notată:

2. **Aritmetica** sau **învăţătura socotelilor,** acum întâia oară întocmită în acest chip pentru folosul tinerilor din seminarul socolei de A. TEODORESCU. Iaşi tip. mitrop. 1830.

Bibl. N. VICOL.

10. La pagina următoare găsim notată:

Aritmetică sau **învăţătura socotelilor,** acum întâia oară întocmită în acest chip pentru folosul tinerilor din seminarul Socolei (sic) de A. TEODORESCUL. Iaşi în tipogr. sf. mitropolii 1839.

Bibl. ARCHEREULUI IRIMIA.

Este şi o ediţiune anterioară din 1830. Vezi No. 2.

La pagina 349, printre cărţile din Biblioteca Inalt prea sfinţiei sale Mitropolitului Moldovei şi Sucevei IOSIF, găsim:

64. **Aritmetica** de ANDREI TEODORESCU profesor la seminarul Socola, tipografia metropoliei. Iaşi 1839.

La primele două însemnări sunt diferenţe de ortografie şi de prescurtări de scriere; la ultima se dă titlul mult mai redus. Sunt de fapt două ediţiuni din această Aritmetică? Care sunt titlurile exacte ale lor? Sau e vreo greşală de tipar la date?

In cazul când data de 1830 este justă, această aritmetică ar avea o prioritate de tipărire faţă de a fostului profesor al lui ANDREI TEODORESCU: ION HELIADE RĂDULESCU, apărută în 1832.

I. I.

DIVERSE

Secţiunea Matematică a Societăţii Române de Ştiinţe a ţinut în cursul lunei Martie, următoarele şedinţe:

Luni 11 Martie, comunicând D-nii: AL. GHICA, *«Asupra desfăşurării în serie de polinoame a funcţiilor analitice de două variabile complexe»* şi GR. MOISIL despre *«O teorie evolutivă a raţionamentului»*.

Luni 25 Martie, comunicând D-nii: N. TEODORESCU, *«Soluţiunea elementară a unei clase de ecuaţii cu derivate parţiale»* şi G. MIHOC, *«Asupra şirurilor de variabile dependente»*.

Joi 28 Martie, în şedinţă de comunicări libere cu caracter elementar au vorbit D-nii: H. P. IONESCU-BISS, *«Calculul unor integrale definite»* şi I. CÂRSTOIU, *«O proprietate a conicelor şi extinderea ei la cuadrice»*.

Sporirea Bibliotecei

Bulletin scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara Vol. I, II, III et IV. (1925–1934). Timişoara.

Donate de *Societatea ştiinţifică dela Şcoala Politechnică din Timişoara.*

Revista Matematică din Timişoara. Volumele II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII. Timişoara.

Donate de *«Redacţia Revistei Matematice din Timişoara».*

N. ST. BOTESU. Proprietatea Seriei armonice, cu utilitatea ei ştiinţifică, disvălită şi demonstrată prin analisa elementare. Iassy. 1872.

Donată de I. IONESCU, inginer.

DEMETRIU N. PREDA. Elemente de Cosmografia, ellaborate pentru usulu classelor gymnasiali. Bucureşti, 1865.

Donată de D-l GH. TH. GHEORGHIU.

EMILE TURRIÈRE. La notion de transcendance géométrique chez DESCARTES et LEIBNIZ. L'interescendance leibnizienne et l'hypertranscendance. Wondelgemlez. Gand. 1914.

Donată de D-l P. SERGESCU.

EMILE TURRIÈRE, Introduction à l'histoire de l'optique. Bruxelles, 1926.

Donată de D-l P. SERGESCU.

EMILLE TURRIÈRE. Histoire des moulins à vent. Montpelier, 1923.

Donată de D-l P. SERGESCU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2003. *Să se găsească ecuaţiunile*

$$(1) \qquad dy = f(x, y)\,dx,$$

care admit un factor integrant de forma

$$(2) \qquad \mu = A(x)\,Y^2 + B(x)\,Y + C(x),$$

Y *fiind o funcţiune numai de* y.

Să se considere cazurile particulare când A *sau* B *au o valoare constantă sau zero.*

C. POPOVICI.

In condițiunile problemei, trebue ca expresia

$$dU = \mu f(x, y)\, dx - \mu dy = 0$$

să fie o *diferențială totală exactă,* ceeace are loc când

$$\frac{\partial (\mu f)}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$$

din care se deduce, $K'(x)$ fiind derivata unei funcțiuni arbitrare de x,

$$(3) \quad f(x, y) = \frac{1}{A(x)Y + B(x)Y + C(x)} \left[K'(x) - \int \frac{\partial \mu}{\partial x} \partial y \right].$$

Integrala generală a ecuațiilor diferențiale cerute sub formă implicită, va fi dată de relația

$$\int \mu dy = K(x)$$

sau

$$(4) \quad A(x) \int Y^2 dy + B(x) \int Y dy + C(x)\, y = K(x).$$

In cazurile particulare când A sau B sunt constante, A' sau B' sunt nule și atunci relația (3) devine respectiv

$$f(x, y) = \frac{K'(x) - B'(x) Y_1 - C'(x) y}{AY^2 + B(x) Y + C(x)}, \quad Y_1 = \int Y dy, \; A = \text{const.}$$

$$f(x, y) = \frac{K'(x) - A'(x) Y_2 - C'(x) y}{A(x) Y^2 + BY + C(x)}, \quad Y_2 = \int Y^2 dy, \; B = \text{const.}$$

La această problemă a trimis o soluție, care principial nu diferă de cea de mai sus, D-l G. G. CONSTANTINESCU.

Unele inadvertențe în calcule, au făcut însă ca rezultatele D-sale să nu coincidă cu cele de mai sus.

M. G.

PROBLEMA 3878. *Să se elimine* x *între relaţiunile*

$$\frac{\sin(a-3x)}{\sin^3 x} = \frac{\cos(a-3x)}{\cos^3 x} = b.$$

COL. GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-l ADR. C. GHEORGHIU (Student, Bucureşti).

Inmulţind egalităţile date cu $\sin x \cos x$ şi folosind proprietăţile bine cunoscute ale rapoartelor egale se găseşte

$$(1)\quad \cos x \sin(a-3x) + \sin x \cos(a-3x) = b \sin x \cos x$$

$$(2)\quad \cos x \sin(a-3x) - \sin x \cos(a-3x) = b \sin x \cos x \cos 2x$$

de unde rezultă cu uşurinţă

$$(3)\qquad \sin(a-2x) = \frac{1}{2} b \sin 2x$$

$$(4)\qquad \sin(a-4x) = -\frac{1}{4} b \sin 4x.$$

Desvoltând sinusurile din membrul I şi se împarte respectiv prin $\sin 2x$ şi $\sin 4x$ se găseşte

$$(5)\qquad \operatorname{tg} 2x = \frac{2\sin a}{b + 2\cos a}$$

$$(6)\qquad \operatorname{tg} 4a = \frac{2\operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = \frac{4\sin a}{4\cos a - b}.$$

Eliminând pe $\operatorname{tg} 2x$ între (5) şi (6) se găseşte eliminantul cerut

$$\frac{4\sin a}{4\cos a - b} = \frac{4\sin a\,(b + 2\cos a)}{b^2 + 4\cos a + 4\cos 2a}$$

care, după efectuarea tuturor calculelor se pune sub forma mai simplă

$$b\,(b + \cos a) = 2.$$

Notă. 1°. D-nii: E. MEREUȚĂ, V. I. CRIVĂȚ și N. N. VELICESCU au scos din (5), valoarea

$$x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\,\frac{2\sin a}{b + 2\cos a}$$

pe care introducând-o în relațiile date, au găsit eliminantul sub forma

$$\sin\left[a - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\,\frac{2\sin a}{b+2\cos a}\right] = b\sin^3\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\,\frac{2\sin a}{b+2\cos a}\right].$$

2°. D-l P. I. GHIȘOIU (Șc. Politehnică, București) a scos valoarea lui $\operatorname{tg} x$ din ecuația

$$\operatorname{tg}(a - 3x) = \operatorname{tg}^3 x$$

și prin calcule foarte anevoioase a găsit o formulă exactă, dar complicată, pentru eliminant.

3°. D-l H. P. IONESCU-BISS a găsit eliminantul scoțând valorile lui $\sin 2x$ din ecuațiile enunțului.

GH. B.

PROBLEMA 4156. *Să se dovedească inegalitatea*

$$(1)\qquad \frac{m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_p a_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p} \geqq a_1^{\frac{m_1}{s}}\, a_2^{\frac{m_2}{s}} \ldots a_p^{\frac{m_p}{s}},$$

în care avem

$$s = m_1 + m_2 + \ldots + m_p,$$

numerile $a_1, a_2, \ldots a_p, m_1, m_2, \ldots, m_p$ *fiind pozitive.*

Să se arate că avem egalitate numai pentru

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_p.$$

TH. ANGHELUȚĂ.

Au trimis soluții D-nii: N. N. ALDEA, HARALAMB P. IONESCU-BISS, CEZAR IVĂNESCU și I. I. PETRESCU.

Să dovedim întâi inegalitatea (1) în cazul particular

$$p = 2,$$

$$(2)\qquad \frac{m_1a_1 + m_2a_2}{m_1 + m_2} \geqq a_1^{\frac{m_1}{m_1+m_2}} \cdot a^{\frac{m_2}{m_1+m_2}}$$

Pentru aceasta în expresiunea următoare

$$f(a_1) = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} - a_1^{\frac{m_1}{m_1+m_2}} \cdot a_2^{\frac{m_2}{m_1+m_2}},$$

vom considera pe a_1 ca variabilă independentă în intervalul $(0, +\infty)$, iar pe a_2 o constantă pozitivă. Vom arăta că $f(a_1)$, ca funcțiune de a_1, are un singur minim în intervalul considerat și anume pentru

$$a_1 = a_2 .$$

Vom vedea că acest minim este egal cu zero și atunci va rezulta inegalitatea (2).

In acest scop calculând derivata lui $f(a_1)$, prin raport cu a_1, se găsește

$$f'(a) = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(1 - a_1^{-\frac{m_2}{m_1+m_2}} \cdot a_2^{\frac{m_2}{m_1+m_2}}\right).$$

Derivata $f'(a_1)$ se anulează, așa dar, pentru

$$a_1 = a_2$$

și este negativă, când a_1 variază dela zero până la a_2 și pozitivă pentru valori dela a_2 până la $+\infty$. Prin urmare funcția $f(a_1)$ este minimă când a_1 este egal cu a_2 și acest minim este zero, cum se vede lesne. De aici rezultă că inegalitatea (2) este adevărată și că semnul egal nu poate avea loc decât pentru

$$a_1 = a_2 .$$

Pentru demonstrarea inegalității (1), în general, vom admite că ea este adevărată până la $p - 1$ și vom demonstra apoi că este adevărată și pentru p. Admitem totodată că pentru $p - 1$ inegalitatea devine egalitate numai dacă avem

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{p-1} .$$

Cum am dovedit că aceasta are loc pentru

$$p = 2$$

problema va fi rezolvată pentru p oricare.

Să considerăm dar expresiunea

$$F(a_1) = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_p a_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p} - a_1^{\frac{m_1}{s}} a_2^{\frac{m_2}{s}} \ldots a_p^{\frac{m_p}{s}},$$

în care ca şi mai sus vom privi pe a_1 ca variabilă independentă în intervalul $(0, +\infty)$, iar pe $a_2, \ldots, a_p$ constante pozitive.

Calculând derivata lui $F(a_1)$, prin raport cu a_1, se găseşte

$$F'(a_1) = \frac{m_1}{s}\left(1 - a_1^{-\frac{\sigma}{s}} a_2^{\frac{m_2}{s}} \ldots a_p^{\frac{m_p}{s}}\right)$$

unde s'a notat

$$\sigma = m_2 + m_3 + \ldots + m_p .$$

Derivata $F'(a_1)$ se anulează deci pentru

$$a_1 = a_2^{\frac{m_2}{\sigma}} a_3^{\frac{m_3}{\sigma}} \ldots a_p^{\frac{m_p}{\sigma}} = k,$$

fiind negativă pentru valori ale lui a_1 mai mici decât k şi pozitivă pentru valori mai mari decât k.

Funcţia $F(a_1)$ este minimă pentru

$$a_1 = k.$$

Calculând valoarea acestui minim se găseşte

$$F(k) = \frac{\sigma}{s}\left(\frac{m_2 a_2 + m_3 a_3 + \ldots + m_p a_p}{\sigma} - a_2^{\frac{m_2}{\sigma}} a_3^{\frac{m_3}{\sigma}} \ldots a_p^{\frac{m_p}{\sigma}}\right),$$

unde s'a pus

$$\sigma = m_2 + m_3 + \ldots + m_p .$$

Din presupunerea făcută rezultă

$$F(k) \geqq 0,$$

căci expresia din paranteză este pozitivă sau nulă, ea reducându-se la inegalitatea (1) pentru $p - 1$ termeni; $F(k)$ nu este zero prin ipoteză decât dacă avem

$$a_2 = a_3 = \ldots = a_p ,$$

dar în acest caz avem şi

$$a_1 = k = a_2 = a_3 = \ldots = a_p .$$

Prin urmare $F(a_1)$ este pozitiv sau nul, minimul lui având aceeaş proprietate. Inegalitatea (1) nu poate fi egalitate decât dacă $F(k) = 0$ şi în acest caz am văzut că trebue să avem

$$a_1 = a_2 \ldots = a_k .$$

Ca un caz particular al inegalităţii (1), rezultă inegalitatea clasică

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}{p} \geqq \sqrt[p]{a_1 a_2 \ldots a_p} .$$

Demonstraţia dată aici poate fi utilizată în multe cazuri.

Corespondenţii noştri au dat alte soluţii, din nefericire cu lipsuri care nu pot fi umplute.

PROBLEMA 4282. *Să se arate că suma puterilor a 9-a a două numere nu se divide cu 27 decât dacă suma numerilor se divide cu 3.*

(Enunţ corectat). SUB-LOCOT. ION C. SAVIN.

Soluţie dată de D-l ION ŞABAC (cl. VI, Liceul Militar N. Filipescu). Avem :

$$a^9 + b^9 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^6 - a^3b^3 + b^6) = A \,.\, B \,.\, C$$

unde am notat :

$$a + b = A \;,\; a^2 - ab + b^2 = B \;,\; a^6 - a^3b^3 + b^6 = C.$$

Faţă de divizorul 3 un număr poate fi de una din formele

$$\mathcal{M}3 \;,\; \mathcal{M}3 + 1 \;,\; \mathcal{M}3 - 1.$$

Vom putea astfel forma tabloul :

	a	b	A	B	C	$a^9 + b^9$
I	$\mathcal{M}3$	$\mathcal{M}3$	$\mathcal{M}3$	$\mathcal{M}3^2$	$\mathcal{M}3^6$	$\mathcal{M}3^9$
II	$\mathcal{M}3$	$\mathcal{M}3 + 1$	$\mathcal{M}3 + 1$	$\mathcal{M}3 + 1$	$\mathcal{M}3 + 1$	$\mathcal{M}3 + 1$
III	$\mathcal{M}3$	$\mathcal{M}3 - 1$	$\mathcal{M}3 - 1$	$\mathcal{M}3 + 1$	$\mathcal{M}3 + 1$	$\mathcal{M}3 - 1$
IV	$\mathcal{M}3 + 1$	$\mathcal{M}3 + 1$	$\mathcal{M}3 - 1$	$\mathcal{M}3 + 1$	$\mathcal{M}3 + 1$	$\mathcal{M}3 - 1$
V	$\mathcal{M}3 + 1$	$\mathcal{M}3 - 1$	$\mathcal{M}3$	$\mathcal{M}3$	$\mathcal{M}3$	$\mathcal{M}3^3$
VI	$\mathcal{M}3 - 1$	$\mathcal{M}3 - 1$	$\mathcal{M}3 + 1$	$\mathcal{M}3 + 1$	$\mathcal{M}3 + 1$	$\mathcal{M}3 + 1$

Din tabloul acesta vedem că $a^9 + b^9$ nu se divide cu 3 decât în cazurile I şi V, adică atunci când $a + b = \not\equiv 3$. Mai mult în acest caz $a^9 + b^9$ se divide cu $27 = 3^3$. Dacă însă avem în acelaş timp $a = \not\equiv 3$, $b = \not\equiv 3$, $a^9 + b^9$ se divide chiar cu $3^9 = 27^3$.

D-nii VINTILĂ GRIGORESCU (Mânăstirea Dealu), M. MĂNESCU (cl. VII, lic. M. Eminescu, Bucureşti), MARIUS MARGULIUS (Bucureşti) şi ALEXANDRU D. STOICA (Bucureşti) au corectat enunţul iniţial, dând soluţiuni corecte, analoage cu cea de mai sus.

N. B.

PROBLEMA 4304. *In triunghiul* ABC *fie* β, γ *două puncte pe laturile* AC, AB. *Cercul* $(A\beta\gamma)$ *retaie cercurile* (ABC), $(BC\beta)$, $(BC\gamma)$ *respectiv în* a, b, c.

Coardele Aa, $b\beta$, $c\gamma$ *se taie în acelaş punct pe* BC.

Dreptele Bb, Cc *se taie într'un punct* α *situat pe cercul* $(A\beta\gamma)$, *pe o paralelă dusă prin* A *la* BC.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie dată de D-ra PREDUŢA D. BUNGEŢIANU.

1. Dreapta BC e axa fascicolului de cercuri (ABC), $(BC\beta)$, $(BC\gamma)$ adică toate punctele acestei drepte au aceeaş putere faţă de aceste cercuri; prin urmare intersecţia M a dreptei A*a*, axul radical al cercurilor $A\beta\gamma$ şi ABC, cu dreapta BC are aceeaş putere faţă de toate cercurile: (ABC), $(BC\beta)$, $(BC\gamma)$ şi $(A\beta\gamma)$, de unde rezultă că $b\beta$ [axul radical al cercurilor $(A\beta\gamma)$ şi $(BC\beta)$] şi $c\gamma$ [ax radical al cercurilor $(A\beta\gamma)$ şi $(BC\gamma)$] trec prin punctul M.

2. Considerând patrulaterele inscriptibile $BCc\gamma$ şi $BC\beta b$, rezultă:

$$\overset{\frown}{\alpha c\gamma} = \overset{\frown}{ABC} \quad \text{şi} \quad \overset{\frown}{\alpha b\beta} = \overset{\frown}{BCA}$$

şi cum:

$$\overset{\frown}{\beta b\gamma} = \overset{\frown}{\gamma A\beta} \equiv BAC$$

ca având aceeaş măsură în cercul $A\beta\gamma$; avem deci:

$$\overset{\frown}{\alpha b\gamma} + \overset{\frown}{\alpha c\gamma} \neq \overset{\frown}{\alpha b\beta} + \overset{\frown}{\beta b\gamma} + \overset{\frown}{\alpha c\gamma} = \overset{\frown}{BCA} + \overset{\frown}{BAC} + \overset{\frown}{ABC} = \pi$$

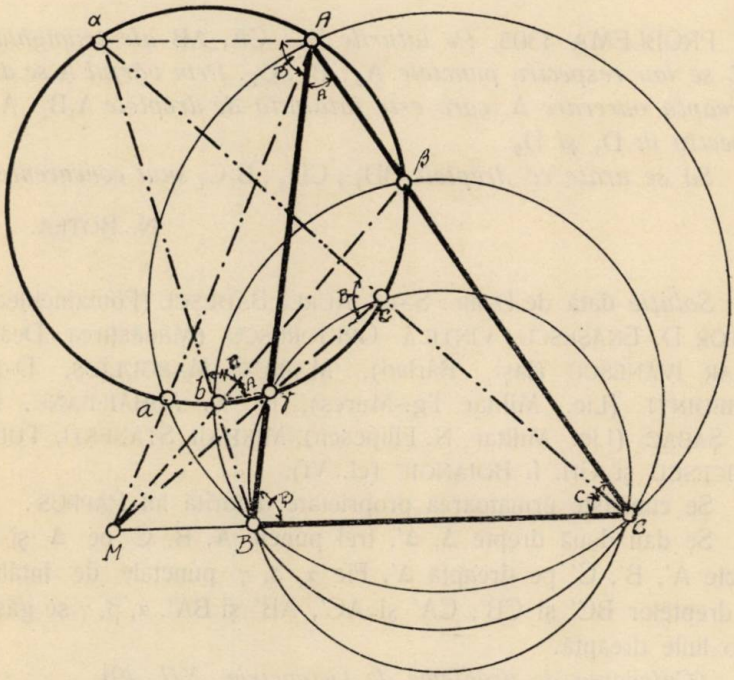
de unde rezultă că patrulaterul $\alpha b\gamma c$ e inscriptibil, adică α se află pe cercul $A\beta\gamma$.

Cum în cercul $A\beta\gamma$

$$\overset{\frown}{\alpha A\gamma} = \overset{\frown}{\alpha c\gamma}$$

ca având aceeaş măsură, şi cum:

$$\overset{\frown}{\alpha c\gamma} = \overset{\frown}{ABC}$$



rezultă că:

$$\overset{\frown}{\alpha A\gamma} \equiv \overset{\frown}{\alpha AB} = \overset{\frown}{ABC}$$

şi deci că dreptele $A\alpha$ şi BC sunt paralele.

Notă. 1°. Au mai rezolvat problema D-nii: GH. BOIANGIU, WILHELM CSEKE (student, Cluj), ALFRED GEIER (student, Cluj), V. A. GRIGORESCU (Lic. Mănăstirea Dealu), D. LEBĂDĂ, D. D. MEHEDINŢI (Lic. militar Tg.-

Mureş), MARIUS MARGULIUS (Bucureşti), GHEORGHE SILAŞ (student Cluj), I. GH. ŞABAC (elev clasa VII-a Lic. Mănăstirea Dealu).

2°. D-l MARIN NĂSTASE, elev clasa V-a Lic. Mănăstirea Dealu, a rezolvat numai prima parte a problemei.

3°. D-l GH. BOIANGIU a rezolvat foarte bine punctul 2, intrebuinţând teorema lui MENELAUS.

4°. D-l MARIUS MARGULIUS a mai rezolvat problema şi prin geometrie analitică.

AL. A. R.

PROBLEMA 4305. *Pe laturile* BC, CA, AB *ale triunghiului* ABC *se iau respectiv punctele* A_1, B_1, C_1. *Prin vârful* A *se duce o dreaptă oarecare* Δ, *care este întâlnită de dreptele* A_1B_1, A_1C_1 *respectiv în* D_1 *şi* D_2.

Să se arate că dreptele BD_1, CD_2, B_1C_1 *sunt concurente.*

N. BOTEA.

Soluţie dată de D-nii: S.-LT. AUREL BĂDESCU (Fontainebleau), VICTOR D. ENĂŞESCU, VINTILĂ GRIGORESCU (Mânăstirea Dealu), CEZAR IVĂNESCU (Iaşi, Bârlad), MARIUS MARGULIUS, D-TRU MEHEDINŢI (Lic. Militar Tg.-Mureş), N. N. MIHĂILEANU, ION GH. ŞABAC (Lic. Militar N. Filipescu), MIKHAÏL STĂNEŞTI, TUDOR STOICESCU şi GH. I. BOIANGIU (cl. VI).

Se cunoaşte următoarea proprietate datorită lui PAPPUS:

Se dau două drepte Δ, Δ', trei puncte A, B, C pe Δ şi trei puncte A', B', C' pe dreapta Δ'. Fie α, β, γ punctele de întâlnire ale dreptelor BC' şi CB', CA' şi AC', AB' şi BA'. α, β, γ se găsesc pe o linie dreaptă.

(Culegerea de probleme de Geometrie. XII. 49).

In cazul problemei de faţă avem punctele D_2, D_1 şi A situate pe dreapta Δ şi punctele B, C, A_1, de asemenea în linie dreaptă. Rezultă că dreptele BD_1, CD_2 se întâlnesc într'un punct al dreptei B_1C_1.

Observaţie. D-l PANAIT C. MAZILU a dat o bună soluţie analitică cu ajutorul coordonatelor triliniare.

PROBLEMA 4317. *Porţiunile din înălţimi cuprinse între ortocentru şi laturile triunghiului* ABC *fiind* h'_a , h'_b , h'_c , *celelalte notaţii fiind cele obişnuite, să se demonstreze relaţia*

$$\frac{a^2 - b^2}{c\,(h_c + h'_c)} + \frac{b^2 - c^2}{a\,(h_a + h'_a)} + \frac{c^2 - a^2}{b\,(h_b + h'_b)} = \operatorname{tg}(A - B) + \operatorname{tg}(B - C) + \operatorname{tg}(C - A).$$

NICOLAE DONCIU.

Soluţie dată de D-ra P. D. BUNGEŢEANU şi de D-nii: MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila), S.-LT. A. EM. BĂDESCU (Fontainebleau), G. SILAŞ (student Cluj), M. MĂNESCU, S.-LT. TH. N. PANAITE, A. C. IVĂNESCU, M. MARGULIUS, M. SC. NICHIFOR, I. M. PREDOESCU, P. C. MAZILU, E. G. BEIU-PALADI şi CHR. GHEORGHEVICI (Lic. Mihai Viteazu, Buc.), N. C. GAVRILESCU, N. GHIBAN, E. MEREUŢĂ, D. D. MAVRODIN, T. STOICESCU, V. I. COANDĂ (Târnova), M. F. AMĂRĂŞTEANU, O. PETRESCU, V. GLODEANU, C. CHIRIAC, I. N. SAGER, P. DOBRESCU, M. MĂNAC, V. GRIGORESCU, I. ŞABAC (Lic. Mănăstirea Dealu), E. STĂNESCU, GH. I. ŞUŞALĂ, GR. MARTEŞ, ŞT. COŞOVLIU (Lic. Militar Chişinău), GH. I. STĂNCULESCU, V. CEAUŞESCU şi C. NEGOIŢĂ (Lic. Militar Iaşi).

Ţinând seamă de formulele cunoscute

$$a = 2R \sin A, \ldots, h_a = 2R \sin B \sin C, \ldots, h'_a = 2R \cos B \cos C, \ldots$$

avem

$$\frac{a^2 - b^2}{c\,(h_c + h'_c)} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin C\,(\sin A \sin B + \cos A \cos B)} = \frac{(\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B)}{\sin C \cdot \cos(A - B)}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2} \cdot 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{\sin C \cos(A - B)} = \frac{\sin(A + B) \sin(A - B)}{\sin C \cdot \cos(A - B)} = \operatorname{tg}(A - B),$$

de oarece

$$\sin (A + B) = \sin C.$$

Din această formulă rezultă imediat relaţia din enunţ.

Observare. La această problemă s'au mai primit încă 5 soluţii dela elevii Lic. Militar Chişinău şi 17 soluţii dela elevii Lic. Militar Iaşi, copiate unele după altele cuvânt cu cuvânt! Din această cauză numele acestor elevi n'au fost citate.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4351. *Dacă după suma a trei numere, care este un patrat de trei cifre, se scrie 42, atunci se obţine produsul acelor numere.*

Se cer acele trei numere.

MAIOR I. LINTEŞ.

Fie A, B, C cele trei numere, comform enunţului avem :

1) $100 . (A + B + C) + 42 = A . B . C$

2) $100 \leqslant A + B + C < 1000$

3) $10^4 \leqslant A . B . C < 10^5$.

Egalitatea 1) ne arată că unul din numere va fi divizibil cu *2,* iar celelalte vor fi *impare.* In acest caz suma lor fiind un patrat perfect *par,* rădăcina va fi *pară,* deci ea va fi printre numerile :

10 , 12 , 14 , 16 , 18 , 20 , 22 , 24 , 26 , 28 , 30.

Condiţiunile 2) şi 3) ne arată apoi că numărul de cifre al celor trei numere poate să fie :

A	1	2
B	1 sau 2	2
C	3 sau 2	3 sau 2

Descompunând în factori primi numărul :

$$100 . N^2 + 42$$

unde N poate lua succesiv valorile găsite mai sus, avem :

N	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
$100 . N^2 + 42$	$2 . 5021$	$2 . 3 . 29 . 83$	$2 . 7 . 23 . 71$	$2 . 12821$	$2 . 3 . 5407$	$2 . 20021$	$2 . 53 . 457$	$2 . 3 . 13 . 739$	$2 . 31 . 1091$	$2 . 3 . 7 . 1201$	$2 . 3 . 43 . 379$

Din acest tablou vom elimina valorile lui N pentru care printre factorii lui *(100 . N^2 + 42)* vom găsi numere mai mari ca trei cifre, deci ne va rămâne : 12, 14, 22, 24, 30 ; cu cari putem face următoarele grupări respective :

N	Diversele grupări		
12	$2 . 29 . 249$	$2 . 83 . 87$	$3 . 58 . 83$
	$3 . 29 . 166$	$6 . 29 . 83$	
14	$2 . 23 . 427$	$2 . 61 . 161$	$7 . 23 . 122$
	$7 . 46 . 61$	$14 . 23 . 61$	
22	$2 . 53 . 457$		
24	$2 . 39 . 739$	$3 . 26 . 739$	$6 . 13 . 739$
30	$3 \; 86 . 379$	$6 . 43 . 379$	$3 . 43 . 758$

Dar dintre grupările de mai sus nu corespunde enunțului decât grupa :

$$3 . 58 . 83$$

căci avem :

$$3 + 58 + 83 = 144 = 12^2$$

$$3 . 58 . 83 = 14442$$

Au rezolvat problema făcând mai multe încercări D-nii : P. C. MAZILU, V. CEAUȘESCU și D. ROTARU.

I. L.

PROBLEMA 4353. *Se consideră în acelaş plan un punct* C *şi două cercuri* O, O', *pe care se iau punctele* A *şi* A'. *Din* A *şi* A' *se iau pe cele două cercuri, în acelaş sens, arcele* AM *şi* A'M', *astfel ca :*

$$\overset{\frown}{AOM} = \overset{\frown}{A'O'M'} = \alpha.$$

Fie D *cel de-al patrulea vârf al paralelogramului format de* M, C *şi* M'.

Locul lui D, *când, punctele* A şi A' *fiind fixe, unghiul* α *variază, este un cerc* O''.

N. BOTEA.

Soluţie dată de D-l N. N. MIHĂILEANU (student Bucureşti). Fie O'' al patrulea vârf al paralelogramului OCO', în care OO' e o diagonală. Se duc prin M şi M' paralele cu OO'', O'O'' şi egale cu ele ; fie Mm şi M'm'. Triunghiurile DMm, DM'm' fiind echipolente cu CO'M', COM, segmentele Dm', Dm sunt echipolente cu O''m, O''m' ; D este vârf al paralelogramului de mărime invariabilă O''m m'D, căci unghiul $(\overset{\frown}{O''m,\ O''m'})$ este egal cu unghiul constant $(\overset{\frown}{OM,\ O'M'})$; deci D descrie un cerc de centru O''.

Observări. 1°. D-nii MARIUS MARGULIUS şi IANCU SAGER au rezolvat problema cu ajutorul geometriei analitice.

2°. D-l VLADIMIR SÂRBU (Cluj) a rezolvat problema într'un caz particular.

3°. Celelalte soluţiuni primite au fost greşite.

4°. D-l N. MIHĂILEANU observă că soluţia geometrică de mai sus este interpretarea următoarei soluţii vectoriale :

Avem :

$$M = O + re^{i\theta}$$

$$\overline{M'} = O' + r'e^{i(\theta+k)} \qquad (k = \text{constant}).$$

Deci :

$$D = (\overline{M} - \overline{C}) + (M' - C') = (O - \overline{C}) + (O' - \overline{C}) + e^{i\theta}(r + cr')$$

$$(\text{unde } c = e^{ik})$$

sau

$$D - (\overline{O} + O' - 2\overline{C}) = (r + cr')\, e^{i\theta}\ .$$

N. B.

PROBLEMA 4439. *Cu ce cifre se pot termina sumele a două bipatrate?* I. IONESCU.

Soluție dată de D-nii: P. C. MAZILU și C. CHIRIAC:

Un patrat nu se poate termina decât cu una din cifrele 0, 1, 4, 5, 6, 9. Patratele acestora nu se pot termina decât cu 0, 1, 5, 6. Suma a două bipatrate nu poate fi dar terminată decât cu 0, 1, 2, 5, 6, 7. Cifrele cu care nu se poate termina o sumă de două bipatrate sunt deci 3, 4, 8, 9.

Dacă considerăm acum câte două cifre dela urmă știm că la un patrat nu putem avea decât grupele 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96. Ridicându-le la patrat găsim că un bipatrat se poate termina cu 00, 01, 16, 21, 25, 36, 41, 56, 61, 76, 81, 96. Sumând aceste două numere câte două sau luând și dublul lor, și oprind numai ultimele două cifre găsim grupele 00, 01, 02, 06, 12, 16, 17, 21, 22, 25, 26, 32, 36, 37, 41, 46, 50, 52, 56, 57, 61, 62, 66, 72, 76, 77, 81, 82, 86, 92, 96, 97.

Reiese de aci că suma a două bipatrate nu se poate termina cu nici una din următoarele 67 de grupe de două cifre:

03, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 40, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 51, 53, 54, 55, 58, 59, 60, 63, 64, 65, 67, 68, 69, 70, 71, 73, 74, 75, 78, 79, 80, 83, 84, 85, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 94, 95, 98, 99.

Au rezolvat problema pentru cazul ultimei cifre D-ra BILY UNTER (Liceul de fete Piatra) și D-nii: C. COTESCU, D. C. ISAC, I. G. BOGDAN, V. D. D. ENĂȘESCU, P. P. COJOCARU, I. I. BUZINCU, C. N. GAVRILESCU, V. IONESCU și V. N. BUCUR (Liceul Militar, Iași), M. F. AMĂRĂȘTEANU (Liceul Frații Buzești, Craiova), I. C. DUMITRU (Acadânlar, Durostor), I. GH. BOGDAN, V. BOGZA, A. I. CORNĂȚEANU, R. P. DRAGOMIR, D. DUMBRĂVESCU, I. ENACHE, A. C. JIPA, N. D. ȘTEFĂNESCU, G. VASILACHE.

PROBLEMA 4475. *In ce caz aria laterală a unui con circular drept este medie geometrică între aria totală și aria bazei lui?* I. IONESCU.

Soluție dată de D-ra FILOFTEIA N. ANTONESCU și de D-l ILIE I. ȚIȚEICA, (Liceul Mănăstirea Dealului), M. I. AMĂRĂȘTEANU, G. DECEANU, I. V. FRAGĂ, P. C. MAZILU, V. S. METEA, M. NĂSTASE, M. A. NEGREA, G. C. NIȚESCU, N. D. ȘTEFĂNESCU, C. V. TANASICIUC.

Fie R raza bazei şi G lungimea generatoarei. După enunţ avem :

$$(\pi RG)^2 = (\pi R^2) \cdot (\pi R^2 + \pi RG).$$

$$\therefore \quad G^2 = R(R + G),$$

$$\therefore \quad G^2 - RG - R^2 = 0,$$

$$\therefore \quad G = \tfrac{1}{2} R (1 + \sqrt{5}).$$

Generatoarea este deci dublul laturii pentagonului regulat circumscris cercului de bază.

Soluţie dată de D-nii: I. G. BOGDAN, V. D. D. ENĂŞESCU, D. DUMBRĂVESCU, I. I. BUZINCU, C. COTESCU, D. S. MIHALCEA (Liceul Militar Iaşi), V. G. BOGZA, N. P. BOITAN, V. N. BUCUR, N. D. CARAMAN, A. G. CEHAN, A. I. COMĂNESCU, P. G. CRAIU, R. P. DRAGOMIR, C. G. EMILIAN, C. N. GAVRILESCU, C. I. GHIŞOIU, M. E. I. GOLDENBERG, A. IOANEI V. ROMULUS, I. ENACHE, A. C. JIPA, C. M. MATEI, G. I. MĂGALU, GH. MIHĂILESCU, C. I. OPRAN, M. C. POSTELNICESCU, N. I. ROMAN, V. I. SIARU, GH. STĂNCIULESCU, S. I. TARASIUC, G. I. VASILACHE, F. VASILOVSCHI, I. E. ZAHARESCU.

Dacă I este înălţimea conului, atunci relaţia (1) de mai sus ne dă:

$$I^2 = G^2 - R^2 = RG.$$

Deci *înălţimea conului este medie geometrică între rază şi generatoare.*

Notă. S'au primit numeroase soluţiuni identice. Ele au fost considerate identic nule.

I. I.

EXERCIŢII

28. Ecuaţia $10a^2 - b^2 = 11$ e imposibilă în numere întregi.

M. G.

R. Se poate scrie

$$10(a^2 - 1) = b^2 + 1,$$

iar membrul al doilea e divizibil cu 10 când

$$b = 10c + 3 \ , \ b = 10c + 7 \ ;$$

ecuaţia dată devine

$$a^2 = 2(5c^2 + 3c + 1) \quad \text{sau} \quad a^2 = 2(5c^2 + 7c + 3)$$

şi se vede că, în ambele forme, membrul al doilea e divizibil numai cu 2, deci nu poate fi patrat perfect.

29. Să se arate că nu există două numere întregi cari să satisfacă ecuaţia nedeterminată

$$2a^2 - 5b^2 = 1.$$

M. G.

R. Ecuaţia dată se mai poate scrie $2a^2 - 1 = 5b^2$. Membrul al doilea e divizibil cu 5; pe de altă parte patratul unui număr întreg poate fi M5, M5 $\pm$ 1, şi se vede că oricare din aceste forme ar avea a^2, membrul întâiu e prim cu 5.

30. Să se stabilească inegalitatea:

$$\sum_{1=2}^{n!} \varphi(1) \leqslant \frac{4}{3} n!$$

unde $\varphi(1)$ este indicatorul lui 1.

PETRE I. GHIŞOIU.

R. Folosim egalitatea:

$\varphi(2) + \varphi(3) + \ldots + \varphi[(n-1)!] = n!$. G. M. Vol. XXXI, notat pag. 445, şi inegalitatea:

$\varphi(n!) \leqslant \frac{n!}{3}$. Probl. 3112. G. M. Vol. XXXI, pag. 347.

Avem astfel:

$$\sum_{2}^{n!} \varphi(1) = n! + \varphi(n!)$$

şi apoi:

$$\varphi(n!) + n! \leqslant \frac{4}{3} n!$$

deci

$$\sum_{1=2}^{n} \varphi(1) \leqslant \frac{4}{3} n!$$

Tocmai inegalitatea propusă.

31. Să se arate că putem construi un triunghiu dreptunghiu fiind date o latură a unui triunghiu oarecare, porţiunea de înălţime corespunzătoare cuprinsă între vârf şi ortocentru şi diametrul cercului circumscris.

I. I. ŢIŢEICA.

R. Notaţiile fiind a, h'_a şi R, avem:

$$a = 2R \sin A \quad \text{şi} \quad h'_a = 2R \cos A.$$

Apoi ridicând la patrat şi adunând :

$$a^2 + h_a'^2 = 4R^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) = 4R^2.$$

Deci . . .

PROBLEME PROPUSE

4499. Să se găsească rădăcinile întregi ale ecuaţii :

$$\sqrt{x^3 + 1} = \sqrt[3]{x^2 - 1}.$$

I. IONESCU.

4500. Dacă într'un triunghiu ABC raza cercului exînscris în unghiul A este egală cu diametrul cercului circumscris, dreapta care uneşte picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor B şi C taie linia centrelor cercurilor înscris şi circumscris în centrul de similitudine extern al acelor cercuri.

V. THÉBAULT.

4501. Să se găsească un cub de patru cifre a cărui rădăcină cubică să fie egală cu suma cifrelor cubului căutat.

M. GHERMĂNESCU.

4502. Fie dat tetraedrul ABCD având muchiile opuse perpendiculare ; A', B', C' mijloacele muchiilor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$; A_1 , B_1 , C_1 proiecţiunile punctului D pe aceste muchii.

Planul paralel cu B_1C_1 dus prin AD taie planul DB'C' după dreapta α. Analog se obţin dreptele β, γ ducând prin BD, CD plane paralele respectiv cu C_1A_1 , A_1B_1 şi intersectându-le cu DC'A', DA'B'.

Să se arate că dreptele α, β, γ sunt în acelaş plan perpendicular pe dreapta care trece prin centrele sferelor ABCD , A'B'C'D.

C. IONESCU-BUJOR.

4503. Există triunghiuri având laturile și suprafața exprimate în numere întregi?

MAIOR I. LINTEȘ.

4504. Dacă a este pozitiv, n întreg și $b > 1$ avem:

$$1 < \sqrt[n]{a + b\sqrt[n]{a + b\sqrt[n]{a + \ldots}}} < 1 + a$$

când $a > b$, și

$$1 < \sqrt[n]{a + b\sqrt[n]{a + b\sqrt[n]{a + \ldots}}} < 1 + b$$

când $b > a$.

N. BOTEA.

4505. Să se calculeze suma

$$S = n \cdot ma^{m-1} + (n-1)(m-1)\, a^{m-2}b + (n-2)(m-2)\, a^{m-3}b^2 + \ldots$$

$$+ (n - m + 1)\, b^{m-1}.$$

Aplicație: $S = m^2\, 2^{m-1} + (m-1)^2\, 2^{m-2} \cdot 3 + \ldots 3^{m-1}$.

GH. D. SIMIONESCU.

4506. Să se găsească în ce caz e adevărată egalitatea:

$$\sin x + \sin y = \sin (x + y).$$

Aceeași chestiune pentru egalitatea:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} (x + y).$$

O. N. ȚINO.

4507. Să se rezolve ecuaţiunea

$$x^4 - 4a^2x + a^2(1 - 2a) = 0.$$

TUDOR STOICESCU.

4508. Se consideră două şiruri de numere pozitive

$$p_1 , p_2 , \ldots , p_n , \ldots$$

$$q_1 , q_2 , \ldots , q_n , \ldots$$

cuprinse între 0 şi 1, şi se pune

$$r_n = p_n + q_n .$$

Să se arate că dacă avem:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - p_n}{p_1 p_2 \ldots p_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - q_n}{q_1 q_2 \ldots q_n} = 0$$

vom avea şi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2 - p_n - q_n}{r_1 r_2 \ldots r_n} = 0.$$

T. POPOVICIU.

4509. Cum trebue să rotesc un pahar ca să vărs un debit constant ?

ION C. SCHILERU.

4510. Se dau în plan un punct P şi o conică (C) şi se cere să se determine o curbă (Γ) astfel ca polara unui punct M de pe (Γ), faţă de (C), să fie perpendiculară în P pe MP.

GENERAL GH. BUICLIU.

Erată. La pag. 127 rândul 10 de sus se va înlocui 1928 prin 1828.

Rectificare. In enunţul problemei 4478 apărută la pag. 285, în loc de „ducându-se perpendiculare pe laturile egale" a se citi „ridicându-se perpendiculare pe bază şi unindu-se punctele de intersecţie ale acestora cu laturile egale".

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

A. Ioanei R. (4428); *Amărăşteanu T. M.* (4378, 422, 40, 43, 85); *Apostol V. R.* (4383, 418, 32); *Bogdan Gr. I.* (4428, 57, 60); *Bogza Gr. V.* (4428, 31, 60, 85); *Bucur N. V.* (4428, 60, 85); *Chiriac I. C.* (4457, 85); *Chiriţă M.* (4457); *Cocea G. T.* (4365); *Cojocaru P. P.* (4422, 28); *Cornăţeanu I. A.* (4428, 43); *Cotescu S. C.* (4428, 60); *Dimitriu C. I. C.* (4428, 31, 60, 85); *Dobrescu A.* (4375, 83, 457, 60, 91); *Dragomir P. R.* (4428); *Dumbrăveanu D.* (4431); *Dumbrăvescu D.* (4428); *Enache I.* (4431, 60, 85); *Enăşescu D. D. V.* (4428, 60, 85); *Florescu H.* (4460); *Gavrilescu N. C.* (4261, 485); *Georgescu Vintilă* (4378); *Goldenberg I. M.* (E); *Hilf A.* (4457); *Ignat D.* (4485); *Ionescu Virgil* (4443); *Iordache E.* (4428); *Jipa C. Alex.* (4428, 43); *Mănescu M.* (2309, N); *Metea S. Virgil* (4443); *Mihăilescu Gh.* 4443); *Mihalcea St. D.* (4428, 60); *Milu I. N.* (4460); *Năstase I. M.* (4418); *Negrea A. M.* (4467); *Niţescu Gh.* (4469, 70); *Postelnicescu C. M.* (4383, 422); *Şiara I. V.* (4428, 60, 85); *Ştefănescu D. N.* (4375); *Thébault V.* (A); *Vasilache I. Gh.* (4418, 28, 31, 43); *Vasilischi F.* (4485).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele **se vor scrie pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogă taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“
Casa Gazeta Matematică
Calea Griviţei No. 158
Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceiaş adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN.**

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XL

NUMĂRUL 9. — MAI 1935

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASSOCIATIUNII"
SIBIIU

SUMARUL

1. Sur les nombres cycliques . . . . . *V. Thébault.*
2. Cărți vechi de matematică . . . . . *I. Ionescu.*
3. Suma unei serii . . . . . *Gh. Th. Gheorghiu.*
4. Proprietăți ale triunghiului . . . . . *Cezar Ivănescu.*
5. Note matematice: 36 — 41.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 4228, 4254, 4261, 4364, 4457, 4463.
11. Exerciții: 32 — 35.
12. Probleme propuse: 4511 — 4522.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1935

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică“ având sediul în Bucureşti („Casa *Gazeta Matematică*“, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela „*Gazeta Matematică*“ în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 11, 12, 18, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 66, 70, 76, 80, 84, 89, 91, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 14, 16, 17, 21, 26, 38, 41, 42, 45, 49, 50, 52, 58, 61, 64, 65, 66, 68, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 97, 98, 99, 500, 01, 02, 03, 04, 05, 07, 08, 09, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela „*Gazeta Matematică*“ cu preţul de 12 lei.

SUR LES NOMBRES CYCLIQUES

1. Si dans un nombre de n chiffres, écrit dans un système de numération de base B, on transpose k chiffres de gauche à droite ($k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$) les n nombres sont des *nombres cycliques.*

Ainsi les nombres

142857 , 428571 , 285714 , 857142 , 571428 , 714285,

sont cycliques dans tout système de numération de base $B \geqslant 9$.

2. Considérons, dans le système de numération à base B, un nombre

$$N = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \tag{1}$$

de n chiffres, qui ne sont pas tous égaux et dont le premier est plus grand que zéro, ainsi que les $(n-1)$ nombres obtenus par permutation circulaire des chiffres,

$$\begin{aligned} N_1 &= a_2 a_3 \ldots a_n a_1 \\ N_2 &= a_3 a_4 \ldots a_n a_1 a_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Nous supposerons que N est le plus petit des nombres du cycle formé par les n nombres considérés.

Nous pouvons regarder le nombre N comme la période d'une fraction pseudo-décimale périodique *simple,* résultant de la conversion d'une certaine fraction irréductible $\frac{N}{D}$:

$$\begin{aligned} \frac{N}{D} &= \frac{a_1}{B} + \frac{a_2}{B^2} + \ldots + \frac{a_n}{B^n} + \frac{a_1}{B^{n+1}} + \ldots \\ &= \frac{N}{B^n} + \frac{N}{B^{2n}} + \ldots = \frac{N}{B^n - 1} . \end{aligned} \tag{3}$$

On aura $N < D$; de plus, D sera un diviseur de $(B^n - 1)$ et D sera premier avec B.

Il est facile d'obtenir les fractions ordinaires qui donnent naissance aux périodes $N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}$. On a, en effet,

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{BN}{D} - a_1 &= \frac{a_2}{B} + \ldots = \frac{N_1}{B^n - 1}, \\ \frac{B^2N}{D} - (a_1 B + a_2) &= \frac{N_2}{B^n - 1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Les fractions

$$(5)\qquad \frac{BN - a_1 D}{D}, \quad \frac{B^2N - (a_1 B + a_2) D}{D}, \ldots,$$

sont irréductibles, car tout diviseur commun au numérateur et au dénominateur de la $i^{ème}$ fraction diviserait $B^i N$; étant premier avec B, il diviserait N, contrairement à la propriété d'irréductibilité de la fraction $\frac{N}{D}$.

Dès lors, *les* n *nombres* $N, N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}$ *du cycle sont les périodes des fractions périodiques résultant de la conversion de* n *fractions irréductibles* $\frac{N}{D}, \frac{N_1}{D}, \ldots, \frac{N_{n-1}}{D}$ *où* N_i *est le reste de la division de* $B^i N$ *par* D [1]).

3. Il peut arriver que le nombre N_1 soit multiple de N, on bien que le nombre N_2 soit multiple de N, . . . , et l'on a

$$(6)\qquad N_1 = p \,.\, N \quad \text{ou} \quad N_2 = q \,.\, N,$$

p et q étant entiers.

Ainsi, lorsque $B = 10$,

$$N = 142857 \quad , \quad N_1 = 428571 = 3 \times 142857.$$

$$N = 109890 \quad , \quad N_2 = 989010 = 9 \times 109890.$$

Les nombres N et N_1, ou bien N et N_2, ayant chacun n chiffres, observons tout d'abord que

$$(7)\qquad 2 \leqslant p \leqslant B - 1 \quad \text{ou} \quad 2 \leqslant q \leqslant B - 1.$$

Des relations (4) et des expressions (5), on déduit que

$$(8)\qquad p = \frac{N_1}{N} = \frac{BN - a_1 D}{N} = B - a_1 \,.\, \frac{D}{N},$$

1) E. CARTAN, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1927 — 34.

d'où

$$\frac{N}{D} = \frac{a_1}{B-p}, \tag{9}$$

ou bien que

$$q = \frac{N_2}{N} = \frac{B^2N - (a_1B + a_2)D}{N} = B^2 - (a_1B + a_2) \cdot \frac{D}{N}, \ldots, \tag{10}$$

d'où

$$\frac{N}{D} = \frac{a_1B + a_2}{B^2 - q}, \ldots, \tag{11}$$

4. Proposons-nous de rechercher tous les nombres N, dans le système de numération à base B = 10, tels que

$$N_1 = p \,.\, N.$$

Les inégalités

$$2 \leqslant p \leqslant 9 \tag{12}$$

entraînent les suivantes

$$1 \leqslant a_1 \leqslant 4. \tag{13}$$

Si l'on supposait, en effet, $a_1 \geqslant 5$, le nombre N_1 aurait $n+1$ chiffres.

Seul le nombre $p = 3$ donne des fractions irréductibles

$$\frac{N}{D} = \frac{a_1}{10-p} = \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7} \tag{14}$$

convertibles en fractions pseudo-décimales périodiques simples convenables, pour lesquelles on a

$$N = 142857\ldots, 285714\ldots, 428571\ldots, 571428\ldots.$$

Les deux premières de ces valeurs de N conviennent seules, les deux autres conduisant à des nombres $N_1 = 3N$ de $n+1$ chiffres.

La forme générale des nombres cherchés N est donc

$$N = 142857 \,.\, (1 + 10^6 + 10^{12} + \ldots + 10^{6k}) \times m, \tag{15}$$

k étant un entier quelconque et $m = 1$ ou 2 [1]).

1) Cette formule a été donnée sans démonstration par TROÏTSKY, *L'Echiquier*, 1930 — 463.

N. B. La remarque du début concernant les nombres

142857 , 428571 , 285714 , 857142 , 571428 , 714285,

cycliques dans tout système de numération de base $B \geqslant 9$, permet de dire que *dans tout système de numération de base* $B \geqslant 9$, *la relation précédente subsiste, et la forme générale des nombres* N *devient*

$$N = 142857 . (1 + B^6 + B^{12} + \ldots + B^{6k}) \times m,$$

k étant un entier quelconque et $m = 1$ ou 2.

Mais il peut exister d'autres nombres N qui jouissent de la propriété envisagée chaque fois qu'il y a des fractions irréductibles $\frac{N}{D}$, autres que $\frac{1}{7}$ et $\frac{2}{7}$, qui donnent naissance à des fractions pseudo-décimales périodiques simples.

5. Dans le même système de numération à base 10, recherchons tous les nombres N tels que

$$N_2 = q . N,$$

c'est-à-dire pour lesquels

$$\frac{N}{D} = \frac{10 a_1 + a_2}{100 - q} .$$

Comme précédemment, les inégalités

$$2 \leqslant q \leqslant 9,$$

entraînent les suivantes

(16) $$10 \leqslant 10 a_1 + a_2 \leqslant 49.$$

1°. Lorsque $q = 2$, $N_2 = 2N$, et

$$\frac{N}{D} = \frac{10 a_1 + a_2}{98} = \frac{10 a_1 + a_2}{2 \times 49},$$

puis

$$10 \leqslant 10 a_1 + a_2 \leqslant 48.$$

Le dénominateur $98 = 2 \times 7^2$ de la fraction $\frac{10 a_1 + a_2}{98}$ contenant le facteur premier 2, pour que la fraction irréductible $\frac{N}{D}$

donne naissance à une fraction pseudo-décimale périodique simple, il faut et il suffit que le nombre $10a_1 + a_2$ soit aussi multiple de 2. Tous les nombres *impairs* compris entre 10 et 48 doivent donc être écartés, pour ne considérer que les nombres

10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48.

Dès lors, la fraction irréductible peut avoir les valeurs suivantes :

$$\frac{N}{D} = \frac{5}{49}, \frac{6}{49}, \frac{1}{7}, \frac{8}{49}, \frac{9}{49}, \frac{10}{49}, \frac{11}{49}, \frac{12}{49}, \frac{13}{49}, \frac{2}{7}, \frac{15}{49},$$

(17)

$$\frac{16}{49}, \frac{17}{49}, \frac{18}{49}, \frac{19}{49}, \frac{20}{49}, \frac{3}{7}, \frac{22}{49}, \frac{23}{49}, \frac{24}{49}.$$

Les plus petits nombres cherchés N sont donc représentés par les périodes de ces 20 fractions irréductibles. Ces nombres déterminent les formes générales de tous les nombres N obtenus en répétant ces périodes autant de fois qu'on le veut.

Exemple. La fraction $\frac{5}{49}$, dont la période correspondante a 42 chiffres, donne la forme générale

(18) $N = 102040816326530612244897959183673469387755 \times$

$$(1 + 10^{42} + 10^{84} + \ldots + 10^{42k}) \times m,$$

k étant un entier quelconque et $m = 1, 2, 3$ ou 4.

2°. Lorsque $q = 3$, $N_2 = 3N$, $\frac{N}{D} = \frac{10a_1 + a_2}{97}$, et

$$10 \leqslant 10a_1 + a_2 \leqslant 32.$$

Le dénominateur 97 étant *premier absolu,* les 23 fractions irréductibles

$$(19) \qquad \frac{N}{D} = \frac{10}{97}, \frac{11}{97}, \frac{12}{97}, \ldots, \frac{32}{97},$$

déterminent tous les nombres N correspondant à ce cas.

3°. Si $q = 4$, $N_2 = 4N$, $\frac{N}{D} = \frac{10a_1 + a_2}{96} = \frac{10a_1 + a_2}{2^5 \times 3}$, et

$$10 \leqslant 10a_1 + a_2 \leqslant 23.$$

Toutes ces valeurs du nombre $10a_1 + a_2$ conduisant à des fractions $\frac{N}{D}$ qui donnent naissance à des fractions pseudo-décimales périodiques *mixtes,* il n'y a aucune solution.

4°. Pour $q = 5$, $N_2 = 5N$, $\frac{N}{D} = \frac{10a_1 + a_2}{95} = \frac{10a_1 + a_2}{5 \times 19}$, et

$$10 \leqslant 10a_1 + a_2 \leqslant 18.$$

Pour la même raison qu'au 1°, on ne peut retenir les valeurs $10a_1 + a_2 = 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18$, qui laissent subsister au dénominateur D le facteur 5.

On a donc

$$\frac{N}{D} = \frac{2}{19} \text{ et } \frac{N}{D} = \frac{3}{19},$$

puis les formes générales

$$N = 105263157894736842 \,.\, (1 + 10^{18} + 10^{36} + \ldots + 10^{18k}),$$

(20)

$$N = 157894736842105263 \,.\, (1 + 10^{18} + 10^{36} + \ldots + 10^{18k}),$$

k étant un entier quelconque.

N. B. Observons que si l'on transpose le chiffre 2 et le chiffre 3 de ces nombres, de droite à gauche, on obtient un nombre 2 fois plus grand.

5°. Lorsque $q = 6$, $N_2 = 6N$, $\frac{N}{D} = \frac{10a_1 + a_2}{94} = \frac{10a_1 + a_2}{2 \times 47}$,

et

$$10 \leqslant q \leqslant 15.$$

On a trois solutions dérivant des fractions

$$\frac{N}{D} = \frac{5}{47}, \frac{6}{47}, \frac{7}{47}.$$

6°. Si $q = 7$, $N_2 = 7N$, $\frac{N}{D} = \frac{10a_1 + a_2}{93} = \frac{10a_1 + a_2}{3 \times 31}$, et

$$10 \leqslant 10a_1 + a_2 \leqslant 13.$$

Les quatre fractions

$$\frac{N}{D} = \frac{10}{93}, \frac{11}{93}, \frac{4}{31}, \frac{13}{93}, \tag{21}$$

donnent les formes générales du nombre N.

7°. Pour $q = 8$, $N_2 = 8N$, $\frac{N}{D} = \frac{10a_1 + a_2}{92} = \frac{10a_1 + a_2}{2^2 \times 23}$,

et

$$10a_1 + a_2 = 10 \text{ ou } 11.$$

La fraction $\frac{N}{D}$ donnant naissance à une fraction pseudo-décimale périodique *mixte,* il n'y a aucune solution.

8°. Enfin, si $q = 9$, $N_2 = 9N$, $\frac{N}{D} = \frac{10a_1 + a_2}{91}$,

et

$$10a_1 + a_2 = 10.$$

De la fraction $\frac{10}{91}$, on déduit la forme générale des nombres

$$N = 109890 \,.\, (1 + 10^6 + 10^{12} + \ldots + 10^{6k}), \tag{22}$$

k étant un entier quelconque.

6. Si l'on observe que les fractions

$$\frac{N}{D} = \frac{1}{7} \text{ et } \frac{N}{D} = \frac{2}{7},$$

figurent à la fois dans les égalités (14) et (17), on en conclut *qu'il existe des nombres* N *tels que les nombres* N_1 *et* N_2, *qui en dérivent, sont à la fois multiples de* N.

Les formes générales de ces nombres sont

$$N = 142857 \,.\, (1 + 10^6 + 10^{12} + \ldots + 10^{6k})$$

et

$$N = 285714 \,.\, (1 + 10^6 + 10^{12} + \ldots + 10^{6k}),$$

k étant un entier quelconque. Ces nombres sont les seuls, dans le système décimal, jouissant de cette propriété.

Lorsque $N = 142857$, $N_1 = 3N$, $N_2 = 2N$, $N_3 = 6N$, $N_4 = 4N$, $N_5 = 5N$. On obtiendrait directement ces résultats en recherchant les fractions $\frac{N_3}{D}, \frac{N_4}{D}, \frac{N_5}{D}$ comme nous avons fait pour $\frac{N_1}{D}$ et $\frac{N_2}{D}$.

Par suite, *le nombre*

$$N = 142857 \cdot (1 + 10^6 + 10^{12} + \ldots + 10^{6k})$$

est la seule forme d'un nombre

$$N = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$$

pour lequel les entiers $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_{n-1}$ *sont à la fois des multiples de ce nombre.*

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

CĂRȚI VECHI DE MATEMATICĂ

D-l inginer D. LEONIDA a binevoit a dona *Gazetei Matematice* mai multe cărți vechi de matematică pe care le-am anunțat la pag. 415. Dintre acestea, am vorbit mai înainte de unele; este interesant să spunem câte ceva despre altele din ele. Aci ne vom ocupa de o Geometrie apărută la Berlin în 1767, și care are ca titlu:

«Die | **Geometrie** | in Tabellen | also verfasset, | dass die Theorie | nach mathematischer Lehrart vorgetragen, | und die Praxis | auf dem Pappier und im Felde, | in deutlichen Exempeln gezeigt wird, | mit XVI Kupfer-Tafeln, | nebst | **Georg Sarganecks** | weitend. Paed. Reg. Issp. Adj. zu Halle, | Vorsshlägen und Anmerkungen von der leichtesten und | nützlichsten Lehrart in der Geometrie, wie auch vom Gebrauch | des Proportional-Zirckels. | Dritte, mit einer Kupfertaffel und angehängter Nachricht, von: dem Gebrauch der auf derselben abgezeichneten Instrumente, | vermehrte Auflage. Berlin 1767. | Im Verlag des Buchlandes der Real-Schule».

Cartea are 464 pagini de 145 × 72, partea tipărită, și 17 planșe cu figuri mici, dar clare. Ea începe cu o prefață lungă de 16 pagini, datată 18 Noemvrie 1754. Autorul spune acolo că:

„O practică sigură trebue să reazeme pe o teorie fundamentală. Amândouă trebue să fie strâns legate dacă cineva voieşte să obțină foloasele mari și glorioase ale matematicilor".

Autorul vorbește de programul matematicilor în diferitele clase și de ideile ce l'au condus la alcătuirea Geometriei. Prefața se încheie

cu considerațiuni de ordin religios, căci matematica duce ușor spiritul la cunoașterea adevărului și veșniciei lui!

După prefață urmează o *Introducere.* Aci vorbește de *definițiune nominală,* (de unde vine cuvântul *geometrie*), *definițiune reală,* apoi de împărțirea geometrii în *Longimetrie* sau *Rectimetrie, Planimetrie* și *Stereometrie.* Altă clasificare este în *geometrie generală* sau *elementară* cu ramurile *teoretică* și *practică* și *geometria înaltă* sau *sublimă* care se ocupă cu liniile curbe și suprafețele strâmbe; deosibește apoi *agrimensura* și *geometria subterană,* pentru minieri (Marckscheidekunst). Geometria cuprinde *Grammographia,* (desemnarea figurilor), *grammometria* (măsurarea figurilor), *metamorfoza* (transformarea figurilor) *grammologistica* (mărirea sau micșorarea, — reducerea figurilor) *diastimetria* (măsurarea distanțelor), *altimetria* (măsurarea înălțimilor), *bathometria* (măsurarea adâncimilor). Acestea pentru geometria liniei. Mai introduce apoi cuvinte ca *Planigrafia planimetrie, archimetrie, megothologie, metrologie, pantometrie,* etc.

In studiul geometriei întâlnim *definițiuni, axiome, postulate, ipoteze, teoreme, conjectarii* (corolarii), *probleme, scolii;* Geometria nu trebue să se învețe ca un pictor; elevul trebue să facă măsurători, transformări, etc. El trebue să capete noțiune precisă de toate elementele de care se folosește; să facă singur figuri și corpuri exacte.

Autorul arată apoi pe larg ce foloase poate trage cineva din învățământul matematicelor. In prima linie ea e știința care ne conduce la o recunoaștere fundamentală a puterii, înțelepciunii și bunătății lui Dumnezeu; ea ne arată până unde merge logica omenească; ea desvoltă puterea de a raționa; ea este de folos pentru priceperea altor științe; ea ne învață să măsurăm mărimile; ea este necesară teologilor, juriștilor, medicilor, oamenilor de Stat, militarilor, economiștilor. Sunt însă și unii care condamnă matematicele pentru că sunt speculative, se ocupă cu fleacurile de puncte, linii, unghiuri, etc., că face pe om să nu mai primească nimic fără demonstrație și că duce astfel la ateism; ea duce la prea mare spirit de preciziune care e vătămător în practică; mulți oameni mari ai omenirii nu cunoșteau matematici. Autorul arată apoi foloasele speciale ale geometriei.

Urmează după aceasta un scurt istoric al Geometriei. Se spune

că afirmația că AVRAM a adus Geometria din Caldea nu se poate susține. Geometria e de origină egipțiană. De acolo au luat-o THALES și PITAGORA, acolo a scris EUCLIDE celebrele lui *Elemente de geometrie*. Vorbește de ARCHIMEDE, ERATOSTENE, APOLLONIUS; Romanii erau mai mult agrimensori decât matematiciani. Vorbește apoi de DIOPHANE, PAPPUS, de matematica la Arabi, de trecerea ei în Europa; dă apoi o listă de publicații matematice din secolul XVIII, printre care și ale lui CHRISTIAN FREYHERR VON WOLF: *„Elementa matheseos universae"*, după care au făcut traduceri și profesorii greci dela Academiile din București și Iași. Introducerea se termină cu o descripție a aparatelor și instrumentelor de care se vorbește în carte.

Dela pag. 51 începe tratarea geometriei. Fiecare pagină are pe de lături cuvintele de definit și indicarea figurilor respective-apoi textul explicațiilor sau demonstrațiilor, etc. și la fine o coloană cu numărul paragrafului. Sunt în total 1108 paragrafe. Acestea sunt tabelele de care se vorbește în titlul cărții. Iată specimene din aceste tabele:

	§§	
Fig. 26. **Triangulum.** Un triunghiu *abc* este o figură care este închisă de trei linii.	56	
1. *Teoremă.* Toate unghiurile care stau alături (anguli deinceps positi) pe o linie dreaptă fac 180°. *Demonstrație.* Unghiul *x* are ca măsură a sa arcul *ab*. Unghiul *y* însă are pe *bc* ca măsură a sa. (§ 148) și ambele arce fac împreună o jumătate de cerc.	234	Fig. 87
Problemă. Un oval, sau linie în formă de ou, să se desemneze. *Deslegare.* Descrie un cerc și în el diametrul *ab*. Imparte arcul *ab* în *d* în două părți egale și du liniile *bd* și *ad*, ceva prelungite spre *m* și *n*. Pune compasul în *a*, deschide-l până în *b* și descrie arcul *bn*. La fel, pune compasul în *b* și cu deschiderea precedentă descrie arcul *am*. Din *d* du în fine arcul *mn*.	461	Fig. 171

Tabelele tratează aparte longimetria, planimetria și stereometria. La fiecare din ele sunt subdiviziuni referitoare la *a)* definițiuni; *b)* ipoteze; *c)* axiome, postulate; *d)* teoreme; *e)* probleme și *f)* observațiuni. Se găsesc și tabele pentru unități de măsură, pentru calculul volumelor butoaielor, etc.

Dela pag. 382 înainte e un apendice cu *observaţiuni didactice* şi cu explicarea avantajelor tabelelor de rectimetrie, planimetrie şi stereometrie. La pag. 443 se tratează întrebuinţarea compasului de proporţionalitate şi la pag. 459 descrierea unui aparat topografic.

I. IONESCU.

SUMA UNEI SERII

In cele ce urmează ne propunem să găsim suma seriei

$$\alpha^m + (\alpha+1)^m x + (\alpha+2)^m x^2 + \ldots + (\alpha+p)^m x^p + \ldots$$

unde presupunem numărul m întreg pozitiv sau zero, α un parametru oarecare, iar: $|x| < 1$ [1]). Fie S_m această sumă.

Pentru primele două valori ale lui m avem

$$S_0 = \frac{1}{1-x}\ , \quad S_1 = \alpha S_0 + x S'_0 = \frac{\alpha + (1-\alpha)x}{(1-x)^2}\ .$$

Ne propunem să demonstrăm în general că S_m este de forma

$$(1) \qquad S_m = \frac{P_m(x)}{(1-x)^{m+1}}\ ,$$

unde $P_m(x)$ este un polinom de gr. m cel mult. Intr'adevăr, pentru $m = 0,1$ afirmaţia este adevărată. Să presupunem că este adevărată până la $m-1$. După expresia lui S_m se vede că avem relaţia

$$(2) \qquad x^{\alpha-1} S_m = (x^\alpha S_{m-1})'\ ,$$

sau încă

$$S_m = \alpha S_{m-1} + x S'_{m-1}\ ,$$

unde înlocuind pe S_{m-1} prin valoarea sa, rezultă

$$S_m = \frac{x(1-x) P'_{m-1}(x) + [(m-\alpha)x + \alpha] P_{m-1}(x)}{(1-x)^{m+1}}\ .$$

1) Rezultatele ce vom stabili generalizează rezultatele găsite în articolul „Asupra sumei unor serii“ publicat la pag. 340. Metoda întrebuinţată în articolul de faţă este diferită de metoda din articolul citat.

Cum $P_{m-1}(x)$ este presupus un polinom de gr. $m-1$ cel mult, polinomul dela numărătorul lui S_m este un polinom de gr. m cel mult. S_m este deci de forma (1).

Să determinăm expresia acestui polinom. Fie

$$P_m(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_0 .$$

Din (1) scoatem

$$(1') \qquad P_m(x) = (1-x)^{m+1} S_m(x) ,$$

sau dezvoltat

$$P_m(x) = (1 - C^1_{m+1} x + \ldots + C^k_{m+1} x^k + \ldots + C^{m+1}_{m+1} x^{m+1}) .$$

$$(3) \quad [\alpha^m + (\alpha+1)^m x + \ldots + (\alpha+p)^m x^p + \ldots] ,$$

de unde prin identificare

$$A_k = (\alpha+k)^m - C^1_{m+1}(\alpha+k-1)^m + C^2_{m+1}(\alpha+k-2)^m - \ldots + (-1)^k C^k_{m+1} \alpha^m ,$$

adică polinomul $P_m(x)$ are drept expresie

$$(4) \qquad P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C^i_{m+1} (\alpha+k-i)^m x^k .$$

Observare. Inmulțind relația (1') cu $(1-x)^{p-1}$ (p întreg și pozitiv) vom avea

$$(1-x)^{p-1} P_m(x) = (1 - C^1_{m+p} x + \ldots + C^k_{m+p} x^k + \ldots + C^{m+p}_{m+p} x^{m+p}).$$

$$(3') \quad [\alpha^m + (\alpha+1)^m x + \ldots + (\alpha+p)^m x^p + \ldots]$$

și cum prima parte este un polinom de gr. $m+p-1$ cel mult, va trebui să avem

$$u^m - C^1_{m+p}(u-1)^m + C^2_{m+p}(u-2)^m - \ldots + (-1)^{m+p} C^{m+p}_{m+p} (u-m-p)^m \equiv 0$$

unde am notat prin: $u = \alpha + k$, adică u este un număr oarecare. Am regăsit astfel o identitate cunoscută.

GH. TH. GHEORGHIU.

PROPRIETĂȚI ALE TRIUNGHIULUI

Fie ABC un triunghiu oarecare și I_a , I_b , I_c trei involuții pe laturile BC, CA, AB, în care se corespund perechile de vârfuri (B, C), (C, A), (A, B). Vom demonstra următoarele :

Teorema I. *Dacă involuțiile* I_a , I_b , I_c *posedă proprietatea că există trei puncte* a, b, c, *situate pe laturile lui* ABC, *coliniare sau picioare a trei ceviene, ale căror corespunzătoare* a', b', c', *în cele trei involuții să fie deasemenea respectiv coliniare sau picioarele a trei ceviene, atunci corespunzătoarele în cele trei involuții a trei puncte coliniare sau picioare a trei ceviene oarecare, situate pe laturile lui* ABC, *sunt respectiv trei puncte coliniare sau picioarele a trei ceviene.*

Teorema II. *Dacă există pe laturile lui* ABC *trei puncte* a, b, c *coliniare sau picioarele a trei ceviene, ale căror corespunzătoare* a', b', c' *în involuțiile* I_a , I_b , I_c *să fie respectiv picioarele a trei ceviene sau trei puncte coliniare, atunci întotdeauna corespunzătoarele a trei puncte coliniare sau a picioarelor a trei ceviene oarecare sunt respectiv picioarele a trei ceviene sau a trei puncte coliniare în cele trei involuții considerate.*

Demonstrația pentru aceste propozițiuni este unică.

Perechile (a, a') , (b, b') , (c, c') se corespund prin ipoteză în involuțiile I_a , I_b , I_c și avem după teoremele lui MENELĂUS și CEVA :

$$(1) \qquad \frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB}\cdot\frac{a'B}{a'C}\cdot\frac{b'C}{b'A}\cdot\frac{c'A}{c'B}=\pm 1.$$

Fie încă (a_1, a'_1) , (b_1, b'_1) , (c_1, c'_1) trei perechi de puncte corespunzătoare oarecare în aceste involuții. Pe latura BC punctelor a, a_1, B, C le corespund în involuția I_a respectiv a', a'_1, C, B.

Avem prin urmare:

$$(aa_1\,BC) = (a'a'_1\,CB) = (a'_1a'\,BC)$$

din care deducem relația :

$$(2) \qquad \frac{aB}{aC}\cdot\frac{a'B}{a'C}=\frac{a_1B}{a_1C}\cdot\frac{a'_1B}{a'_1C};$$

Pe laturile CA şi AB avem relaţiile analoage:

$$(3)\quad \frac{bC}{bA}\cdot\frac{b'C}{b'A}=\frac{b_1C}{b_1A}\cdot\frac{b'_1C}{b'_1A};\qquad (4)\quad \frac{cA}{cB}\cdot\frac{c'A}{c'B}=\frac{c_1A}{c_1B}\cdot\frac{c'_1A}{c'_1B}.$$

Inmulţind parte cu parte relaţiile (2), (3), (4) şi ţinând seama de (1) obţinem relaţia:

$$(5)\quad \frac{a_1B}{a_1C}\cdot\frac{b_1C}{b_1A}\cdot\frac{cA}{c_1B}\cdot\frac{a'_1B}{a'_1C}\cdot\frac{b'_1C}{b'_1A}\cdot\frac{c'_1A}{c'_1B}=\pm 1$$

care demonstrează teoremele enunţate.

In cazul teoremei I involuţiile I_a, I_b, I_c sunt cunoscute în geometria proiectivă sub numele de involuţii asociate. Ele sunt sau toate iperbolice sau una iperbolică şi două eliptice. Se demonstrează că punctele lor duble sunt perechile de vârfuri opuse ale unui patrulater complet.

Aplicaţiuni. 1°. Izogonalele unghiului A al triunghiului ABC fiind simetrice faţă de bisectoarea acestui unghiu se corespund involutiv. Tăind această involuţie cu latura BC obţinem pe BC o involuţie în care se corespund vârfurile B, C şi ale cărei puncte duble sunt evident picioarele bisectoarelor ce pleacă din A. Fie I_a această involuţie, iar I_b şi I_c involuţiile analoage. Dacă notăm cu *a, b, c* picioarele bisectoarelor interioare aceste puncte sunt duble şi putem aplica prima teoremă:

Dacă trei ceviene sunt concurente şi izogonalele lor sunt concurente.

Dacă A, B, C *sunt trei puncte colineare, pe laturile lui* ABC, *izogonalele dreptelor* AA_1, BB_1, CC_1 *luate respectiv în raport cu unghiurile* A, B, C *tae laturile opuse în trei puncte colineare.*

2°. A_1, B_1, C_1, *fiind trei puncte colineare sau picioarele a trei ceviene pe laturile triunghiului* ABC, *iar* A_2, B_2, C_2, *conjugatele lor armonice respectiv în raport cu perechile de vârfuri* (B, C), (C, A), (A, B), *mijloacele segmentelor* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *sunt colineare.*

In adevăr se observă că involuţiile ce au ca puncte duble perechile (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) sunt asociate. Mijloacele segmentelor considerate sunt prin urmare colineare ca fiind corespunzătoarele punctelor dela infinit ale laturilor triunghiului ABC.

Avem astfel o demonstrație nouă a proprietății că mijloacele diagonalelor unui patrulater complet sunt colineare. In cazul când A_1, B_1, C_1 sunt picioarele a trei ceviene patrulaterul în chestiune este format de laturile triunghiului $A_1B_1C_1$ şi de dreapta $A_2B_2C_2$. Propoziția de mai sus se mai poate enunța.

3⁰. *Fie* P *un punct în planul triunghiului* ABC, *iar* A_1, B_1, C_1 *intersecțiile cevienelor* AP, BP, CP *cu cercul circumscris. Perpendicularele duse prin* A_1, B_1, C_1 *pe dreptele* AA_1, BB_1, CC_1 *întâlnesc laturile* BC, CA, AB *în trei puncte colineare.*

In adevăr, involuțiile tăiate pe laturile BC, CA, AB, ale triunghiului de fascicolele de cercuri determinate respectiv prin perechile de puncte (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1) satisfac evident condițiile enunțate la început. Picioarele înălțimilor vor fi prin urmare transformate în trei puncte colineare. Ori, aceste puncte, se vede îndată că sunt intersecțiile laturilor cu perpendicularele duse prin A_1, B_1, C_1 pe cevienele lui P.

Sperăm că cele câteva aplicațiuni făcute sunt suficiente pentru a învedera fecunditatea teoremelor generale stabilite.

CEZAR IVĂNESCU
Student Iaşi.

NOTE MATEMATICE

36. *Asupra geometriei descriptive.* In Nota matematică No. 49, publicată în Anul XXXIX, pag. 403 am spus că *Geometria descriptivă,* cu aplicațiunile ei, intră în domeniul ingineresc, iar nu în cel matematic. In această privință găsesc în Cartea D-lui M. LECAT,— despre care se vorbeşte la Bibliografii în acest număr, — următoarele citațiuni la pag. 81 :

„Les épures de géométrie descriptive, je les déteste".

CH. HERMITE.

„Je partage votre aversion pour la géométrie descriptive".

PH. J. STIELTJES.

MAURICE LECAT vorbind de MONGE spune :

„On peut ajouter qu'il a „inventé" la géométrie descriptive, science (?) qui pue l'École Militaire".

Un inginer, care foloseşte această ştiinţă, nu exprimă niciodată asemenea păreri asupra ei !

I. IONESCU.

37. *Asupra Geometriei analitice de* T. LALESCU. D-l Inginer MIHAIL VASILIU a donat *Gazetei Matematice* exemplarul din *„Tratat de Geometrie analitică"* de TRAIAN LALESCU, fascicola I apărută în Anul 1920 în *„Biblioteca Gazetei Matematice"* în care autorul făcuse corectările şi adausurile pentru tipărirea ediţiunii II. D-l MIHAIL VASILIU a scris pe pagina 3-a a acestui exemplar următoarele :

„Aceasta este corectura tipografică a lucrării ediţiei II, care urmează după aceasta. Toate adăugirile scrise cu mâna sunt scrise personal de răposatul Prof. TRAIAN LALESCU. *Grija tipăririi acestei lucrări, corecturile intermediare şi unele mici îndreptări de litere au fost făcute de subsemnatul care a fost asistentul Prof.* TR. LALESCU *la cursul de Geometria analitică dela Şcoala Politehnică din Bucureşti în anii 1922 — 1923".*

(ss) Ing. M. VASILIU.

Ediţia II s'a tipărit tot în *„Biblioteca Gazetei Matematice"*, prin îngrijirea D-lui M. VASILIU.

Am pus această notă pentru ca să se vază, şi pe altă cale, că LALESCU ţinea ca operele lui date spre publicare *Gazetei Matematice* să se continue publicarea lor tot în *„Biblioteca"* acestei reviste.

I. IONESCU.

38. *Asupra problemei 3977.*

Soluţia dată acestei probleme de D-l N. N. MIHĂILEANU mi-a suggerat o alta, din care va rezulta în mod direct că punctele ω_a , ω_b , ω_c — mijloacele medianelor exterioare — sunt coliniare.

Se ştie (a se vedea G. M. Vol. XXXV, pag. 289 — 294) că printr'o proecţie conică se pot permuta axele radicale a două cercuri. Aplic această permutare axului ortic şi dreptei dela infinit. Fie deci A'B'C' triunghiul ortic al triunghiului ABC şi AT_a , BT_b , CT_c tan-

gentele cercului circumscris în vârfurile A, B, C. Punctul dela infinit [B'C' , AT_a] se va transforma într'un punct ω'_a situat pe simediana exterioară (ce se păstrează) şi pe o latură a triunghiului median, transformatul triunghiului ortic. Deci $\omega'_a \equiv \omega_a$, etc.

Aşa dar punctele ω_a , ω_b , ω_c sunt coliniare pe noul ax ortic, transformat al dreptei dela infinit.

ALEX. V. NICULESCU
Giurgiu.

39. *O proprietate a figurii lui* VECTEN. Cu ocazia redijării problemei 4364, a cărei soluţie se publică la pagina 421 din acest număr, am găsit şi următoarea proprietate interesantă, probabil cunoscută şi care se poate demonstra prin mijloace foarte elementare :

Mediana AA'' *a triunghiului* B_1AC_2 *este egală cu jumătate din latura* BC *a triunghiului* ABC *şi este perpendiculară pe această latură.*

Raportându-ne la figura de la pagina 422 din acest număr, observ că triunghiurile $AA_m B$ şi $AA''C_2$ sunt egale având laturile AB, AC_2 egale prin construcţie, laturile AA_m , AA'' şi unghiurile BAA_m , AC_2A'' egale de oarece triunghiurile ABA', AB_1C_2 sunt egale prin construcţie. Deci

$$AA'' = A_m B = \frac{a}{2} .$$

Apoi deducem că deoarece $\sphericalangle C_2AB$ e drept şi

$$\sphericalangle A''AC_2 = \sphericalangle ABA_m$$

rezultă că $\sphericalangle BAH$ este complimentarul lui B, deci A''AH e perpendiculară pe BC.

După cum se vede, este corespondenţă între această proprietate a medianei triunghiului AB_1C_2 şi acea a medianei triunghiului ABC, aşa că putem enunţa proprietatea comună sub forma :

Mediana AA_m *din triunghiul* ABC *este perpendiculară pe latura* B_1C_2 *a triunghiului* AB_1C_2 *şi mediana* AA'' *a acestui din urmă triunghiu este perpendiculară pe* BC.

GENERAL GH. BUICLIU.

40. *Asupra problemei 4392.*

1. Dacă N şi 2N au câte o cifră, nu avem soluţie.
2. Idem dacă 2N are două cifre.
3. Dacă N are 2 cifre şi 2N are 3 cifre, nu avem soluţie.
4. Dasă N şi 2N au câte 3 cifre, nu avem soluţie.
5. Dacă N şi 3N au câte o cifră, nu avem soluţie.
6. Dacă N are o cifră şi 3N are 2 cifre, nu avem soluţie.
7. Dacă N şi 3N au 2 cifre, nu avem soluţie.
8. Dacă N are o cifră şi 4N are 2 cifre, nu avem soluţie.
9. Dacă N are 2 cifre şi 4N 3 cifre, nu avem soluţie.

MAIOR I. LINTEŞ.

41. *Asupra articolului „Asupra unor sume trigonometrice"* (pag. 351).

Sumele care fac obiectul acestui articol se mai pot calcula observând că le putem scrie sub forma

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(m+k)x = \sum_{k=1}^{m+n} \sin kx - \sum_{k=1}^{m} \sin kx,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(m+k)x = \sum_{k=1}^{m+n} \cos kx - \sum_{k=1}^{m} \cos kx.$$

Inlocuind sumele din partea dreaptă prin expresiunele lor cunoscute se găsesc valorile date în articolul citat.

GH. TH. GHEORGHIU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURSUL « GAZETEI MATEMATICE »

2 Mai 1935

CLASA IV

Geometria în spaţiu. Se dă un con având baza un cerc cu centrul C şi o generatoare perpendiculară pe planul bazei.

1°. Să se arate că perpendicularele, ridicate în planul bazei pe generatoare în punctele unde ele înţeapă planul, sunt concurente.

2°. V fiind vârful conului, g lungimea celei mai mici generatoare, G lungimea celei mai mari, VA, VB două generatoare de lungimi:

$$\overline{VA} = \frac{\sqrt{G^2 + 3g^2}}{2} \quad , \quad \overline{VB} = \frac{\sqrt{3G^2 + g^2}}{2},$$

să se arate că dreptele VA, VB, VC sunt în acelaş plan.

3°. Să se calculeze cunoscând g şi G aria piramidei cu baza un triunghiu echilateral înscris în cercul bazei conului, cu vârful în V şi având una din muchiile ce trec prin V de lungime g.

4°. În aceleaşi condiţii să se calculeze aria triunghiului VAB.

Algebra. I. Un negustor are x litri de benzină cu densitatea 0,710 şi y litri petrol cu densitatea de 0,805.

Amestecă aceste cantităţi şi obţine un produs cu o densitate de 0,750, pe care îl vinde cu 7 lei litrul câştigând astfel cu 600 lei mai mult decât ar fi vândut separat benzina cu 8 lei litrul iar petrolul cu 4 lei kgr. Să se afle cantităţile x şi y.

II. Să se scrie sub forma unui produs de factori binomul $1 - x^{10}$.

Ambele chestiuni sunt obligatorii.

CLASA V

Geometrie plană. I. Se dau două cercuri secante C, C' şi M un punct pe coarda lor comună. Prin M se duc în cercurile C, C' respectiv coardele AB, A'B'.

Dreapta AB taie cercul C' în D şi E, AB' îl taie în D', iar A'B în E'.

1°. Să se arate egalitatea segmentelor $\overline{DE'}$, $\overline{D'E}$.

2°. N fiind intersecţia dreptelor DE' şi D'E, se cere locul geometric Δ al punctului N când A'B' se roteşte în jurul lui M.

3°. Se cere locul geometric al intersecţiilor curbelor Δ cu AB. când A rămâne fix iar M descrie coarda comună.

II. Fie A, B punctele comune a 2 cercuri C, C' şi T, T' punctele de contact ale cercurilor cu tangenta lor comună. Se notează M, M' mijloacele segmentelor AT, AT'.

1°. Să se afle locul geometric al punctului P, intersecţie a dreptelor TM', T'M când raza cercului C' variază.

2°. C'_0 fiind acela dintre cercurile C' a cărui tangentă în A trece prin centrul cercului C, să se calculeze segmentul AP corespunzător, în funcţie de R. şi R'_0, razele celor 2 cercuri C şi C'_0.

Ambele chestiuni obligatorii.

Algebra. I. Se dă ecuaţia

$$x^4 - 6mx^2 + (m+1)^2 = 0,$$

unde m este un parametru real. Se cere:

1°. Să se rezolve ecuaţia şi să i se scrie rădăcinile sub forma cea mai simplă;

2°. Să se discute ecuația;

3°. Fie : x_1 , $-x_1$, x_2 , $-x_2$ rădăcinile ecuației. Să se scrie ecuația de gr. II care are drept rădăcini pe x_1^2 și x_2^2. Folosind relațiile dintre rădăcinile și coeficienții acestei ecuații, să se calculeze expresia

$$E = \frac{x_1^4}{x_1^4 + m} + \frac{x_2^4}{x_2^4 + m};$$

4°. Să se determine m așa fel ca : $E = 1$.

II. Să se facă rațional numitorul fracției

$$\frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt[3]{2}}.$$

Să se pună rezultatul sub forma cea mai simplă.

CLASA VI

Geometria în spațiu. Se dă un triedru cu vârful în S, ale cărui muchi S_x , S_y , S_z sunt perpendiculare două câte două: O sferă oarecare cu centrul în O taie muchea S_x în punctele A, A', muchea S_y în punctele B, B' și muchea S_z în punctele C, C'. Din vârful S al triedrului se duce o perpendiculară pe planul ABC care taie acest plan în H și planul A'B'C' în G'. Deasemeni se duce din vârful S perpendiculară pe planul A'B'C' care taie acest plan în H' și planul ABC în G. Să se arate :

1°. Că H și H' sunt respectiv punctele de întâlnire a înălțimilor triunghiurilor ABC și A'B'C'.

2°. Că G și G' sunt respectiv punctele de întâlnire a medianelor triunghiurilor ABC și A'B'C'.

3°. Dreapta SO trece prin mijlocul M al dreptei GG' și avem :

$$\frac{SM}{SO} = \frac{1}{3}.$$

Se va face figura din spațiu în perspectivă, iar figurile din diferitele planuri, care intervin în demonstrație, se vor face separat și cât mai exact posibil. Chestiunea 3° nu este obligatorie.

Algebra. I. Se consideră pătratele primelor n numere. Să se găsească suma produselor două câte două ale acestor numere luate în toate modurile posibile.

II. Să se calculeze derivata funcțiunii

$$\frac{3x - 2x^3}{(1 - x)^2 (1 + x)} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}.$$

Să se scrie rezultatul sub forma cea mai simplă.

III. Să se studieze variaţia funcţiunei

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 + x}}{x}$$

şi să i se facă graficul.

Trigonometria. 1. Se cere lungimea unei curele încrucişate, aşezată pe 2 roţi având diametrele D şi *d*, iar distanţa între axele acestor roţi fiind *l*. Firul mediu al curelii este presupus în acelaşi plan.

Aplicaţie: $D = 800\ mm \quad d = 200\ mm \quad l = 1{,}5\ m.$

2. Să se calculeze toate unghiurile x, cuprinse între 0° şi 360° date de relaţia

$$\cot \tfrac{5}{6} x = \sqrt[3]{\frac{0{,}875 \sin^2 1^\circ\, 15'\, 38'' \times \operatorname{tg}^5 2853^\circ\, 49'\, 5''}{\cos 3831^\circ\, 5'\, 8'' \times 0{,}025 \sec 2108^\circ\, 6'\, 33''}}.$$

Ambele chestiuni sunt obligatorii.

Trigonometria. Seria 2-a. 1. Un inginer trebue să construiască o linie electrică peste o vale adâncă în munte. Cei doi stâlpi A şi B, susţinători ai linei peste această vale, au înălţimile h_A şi h_B şi se găsesc situaţi respectiv la cotele k_A şi k_B, stâlpul B fiind aşezat pe o creastă având lungimea *l*.

Lungimea sârmei necesare acestei linii se calculează cu ajutorul formulei

$$L = a_0 \left[1 + \frac{a^2 \cos^2 \gamma}{24\, \xi^2} \right]$$

în care:

L este lungimea sârmei
a_0 este distanţa între vârfurile celor 2 stâlpi
a este distanţa orizontală între cei 2 stâlpi
γ este unghiul făcut de aceste 2 direcţii
ξ este un parametru dat.

Cum îşi va determina inginerul elementele necesare calculării lungimii firului ce trebue să întindă peste vale?

Aplicaţiune: Să se calculeze, cu ajutorul logaritmilor, lungimea firului în următoarea situaţie:

$h_A = 20\ m \quad h_B = 22\ m \quad k_A = 1130\ m \quad k_B = 1215\ m$

$l = 60\ m \quad \hat{B} = 90^\circ \quad \hat{C} = 83^\circ\, 47' \quad \xi = 600$

2. Să se rezolve un triunghiu dreptunghiu cunoscându-se proecţiile α şi β ale catetelor pe ipotenusă.

Aplicaţie: $\alpha = 37m \quad \beta = 91m.$

Ambele chestiuni sunt obligatorii.

CLASA VII

Geometria. Bisectoarele interioare AI, BI, CI, ale unui triunghiu ABC întâlnesc laturile opuse respectiv în A', B', C'. Din A' se duce la cercul înscris triunghiului ABC a doua tangentă, care întâlneşte pe B' C' în punctul A''. Analog se obţin punctele B'' şi C''. In fine dreapta B' C' tae drepta BC în punctul A_1 şi analog se obţin punctele B_1 şi C_1. Să se arate

1°. Că punctele A_1, B_1, C_1, sunt în linie dreaptă

2°. Că punctele A'', B'', C'', sunt în linie dreaptă

3°. Că unghiurile A'IA'', B'IB'', C'IC'', sunt drepte

4°. Că dreptele $A_1 B_1 C_1$ şi A'' B'' C'' sunt paralele.

* * *

Demonstraţia se va face transformând figura prin polare reciproce faţă de cercul înscris în triunghiul ABC. Chestiunea 4° nu este obligatorie.

Geometria descriptivă. Linia pământului la mijlocul paginei întâia a colii de hârtie şi paralelă cu marginile mici ale paginei.

Pe această linie se consideră un punct O situat la 5 milimetri dela marginea din stânga a paginei ca origină a coordonatelor.

Se dă punctul A (60, 60, 60), unde prima cifră este distanţa dela O până la intersecţia liniei de ordine a punctului A cu linia pământului, a doua cifră este depărtarea, iar a treia cifră este cota punctului A.

Se dă şi dreapta D (*dd'*), ale cărei proiecţiuni sunt suprapuse, întâlnesc linia pământului la 100 milimetri de O şi fac un unghiu de 45° spre dreapta cu linia pământului, prelungindu-se şi de-o parte şi de alta a punctului de intersecţie cu linia pământului.

Se cere să se găsească adevărata mărime a distanţei dela punctul A la dreapta D, utilizând planul P ce trece prin A şi este perpendicular pe dreapta D.

Pe pagina a treia a colii de hârtie se va scrie o legendă, arătând mersul lucrării şi metodele întrebuinţate.

Algebra. 1. Să se determine polinoamele $P_n(x)$ de gradul n, cari satisfac relaţia

$$P_n(x+a) + \lambda P_n(x) = \frac{x^n}{n!},$$

unde $\lambda \neq -1$. Să se arate că există un singur polinom satisfăcând acestei relaţii. In cazul când $\lambda = -1$, să se arate că există polinoame de gradul $n+1$, cari satisfac relaţia

$$P_{n+1}(x+a) - P_{n+1}(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

2. Să se calculeze

$$\lim_{n=\infty} \cos^n \frac{\alpha}{n}$$

unde $\alpha < 90°$.

3. Să se studieze natura seriei

$$1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{12}}{12!} + \ldots$$

şi să se calculeze suma ei.

Astronomie. I. Să se calculeze grosimea atmosferei terestre, ştiind că crepusculul se termină când distanţa zenitală a Soarelui a atins 108°.

II. Turnul Eiffel are înălţimea de 300 m.
Cunoscându-se latitudinea geografică a Parisului:

$$\varphi = 48^\circ . 50' . 11'' . N .$$

să se găsească lungimea umbrei turnului la amiază în ziua când declinaţiunea Soarelui este:

$$\mathcal{D} = 23^\circ . 26' . 50'' .$$

III. Fenomenul „Precesiei" şi „Nutaţiei".

ANUL PREPARATOR, ŞCOALA POLITECHNICĂ

Algebra. 1. Să se găsească cel mai mare divizor comun al polinoamelor

$$x^{12} - 1 \quad , \quad x^8 - 1 .$$

Să se generalizeze, căutându-se condiţia ca polinoamele

$$x^m - 1 \quad , \quad x^n - 1$$

să aibă un divizor comun.

2. u_n şi v_n fiind termenii generali a două serii, dacă raportul $\frac{u_n}{v_n}$ are o limită, să se arate că aceiaşi limită o are şi raportul $\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}}$.

Ca aplicaţie să se calculeze limita expresiunei

$$n \sqrt[n]{n} - (n-1) \sqrt[n-1]{n-1}$$

pentru n tinzând către infinit.

3. Să se rezolve ecuaţia

$$x^6 - x^5 - 8x^4 + 2x^3 + 21x^2 - 9x - 54 = 0 ,$$

ştiind că admite rădăcina $i + \sqrt{2}$.

Geometria Analitică. I. Se consideră o conică (C) cu axele AA', BB' şi punct M pe ea.

Fie P punctul unde cercurile AMA' şi BMB' se tae a doua oară.

Să se găsească ecuaţiunea locului descris de punctul P, când M, descrie conica (C). Să se examineze poziţiile lui P corespunzătoare vârfurilor conicei (C).

II. Se consideră o conică (C) cu axele AOA', BOB', un punct M pe ea şi M' simetricul său în raport cu axa AA'. Să se găsească locul punctului P de intersecţie al dreptelor OM şi M'B, când punctul M descrie Conica (C).

Să se determine elementele acestui loc şi să se construiască.

Ambele chestiuni obligatorii.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXVIII. Fascicola III. Septemvrie 1934. Buenos Aires. LOUIS COUTURAT de CLABO CORNELIO DASSEN.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 59. No. 12, Martie 1935.

Idem. No. 13, Aprilie 1935.

Știință și progres. Anul II. No. 1. Aprilie 1935. Târgu-Mureș. După un an de activitate. — Proprietăți ale patrulaterului complet, de D. V. IONESCU.

Commandant I. LINTEȘ. *Sur les efforts dynamiques.* (Extrait du *«Bulletin scientifique de l'École polytechnique de Timișoara»*). Timișoara 1935.

Commandant I. LINTEȘ. *Quelques questions de «Balistique extérieure».* (Extrait du *«Bulletin scientifique de l'École polytechnique de Timișoara»).* Timișoara 1935.

N. CIORĂNESCU. *Une propriété caractéristique des fonctions polyharmoniques.* (Extras din *Buletinul Facultății de Științe din Cernăuți*). Cernăuți 1933.

N. CIORĂNESCU. *Quelques propriétés de moyenne des fonctions continues et des fonctions sommables.* (Extras din *Bulletin des sciences mathématiques).* Paris 1933.

N. CIORĂNESCU. *Sur l'équation intégrale à limites fixes et à un paramètre.* (Extras din *Bulletin des sciences mathématiques).* Paris 1934.

N. CIORĂNESCU. *Sur une classe de polynomes à un paramètre génnéralisant les polynomes de Legendre.* (Extras din *Bulletin mathématique de la Société roumaine des sciences).* București 1934.

N. CIORĂNESCU. *Sur une équation intégrale linéaire à limites fixes et à un paramètre.* Extras din *Rendinconti del Seminario matematico della R. Università di Padova).* Padova 1934.

N. CIORĂNESCU. *Sur le developpent d'une fonction analytique de fonction analytique et sur quelques conséquences.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Academie des sciences de Paris*). Paris 1935.

N. CIORĂNESCU. *Sur une propriété générales des courbes planes fermées et ses applications.* (Extras din *Bulletin scientifique de la Section scientifique de l'Académie roumaine).* București 1935.

N. CIORĂNESCU. *L'équation intégrale linéaire à limites variables et à un paramètre.* (Extras din *Bulletin mathématique de la Société roumaine des sciences*). Bucureşti 1935.

GH. TH. GHEORGHIU. *Sur certaines fonctions attachées aux fonctions métasphériques.* (Extras din *Bulletin scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara*). Timişoara 1935.

GH. TH. GHEORGHIU. *Fonctions métasphériques et leur extension.* (Extras din *Mathematica).* Cluj 1935.

GUSTAVE JUVET. *Leçons d'analyse vectorielle.* Deuxième Partie. *Applications de l'analyse vectorielle. Introduction à la Physique mathématique.* Lausanne 1935.

Acest volum continuă volumul I despre care am vorbit la pag. 299 Anul XXXVIII. In el se aplică teoriile analizei vectoriale la fizică şi în special la teoriile potenţialului, la hidrodinamică şi electromagnetism şi la propagarea căldurii. Prin exemplele date se clarifică teoriile din prima parte a cursului pe care autorul îl face elevilor ingineri dela Lausanne.

Cartea conţine următoarele capitole: I. Atracţiune şi potenţiale neutoniane. II. Dinamica fluidelor perfecte. III. Funcţiunea armonică în spaţiu şi în plan. Potenţiale logaritmice. IV. Ecuaţia lui FREDHOLM. V. Problema lui DIRICHLET, problema lui NEUMANN şi probleme mixte. VI. Extinderea la domeniile ale căror mărgini au puncte unghiulare. VII. Reprezentarea conformă a ariilor plane. VIII. Rezistenţa fluidelor perfecte. Teorema lui KUTTA-JOUKOWSKY. IX. Elemente de teoria câmpului electromagnetic. X. Ecuaţiile lui D'ALEMBERT şi potenţialele întârziate. XI. Elemente de teoria funcţiunilor de o variabilă complexă, formează un apendice la finele volumului.

Calităţile de claritate pe care le arătasem la primul volum le întâlnim şi aci.

Recomandăm această carte elevilor ingineri cari vor să se familiarizeze cu aplicaţiunile calculului vectorial la probleme de calcul tehnic.

I. I.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XV. No. 2. Aprilie 1935 Timişoara. O transformare a relaţiilor trigonometrice, de C. IVĂNESCU. Domeniul matematicilor în clasificarea lui AUGUSTE COMTE, de N. O. ZAHARIA.

AL. PANTAZI. *Sur la déformation le long de trajectoires orthogonales.* (Extras din *Buletinul Societăţii de Ştiinţe din Cluj).* Cluj 1931.

AL. PANTAZI. *Sur certaines propriétés projectives des familles de surfaces.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris).* Paris 1931.

AL. PANTAZI. *Sur les couples de congruences stratifiables.* (Extras din *Buletinul matematic al Societăţii române de ştiinţe).* Bucureşti 1932.

AL. PANTAZI. *Sur les couples de congruences stratifiables.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*). Paris 1933.

AL. PANTAZI. *Sur certaines congruences spéciales.* (Extras din *Bulletin mathématique de la Société roumaine des Sciences).* Bucureşti 1933.

AL. PANTAZI. *Sur certaines propriétés projectives des familles de surfaces.* (Extras din *Mathematica).* Cluj 1933.

AL. PANTAZI. *Sur certaines propriétés projectives des familles de surfaces.* (Extras din *Mathematica).* Cluj 1934.

AL. PANTAZI. *Sur les couples de congruences stratifiables par famille de surfaces réglées.* (Extras din *Bulletin mathématique de la Société roumaine des Sciences).* Bucureşt 1934.

Societatea licenţiaţilor în matematici dela Universitatea din Cluj. *Chestiuni de examen propuse la Secţia matematică a Facultăţii de Ştiinţe din Cluj.* No. 2, Cluj 1935.

MAURICE LECAT. *Erreurs de mathématiciens des origines à nos jours.* Bruxelles et Louvain. 25 Februarie 1935 [1]).

In prefaţa sa autorul ne spune că cel care a adunat într'un volum, pentru prima oară, erori de ale matematicianilor a fost un spaniol D. LUCIANO NOVARRO, în 1886 şi că în 1904 ED. MAILLET, a cerut prin *L'Intermédiaire des mathématiciens* ca să se colecţioneze asemenea erori. In acea Revistă s'au semnalat diferite erori făcute de cei mai mari matematicianí ai lumii, după care am reprodus şi noi unele în *Suplimentele Gazetei Matematice.*

D-l MAURICE LECAT, care de mai mulţi ani binevoieşte a trimite şi *Gazetei Matemtice* din lucrările sale, a scos de curând volumul cu titlul de mai sus, în care a adunat aproape 500 de erori comise de vreo 330 matematicianí printre cari figurează şi iluştrii ABEL, CAUCHY, CAYLEY, CHASLES, DESCARTES, EULER, FERMAT, GALILEO, GAUSS, HERMITE, JACOBI, LAGRANGE, LAPLACE, LEIBNIZ, NEWTON, POINCARÉ, SYLVESTER.

Aceasta nu trebue să ne mire. Se cunoaşte axioma: *«Errare humanum est»,* matematicianii sunt şi ei oameni, deci pot şi ei greşi. GOETHE a spus că sunt oameni cari nu greşesc de loc, căci nu produc nimic inteligent. Se poate zice că numai cine nu scrie nimic, nu greşeşte! Cu toate acestea D-l LECAT a găsit un matematician cu *«Casier vièrge: pas d'erreur».* Acesta este francezul GALOIS. Nu trebue însă uitat că acest matematician a murit la etatea de 21 ani, ucis într'un duel, şi că cu geniul şi productivitatea lui ar fi avut timpul să intre pe lista de mai sus a celebrilor săi predecesori şi succesori dacă ar fi trăit ca dânşii o vieaţă mai lungă. Cum să nu se iveaască nicio eroare la unul ca EULER care a scris 60 volume mari, groase în 4°, în toată vieaţa lui?

1) E prima oară când văd pusă pe copertă data exactă a tipăririi unei cărţi. Ce deosebire cu cărţile literare, economice, etc., la care nu se pun nici anul pentru a fi veşnic noui! I. I.

In acest volum autorul a lăsat la o parte erorile despre postulatul lui EUCLIDE, despre cuadratura cercului, despre istoria matematicilor, despre misticismul numerelor, despre astrologie. Totuşi pe ici, pe colo, se întâlnesc şi menţiuni de asemenea erori. Astfel, se spune că LEGENDRE a dat şapte demonstraţiuni pentru postulatul lui EUCLIDE, că AMPÈRE, la etatea de 13 ani găsise cuadratura cercului, că ALCUIN admitea după ST. AUGUSTIN că Dumnezeu a creat lumea în şase zile pentrucă 6 este număr perfect (egal cu suma divizorilor lui), etc.

Erorile sunt numerotate şi grupate de autorii lor în ordine alfabetică. Ele sunt tipărite numai pe paginele cu numere perechi, celelalte rămâind nescrise pentru a se putea face adăugiri ulterioare. La autorii erorilor se dau unele referinţe biografice. Astfel găsim:

ALEMBERT, Jean le Rond d'. . . Né le 16—XI—1717 à P.; m. le 29—X—1783 à P. Fils illég. d'un général d'arttill. M-e Ac. Sc. P. et Be. Secr. Ac. Fr.

Erorile sunt scrise pe patru coloane: prima arată eroarea, a doua scrierea în care s'a tipărit, în a treia cine a semnalat eroarea şi în a patra în ce uvraj sau revistă s'a semnalat. Iată cum se arată o eroare făcută de EULER:

Numere prime de forma $232a^2 + 1$. Printre cele 76 valori indicate, sunt două erori: $232 . 57^2 + 1 = 179 . 4211$. $232 . 117^2 + 1 = 271 . 11719$ **[115]**	*Comm. arith. Coll.* II Petrop. 1849. p. 219	A. GÉRARDIN (1879 —), arată eroarea	Interm. Math. (1) 15 (1908) p. 230/2.

Printre erorile semnalate sunt unele de fizică. Astfel ARISTOTEL spunea că un corp de două ori mai greu cade de *două ori mai* repede. DESCARTES a dat o relaţiune necorectă între spaţii şi timp la căderea corpurilor, care a fost stabilită ireproşabil numai de GALILEO. JEAN BERNOULLI susţinea că centrul de greutate se poate ridica singur şi dădea exemplul unui amestec de acid azotic cu mercuriu, de oarece pe atunci nu se ştia de energia desvoltată de reacţiunile chimice.

Cele mai multe erori sunt de teoria numerelor. Se citează că EDOUARD LUCAS afirmase că $3^3 . 5 . 79$ e cel mai mic număr *abondent* (suma devizorilor îl întrece) pe când din contră el este deficient; MERSENNE considera pe $2^{61} - 1$ ca număr compus deşi este prim; POINSOT a dat o demonstraţie falşă teoremei lui WILSON; LEIBNIZ a spus că $(2^n - 2)$ nu se divide cu n decât dacă n este prim, eroare pe care el însuşi a corectat-o mai în urmă.

Se semnalează multe erori despre determinanţi şi de calculul variaţiunilor, domenii cu care autorul s'a ocupat în special.

La finele erorilor autorul dă o descriere pe larg a mistificării lui CHASLES şi a Academiei de Ştiinţe din Paris de către un falşificator de documente vechi. Pe baza unor astfel de documente CHASLES a susţinut că legea gravitaţiunii universale nu se datorează lui NEWTON, ci lui PASCAL. Chestiunea acestor decumente falşe ocupă 14 pagini.

Cartea se termină cu un index analitic, cu lista periodicelor care conţin erorile, şi o altă listă a celor în care se fac corecţiunile cronologice a erorilor şi alta a rectificărilor; o listă alfabetică a autorilor de erori şi alta a celor cari le-au rectificat. In fine, e un mic apendice cu avise contradictorii, asupra câtorva chestiuni celebre.

Am lăsat la urmă să expun o chestiune care are o mare desvoltare în această carte, deşi, după cum spune autorul, e departe de a fi complet tratată: este chestiunea celebrei *«ultima teoremă»* sau *«marea teoremă»* a lui FERMAT, isvor nesecat, în vremea de azi, de erori de matematică! Aici sunt de părere că D-l LECAT comite şi D-sa o mare eroare: s'a apucat şi a trecut printre matematiciani un mare număr de profesori, — chiar de matematici —, de ingineri, de ofiţeri, de medici, ete., care s'au ocupat de acea teoremă după ce au uitat şi puţina matematică cari au învăţat-o prin liceu! După titlul cărţii, ea nu trbuia să conţină decât erori făcute de *adevăraţi matematiciani*, iar nu de *grafomaţi fermatişti*. Altfel titlul cărţii trebuia completat şi cu *«Erori de matematică»*.

Se ştie că această faimoasă teoremă constă în a demonstra că *suma a două puteri asemenea a două numere întregi nu poate fi aceeaşi putere a unui alt număr întreg dacă exponentul trece peste 2.* Această teoremă, afirmată dar nedemonstrată, de FERMAT, nu a putut fi nici demonstrată, nici infirmată până azi. Pentru demonstraţia acestei teoreme un profesor german, WOLFSKEHL, a înfiinţat prin testamentul său un premiu de 100.000 mărci, înainte de războiu. Mirajul acestei sume, a creat mii de demonstratori ai teoremei lui FERMAT, cari au fost botezaţi *fermatişti*. D-l LECAT spune la pag. 100:

«Le seul résultat de l'institution du prix Wolfskehl (pour la démonstration du fameux théorème de FERMAT*) a été de mettre en lumière que cupidité et autogobisme s'allient souvent; en mathématique les résultats en sont malheureux».*

Vorbind de demonstraţiile lui J. RICHTENFELS din Berlin, autorul spune:

«Ces soi-disant» demonstrations générales du fameux théorème FERMAT* *et cette «contribution critique à la théorie des nombres irrationels» ne valent rien. J. R. n'est, de toute évidence, pas à la hauteur de la tâche. Il eût sans doute gardé la silence, s'il n'y avait pas eu, malheureusement, l'allèchement de cent mille marcs-or (Prix Wolfkehl)».*

In privinţa teoremei lui FERMAT sunt semnalate 97 erori. La unele soluţiuni false sunt semnalate şi unele rezultate noi exacte. Prima demonstraţie defectuoasă a dat-o arabul ALKHODJANDI pentru cazul puterii a treia, înainte de anul 972.

Autorul califică foarte aspru pe mulţi fermatişti. Astfel despre Colonelul LUSSAN, care a încercat două demonstraţiuni, spune: *«Ce travail présente un vice redhibitoire. Le Colonel se relève fort en dessous de la tâche!»*. (No. 283).

La No. 449, spune de CRAFUL IOSEF ALBERTI d'ENNE:

«Ces trois études, qui prétendent exposer une «Découverte mathématique très importante» et *dont l'auteur fait un éloge hyperbolique — quel encensoir! —, valent moins que rien et sont à peu près à l'étiage des écrits, à pretention scientifiques, de* MAETERLINK — *Graf (comte) lui aussi».*

Autorul este destul de aspru cu fermatiştii. Găseşte demonstraţii cu *«vices fondamentaux»* (No. 402); *«erronée et sans valeur»* (No. 369); care nu prezintă *«la moindre valeur»* (No. 284, 365); *«même aucune espèce de valeur»* (No. 303); apoi *«cet essai de démonstration «rigoureuse et élémentaire» n'a aucune valeur».*

Sunt de părere că asemenea lucrări nu trebuiesc trecute printre cele făcute de matematiciani!.

Autorul mai citează deseori ca rectificator de erori pe medicul şi matematicianul german A. FLECK, care este şi mai nemilos cu fermatiştii. El arată că cei mai mulţi greşesc confundând divizibilitatea algebrică cu cea aritmetică, după cum am semnalat şi noi un caz în *Gazeta Matematică*, Anul XVII pag. 142. Acest medic şi-a propus să curarisească pe amatorii de premiu WOLFSKEHL, de fermatism, boală contagioasă mai ales în vremurile de criză de azi. El găseşte demonstraţii cu *vicii* sau chiar cu *vicii fundamentale*, şi *vicii redibitorii*, cu *cercuri vicioase*, cu *erori* şi *insuficienţe grave* cu *erori formidabile, grosiere* sau *de neînchipuit*, cu demonstraţii *false* sau *defectuase*. Unii insistă asupra detaliilor şi trec repede peste dificultăţi; alţii utilizează contradicţii; un medic aplică o metodă a lui *filodofico-metalogică;* altele nu au nicio valoare, fiind bazate pe vicii; la altele spune că nu are nimic bun de spus, decât de tipărire. Un profesor de seminar pune în legătură teorema lui FERMAT cu *«imaginea lumii viitorului!».* Despre acest fermatist FLECH exclamă: *«Auch wennddoch viele Fermatlöser sich diesen Standpunkt zu eigen machen wollten»!* Despre lucrarea unui berlinez spune: *«Unsinn . . . Eine Orgie des Grössenwahns und der Unverfrorenheit»* Altuia îi scrie de neînchipuit *«selbstzufriedenster Sachunkentniss».* FLECHT se exprimă despre demonstraţia dată de compatriotul nostru Col. J. MUICĂ, care a făcut obiectul unei recenziuni în *Gazeta Matematică* Anul XV pag. 178, găsim scris în cartea D-lui LECAT următoarele: „A. FLECH (1861) *montre le vice monstrueux de cette «démonstration».*

Unii fermatişti nici nu ştiu că în teorema lui FERMAT e vorba numai de numere întregi şi caută iraţionale care să verifice relaţia, de care se pot găsi foarte lesne ori când şi ori câte! Alţii conchid că teorema nu este exată pentrucă nu au putut să găsească numere care să o satisfacă deşi au încercat o mulţime de numere! Despre lucrările unui Doctor Profesor dela Heidelberg un alt profesor de acolo spune că demonstraţiile date valorează mai puţin ca nimic! Despre un altul O. PERRON spune că a găsit o metodă admirabilă ca să demonstreze orice căci totul se bazează pe ipoteze false!

Cred că exemplele date sunt îndestulătoare ca să dovedeasc că D-l M. LECAT a fost nedrept cu matematicianii lăsând să se acrediteze în public că lor li se poate aplica calificative ca acelea pe care le-am arătat aci. Fermatiştii trebuiau scoşi din cartea D-sale, ca şi cuadratorii.

Am dat acestei din urmă părți a recenziei o desvoltare mai mare pentru faptul ca să se vază că gloria de a fi fermatist nu e de dorit. Căci glorii și faime ca acelea arătate mai sus cred că nimeni nu dorește să fie trecute la posteritate! Cine vrea să se ocupe de teorema lui FERMAT, să caute să vază ce s'a făcut serios despre dânsa până azi.

Din cele expuse până aci se vede că lucrarea D-lui LECAT este interesantă, instructivă și chiar amuzantă.

I. IONESCU.

CERERI

Răspuns la cererea No. 242. Prin această Cerere ceream detalii asupra lui ION GIURCOVICI profesor la prima noastră Școală de Silvicultură. Despre el am mai scris în articolul *«Un curs forestier de matematici»* dela pagina 291. Acolo am vorbit de niște caietele și mi-am exprimat bănuiala să nu fie ale unui fost elev dela acea școală. Despre un elev cu numele GIURCOVICI am găsit că se vorbește în niște acte dela *Arhivele Statului*, și anume în un raport semnat C. CANTACUZINO, adresat la 7/VI 1854 lui KISSELEF. Iată în întregime acest raport care interesează începuturile învățământului tecnic la noi în țară.

„A la suite des dispositions approuvées par le Prince Régnant, il a été établi une École d'application où l'on fesait les cours nécessaires pour former un certain nombre d'élèves conducteurs aux services des ponts et chaussées, des mines et de sylviculture.

„Les élèves n'ont pas été admis qu'après avoir subit un examen où ils ont fait preuve des notions prèliminaires qu'ils possédaient.

„On payait aux élèves destinés aux deux premiers service 150 piastres par mois, et à ceux destinés pour la sylviculture et qui étaient divisés en trois classes, conformément aux dispositions arrêtées par le ci-devant Commission forestière, attachée au Département du Culte, qui leur payait 200, 250 et 400 piastres par mois.

„Ces appointements devraient durer pendant le temps de leurs études jusqu'à ce que ayant subit les derniers examens ceux qui auraient été jugés capables fussent admis dans le cadre des conducteurs, chacun dans sa spécialité respective.

„Dans l'année courante il y avait 13 élèves pour les ponts et chaussées, 4 pour les mines et 9 pour la sylviculture, lesquels ont été examinés à l'examen sémestriel et classifiés par les professeurs respectifs en trois catégories: ceux qui ont été notés *éminents* ceux au No. 1 et au No. 2 et en troissième lieu ceux qui n'ont été présents à l'examen.

„Le Département, d'accord avec l'opinion de la Commission Technique, émise dans son Procès-verbal No. 16 donné dans la séance du 26 Mai dernier, a rayé du nombre des élèves, ceux qui ont été passés aux dernières catégo-

ries comme ne correspondant point à l'attente du Gouvernement, et dont voici les noms DRĂGULANESCU, NOTESCU, VIOREANU (ponts et chaussées), STAMATE (mines), GOLIAD, TRĂSNEA, GIURCOVICI, NAIGEBORN (sylviculture).

„Des dispositions ont été prises d'accord avec l'Ephorie des Écoles nationales et du Département du Culte pour suspendre leur appointement à partir du 1 juin.

„Le Département a l'honneur de soumettre cette norme à l'aprobation de Votre Excellence".

(ss) C. CANTACUZINO.

De aci rezultă indiscutabil că printre şcolarii dela Şcoala de Silvicultură era şi un GIURCOVICI, care nu-şi prea vedea de şcoală. E posibil ca dela el să fi rămas cele două caiețele care cam lasă de dorit din punct de vedere al grijei cu care sunt scrise şi redactate. In tot cazul, documentul de mai sus confirmă că materia din acele caiețele este cursul făcut la Şcoala de Silvicultură înfiinţată după cererea Comisiunii forestiere franceze adusă de Domnitorul Ştirbei pentru organizarea Serviciilor Silvice la noi în ţară.

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecei

NICOLAO MEDLERO. Rudimenta Arithmeticae. Witebergae. 1550.
Donată de D-l Inginer D. LEONIDA.

LUCA LOSSIO. Arithmetices erotemata puerilia. Franc. 1559.
Donată de D-l Inginer D. LEONIDA.

L'Illustrice *Senato di Bologna.* Degli elementi di EUCLIDE. I Primi se, libri. Bologna 1651.
Donată de D-l Inginer D. LEONIDA.

M. ABDIA TREW. Directorium mathematicum ad cujus ductum et informationem tota *Mathesis:* aritmetica, geometria, astronomia, geographia, harmonica, mechanica. Altdorphi 1657.
Donată de D-l Inginer D. LEONIDA.

Schema Mundi oder allgemeiner Abriss der Welt. Iena 1688.
Donată de D-l Inginar D. LEONIDA.

HEINRICH MEISNER. Stern und Kern der Algebrae. Hamburg 1740.
Donată de D-l Inginer D. LEONIDA.

GEORG SARGANECKS. Die Geometrie in Tabellen. Berlin 1767.
Donată de D-l Inginer D. LEONIDA.

CL. GEORG IGNAT de Mezburg. Institutiones mathematicae. Tom. I. Notiones genarales Elementa arithmeticae. Elementa algebrae. Tom. II. Elementa geometriae. Tom. III. Elementa trigonometriae planae. Elementa geometriae practicae. Viennae 1776.

Donată de D-l Inginer D. LEONIDA.

LEOPOLD UNTERBERGER. Anfangsgründe der Mathematik. Zweiter Teil. Die Geometrie. Zweiter Band. Wien. 1776.

Donată de D-l Inginer D. LEONIDA.

F. BUSMAN. Ein neuer Kegelschnittzirkel. Bonn.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

TRAIAN LALESCU. Tratat de Geometria analitică. Fascicola I (conținând corecturile și adăugirile pentru ediția II).

Donată de D-l Inginer. M. VASILIU.

AL PANTAZI. Thèse. *Sur l'applicabilité projective des hypersurfaces développables.* Bucarest 1928.

Donată de D-l AL. PANTAZI.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4228. *Să se stabilească identitatea:*

$$(S - aR\cos A)\cos^2 A + (S - bR\cos B)\cos^2 B + (S - cR\cos C)\cos^2 C = 2S\cos A\cos B\cos C.$$

C. IVĂNESCU.

Soluția. Ținând seamă de formulele cunoscute:

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C;\quad a = 2R\sin A, \ldots;$$

relația din enunț se scrie:

$$2R^2\sin A(\sin B\sin C - \cos A)\cos^2 A + 2R^2\sin B(\sin C\sin A - \cos B)\cos^2 B + 2R^2\sin C(\sin A\sin B - \cos C)\cos^2 C = 2S\cos A\cos B\cos C;$$

dar cum

$$\cos A = -\cos(B + C) = \sin B\sin C - \cos B\cos C,$$

avem mai departe, după ce am simplificat deoparte și de alta cu produsul $\cos A\cos B\cos C$,

$$2R^2\sin A\cos A + 2R^2\sin B\cos B + 2R^2\sin C\cos C = 2S$$

$$(1) \qquad R^2 \sin 2A + R^2 \sin 2B + R^2 \sin 2C = 2S$$

formulă care se poate lesne demonstra cu ajutorul relațiilor cunoscute dintr'un triunghiu.

Iată însă o demonstrație care nu se bazează decât pe expresia suprafeței unui triunghiu. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Unindu-l cu vârfurile triunghiului, se formează trei triunghiuri AOB, BOC și COA cari au unghiurile din O respectiv egale cu 2A, 2B și 2C. Cum

$$S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} = S,$$

iar

$$S_{AOB} = \frac{R \cdot R \cdot \sin 2A}{2} = \frac{R^2 \sin 2A}{2}, \ldots$$

formula (1) este demonstrată.

Observații. 1°. Au rezolvat problema: D-ra ELIZA MOISE și D-nii: C. CHIRIAC, I. CURCHI, A. H. GEIER, V. V. GHIOCEL, H. P. IONESCU-BISS, D. D. MAVRODIN, M. MĂNESCU, NEGREA A. MIRCEA-LEONTE, P. C. MAZILU și I. N. SAGER.

2°. S'au mai primit două soluții dela doi corespondenți, dintre care unul chiar premiant al Gazetei, copiate una după alta. Numele acestor corespondenți nu pot fi menționate.

3°. O altă soluție a acestei probleme a se vedea: G. M. Vol. XL, pag. 210.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4254. *Înălțimile triunghiului* ABC, *se întâlnesc în ortocentrul* H. *Pe aceste înălțimi se iau din* H *către laturi lungimile* HA_1, HB_1, HC_1, *egale respectiv cu laturile* BC, CA, AB.

Să se arate că laturile triunghiului $A_1B_1C_1$ *sunt perpendiculare pe medianele lui* ABC *și egale cu dublul acestor mediane și că centrul de greutate al triunghiului* $A_1B_1C_1$ *este punctul* H.

N. BOTEA.

Generalizare dată de D-l N. N. MIHĂILEANU (student București). Pe proiectantele punctului M, arbitrar ales în planul triunghiului ABC, de același sens și unghiu φ pe laturi, se poartă segmente proporționale cu laturile în raportul K, pornind din M și dirijate toate spre laturile respective sau toate spre vârfuri. Se for-

mează triunghiul $A_1B_1C_1$ cu centrul de greutate în M, cu laturile proporționale cu medianele triunghiului ABC, în raportul 2K, și făcând cu ele aceleași unghiuri φ, de sens invers.

Pentru demonstrație să mai considerăm punctele A', B', C', mijloacele laturilor lui ABC. Triunghiul MB_1C_1 este asemenea cu unul oarecare din triunghiurile AA'B', AA'C', căci

$$\sphericalangle A'B'A = \sphericalangle A'C'A = \pi - A = \sphericalangle B_1MC_1$$

și laturile adiacente unghiului sunt proporționale:

$$AB' = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2k} MB_1 \text{ și } AC' = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2k} MC_1 .$$

Raportul de omotetie fiind 2K vom avea $B_1C_1 = 2K.\ AA'$ și două relații analoage. Pe de altă parte, două perechi de laturi analoage în triunghiurile asemenea AA'C' sau AA'B' sunt înclinate de unghiul φ, de unde rezultă că și unghiul ascuțit (AA', B_1C_1) este φ.

Fie $\alpha\beta\gamma$ triunghiul pedal al lui M în triunghiul $A_1B_1C_1$. Triunghiurile $MC_1\alpha$, ABA' sunt asemenea, căci laturile corespunzătoare se taie sub același unghiu φ, Raportul de omotetie este $MC_1 : AB = K$ deci $C_1\alpha = K.\ AA'$ și analog $B_1\alpha = K.\ AA'$; deci α este mijlocul laturei BC și A_1M, B_1M, C_1M, sunt mediane.

Observații. 1° Au rezolvat foarte bine problema dând soluțiuni geometrice ca mai sus, pentru cazul particular al enunțului d-nii NICOLAE AL. BORZA (c. VII. Cluj), CEAUȘESCU F. VASILE (Liceul Militar Iași), ION GH. ȘABAC (cl. VII, Liceul Militar N. Filipescu), GEORGE SILAȘ (student Cluj) și VINTILĂ GRIGORESCU (Mânăstirea Dealu).

2°. Au rezolvat problema folosind relații trigonometrice D-nii : S-lt. AUREL EM. BĂDESCU (Reg. 2 Art. Grea), CEZAR IVĂNESCU (student Bârlad), MARIUS MARGULIUS (București), IANCU SEGER și ION GH. ȘABAC.

N. B.

PROBLEMA 4261. *Să se găsească un patrat perfect format din cifra 6 încadrată de două numere consecutive de câte 2 cifre.*

G-L GH. BUICLIU.

Fie x^2 patratul cerut și N un număr de 2 cifre astfel încât să avem ecuațiunile

$$N\,6\,(N+1) = x^2 \quad \text{sau} \quad (N+1)\,6\,N = x^2$$

care desvoltate devin:

(1) $1001\ N + 601 = x^2$

(2) $1001\ N + 1600 = x^2.$

1°. *Ecuaţiunea (1)* se mai scrie sub forma

$$1001\ N + 602 = x^2 + 1$$

care arată că $X^2 + 1$ trebue să se dividă prin 7. Ori faţă de divizorul 7 un patrat perfect nu este nici odată de forma $7m - 1$. Deci (1) nu are soluţiuni întregi.

2°. *Ecuaţiunea (2)* se mai scrie

(3) $7 \times 11 \times 13\ N + 7 \times 228 = (x - 2)(x + 2)$

care arată că

(4) $x = 7y + 2$ sau (5) $x = 7y - 2.$

Ducând pe (4) în (3) se obţine

(6) $11 \times 13 \times N + 11 \times 21 = 7y^2 + 4y + 3.$

Faţă de divizorul 11, un număr y şi patratul său pot fi de următoarele forme, care se corespund:

(I) $\begin{cases} y = 11m + \ldots 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 \text{ sau } 10. \\ y^2 = 11m' + \ldots 0; 1; 4; 9; 5; 3; 3; 5; 9; 4 \text{ sau } 1. \end{cases}$

Ţinând seamă de acest tabel se găseşte că membrul II al egalităţii (6) se divide prin 11 când

(7) $y = 11m + 5$ sau (8) $y = 11m + 7.$

Ducând pe (7) în (6) şi făcând toate calculele avem

(9) $13 \times N = 78m^2 + 78m - (m^2 + 4m + 3).$

Faţă de divizorul 13, un număr m şi patratul său pot fi de următoarele forme care se corespund:

(II) $\begin{cases} m = 13t + \ldots 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11 \text{ sau } 12 \\ m^2 = 13t' + \ldots 0; 1; 4; 9; 3; 12; 10; 10; 12; 3; 9; 4 \text{ sau } 1. \end{cases}$

Folosind acest tabel se găseşte că membrul II al lui (9) se divide prin 13 când

$$m = 13t + 10 \quad \text{sau} \quad m = 13t - 1.$$

Revenind cu aceste valori la y dat de (7) şi la x dat de (4) se găseşte următorul sistem de soluţiuni pentru (2)

$$(a)\quad x = 1001\,t - 194\quad ;\quad (b)\quad x = 1001\,t - 40.$$

La fel, ducând pe (8) în (6) se găseşte

$$13 \times N = 78 \times m^2 + 104 \times m + 13 - m\,(m+1)$$

care, pentru a fi valabilă în numere întregi, trebue să dea

$$m = 13\,t \quad \text{sau} \quad m = 13\,t - 2$$

care duse în (8) şi apoi (4) dau un al doilea sistem de soluţii ale ecuaţiunei (2):

$$(c)\quad x = 1001\,t + 51 \quad \text{şi} \quad (d)\quad x = 1001\,t - 103.$$

Plecând dela (5) şi procedând la fel se mai găsesc următoarele 4 sisteme de soluţiuni în numere întregi ale ecuaţiunei (2):

$$(a')\quad x = 1001\,t + 194\quad ;\quad (b')\quad x = 1001\,t + 40$$

$$(c')\quad x = 1001\,t - 51\quad ;\quad (d')\quad x = 1001\,t + 103.$$

De oarece x^2 este de 5 cifre, x va trebui să fie cel mult 316 şi atunci se reţin din soluţiile generale găsite pentru x numai valorile 40, 51, 103 şi 194 care dau soluţiunile:

$$40^2 = 01600\quad ;\quad 51^2 = 02601$$

$$103^2 = 10609 \quad \text{şi} \quad 194^2 = 37636$$

din care primele 2 sunt soluţiuni de formă.

Notă. 1°. D-l V. CSEKE (student, Cluj) a rezolvat foarte bine problema şi a găsit soluţiunile exacte (afară de cele 2 soluţiuni de formă) căutând forma unui patrat faţă de divizorul 91.

2°. Utilizând grupul de 2 cifre cu care se termină un patrat perfect se formează toate numerile posibile în condiţiile problemei pe care examinându-le prin descompuneri în factori sau extrageri de rădăcini se găsesc cele 4 soluţiuni ale problemei 4261.

Au întrebuinţat această cale şi au găsit:

1. Toate soluţiunile D-nii: D. MAVRODIN (Lc. Eminescu, Bucureşti) şi M. S. ZIFF.

2. Soluţiunile 40, 51, 103: D-l C. N. AVRAM (S-lt din Geniu).

3. Soluţiunile 40, 103, 194: D-l M. MARGULIUS (Bucureşti).

4. Soluțiunile 103 și 194: D-nii: C. CHIRIAC (Lc. militar, Iași), P. DOBRESCU (Lc. Mănăstirea Dealului), V. I. GODEANU (Lc. militar, Craiova), M. MĂNESCU (Lc. Eminescu, București), P. C. MAZILU (Lc. Internat, Iași, GH. SILAȘ (Student, Cluj), NĂSTASE M. (Lc. Mănăstirea Dealului), M. L. A. NEGREA (Brăila) și A. D. STOICA (Lc. Marele Voievod Mihai, București).

5. Soluția 103 D-nii: V. CEAUȘESCU și C. NEGOIȚĂ (Lc. militar, Iași).

6. Soluția 194 D-nii: GH. I. BOIANGIU (Lc. militar N. Filipescu), C. N. GAVRILESCU (Iași), E. MEREUȚĂ (Student, București), I. C. PAVENEANU (S-lt. din Geniu) și T. M. PREDOESCU (Lc. militar, Craiova).

3°. D-l T. M. PREDOESCU înlocuind cifra 6 prin 0 a găsit soluția

$$274^2 = 75076$$

4°. Inlocuind în (2) pe X prin valorile găsite și scoțând valorile lui N se obțin sistemele de soluțiuni generale în numere întregi ale ecuațiunei (2). Acele sisteme se pot scrie concentrat sub forma:

$$x = 1001\,t \pm 40 \quad \text{cu} \quad N = 1001\,t^2 \pm 80\,t$$

$$x = 1001\,t \pm 51 \quad \text{cu} \quad N = 1001\,t^2 \pm 102\,t + 1$$

$$x = 1001\,t \pm 103 \quad \text{cu} \quad N = 1001\,t^2 \pm 206\,t + 9$$

$$x = 1001\,t \pm 194 \quad \text{cu} \quad N = 1001\,t^2 \pm 388\,t + 36.$$

GH. B.

PROBLEMA 4364. *Pe laturile unui triunghiu* ABC *se construesc în exterior patratele* BCA_1A_2, CAB_1B_2, ABC_1C_2. *Să se arate că laturile triunghiului* $G_a G_b G_c$, *format din centrele de greutate ale triunghiurilor* AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 *sunt perpendiculare pe medianele triunghiului* ABC *și că aria triunghiului* $G_a G_b G_c$ *echivalează 4/3 din a triunghiului* ABC.

V. THÉBAULT.

Soluție dată de D-l TH. GH. COCEA.

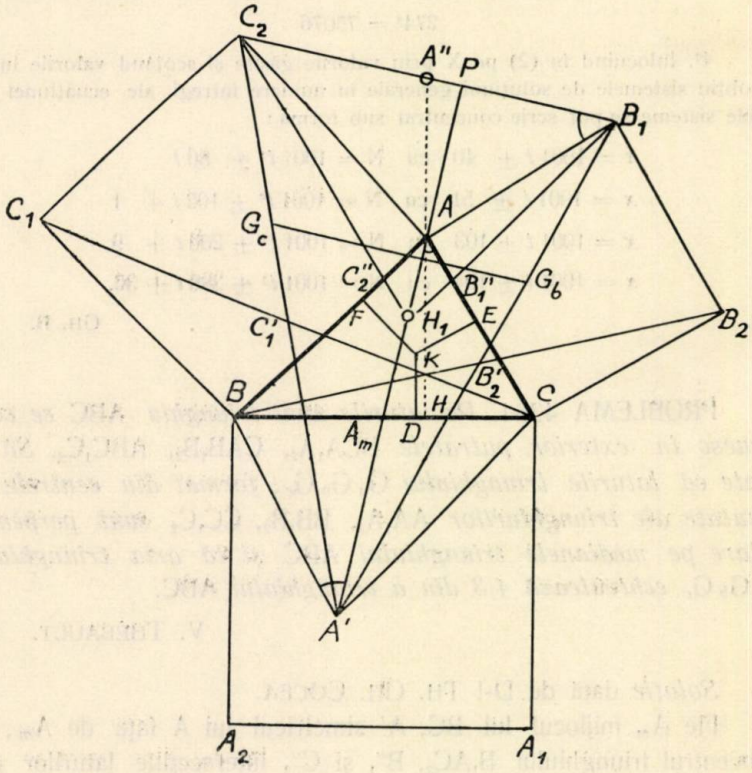
Fie A_m mijlocul lui BC, A' simetricul lui A față de A_m, H_1 ortocentrul triunghiului B_1AC_2, B''_1 și C''_2 intersecțiile laturilor AC și AB respectiv cu înălțimele B_1H_1 și C_2H_1 ale triunghiului B_1AC_2, B'_2 și C'_1 mijloacele segmentelor BB_2 și CC_1.

Triunghiurile $A'BC_1$, CAC_2 sunt egale ca având unghiurile din B și A și laturile adiacentelor egale. La fel triunghiurile $A'CB_2$ și BAB_1 sunt egale. Rezultă că $A'BB_1B_2$ și $A'CC_2C_1$ sunt paralelograme, deci B_1A' și C_2A' trec prin mijloacele B'_2 și C'_1 ale diagonalelor BB_2 și CC_1, iar G_b și G_c se găsesc pe $B_1B'_2$ și $C_2C'_1$

depărtate de B_1 şi C_2 cu 2/3 din $B_1B'_2$ şi $C_2C'_1$. Cum B'_2, C'_1 sunt mijloacele lui $A'B_1$, $A'C_2$ urmează că $B'_2C'_1 \parallel G_b\,G_c \parallel B_1C_2$.

Figura $AC''_2H_1B''_2$ fiind un paralelogram, unghiurile din B''_1 şi C''_2 în triunghiurile dreptunghice $B_1AB''_1$, $C_2AC''_2$ sunt egale şi deci aceste triunghiuri sunt asemeni. Rezultă că:

$$\frac{AB''_1}{AC''_2} = \frac{AB_1}{AC_2} = \frac{AC}{AB}.$$



Primul şi ultimul raport arată că paralelogramele $ABA'C$ şi $AC''_2H_1B''_1$ sunt asemeni şi fiindcă A, C''_2, B şi A, B''_1, C sunt două şiruri de puncte colineare, rezultă că A, H_1, A' sunt colineare. Deci mediana AA_m este şi înălţimea H_1A în triunghiul B_1AC_2 deci AA_m este perpendiculară pe B_1C_2 şi pe paralela sa $G_b\,G_c$ ceeace demonstrează prima parte a problemei.

Pentru partea a doua, fie k punctul lui LEMOINE al triunghiului ABC şi DEF triunghiul său podar. In patrulaterul inscriptibil KEAF avem

$$\measuredangle AKE = \measuredangle AFE$$

şi fiindcă AK şi AA_m sunt izogonale:

$$\measuredangle KAE = \measuredangle A_m AF$$

care comparată cu egalitatea precedentă, arată că $EF \perp AA_m$ deci $EF \parallel G_b G_c$. Triunghiurile DEF, $G_a G_b G_c$ sunt deci asemeni şi dacă S", S' sunt suprafeţele lor, atunci

$$(1) \qquad \frac{S'}{S''} = \left(\frac{G_b G_c}{EF}\right)^2 .$$

Se găseşte în *Exercices de Géometrie,* 7-e ed. par F. G. M. la No. 2364 că

$$(2) \qquad S'' = \frac{12\, S^3}{(a^2+b^2+c^2)^2} .$$

Din triunghiul EKF se scoate

$$\overline{EF}^2 = \overline{KF}^2 + \overline{KE}^2 + 2KF \,.\, KE \cos A$$

sau înlocuind pe cosA în funcţie de laturi şi pe KF, KE prin

$$\frac{2\,c\,S}{a^2+b^2+c^2} \,,\quad \frac{2\,h\,S}{a^2+b^2+c^2}$$

date la No. 2356 din *Exercices de Géometrie* par F. G. M. 7-e ed. No. 2356, se găseşte

$$(3) \qquad \overline{EF}^2 = \frac{4S^2\,(2b^2+2c^2+a^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2} .$$

Din triunghiurile $B_1A'C_2$ şi $G_b A'G_c$ se scoate

$$G_b G_c = \frac{2B_1C_2}{3}$$

observăm apoi că triunghiurile A'BA, B_1AC_2 sunt egale ca având unghiurile din B şi A şi laturile adiacente egale, rezultă

$$B_1C_2 = AA' = 2\,AA_m = 2\,m_a$$

şi prin urmare

$$(4) \qquad G_b G_c = \frac{4}{3} m_a = \frac{2}{3}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Ducând în (1) valorile din (2), (3) şi (4) şi făcând toate calculele se găseşte

$$S' = \frac{4}{3} S$$

ceeace demonstrează şi partea a doua a problemei.

Notă. 1°. Am publicat soluţia D-lui TH. GH. COCEA în întregime, pentru mica incursiune pe care o face în relaţiile din geometria triunghiului. Problema se poate rezolva însă direct şi mai simplu pe alte căi. Iată un exemplu.

Pentru partea I se observă că triunghiurile A'BA, B_1AC_2 sunt egale, deci

$$\sphericalangle AA'B = \sphericalangle AB_1C_2$$

dar $\sphericalangle AA'B$ egal cu $\sphericalangle A'AC$ ca alterne interne, deci

$$\sphericalangle AB_1C_2 = \sphericalangle CAA_m$$

şi cum $\sphericalangle B_1AC$ este drept rezultă că B_1AP şi CAA' sunt complimentare şi deci $AA_m \perp B_1C_2$.

Pentru partea II, după ce se stabileşte relaţia (4) din soluţia D-lui TH. GH. COCEA, se scrie suprafaţa triunghiului $G_a G_b G_c$ sub forma clasică

$$S' = \sqrt{p(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)}$$

în care p, α, β, γ sunt semiperimetrul şi laturile acelui triunghiu. Dar după (4), avem:

$$p = \frac{2}{3}(m_a + m_b + m_c), \quad p - \alpha = \frac{2}{3}(m_b + m_c - m_a), \ldots$$

aşa că dacă se înlocueşte în S' şi se înseamnă cu 2M suma $m_a + m_b + m_c$ se găseşte

$$S' = \frac{16}{9}\sqrt{M(M-m_a)(M-m_b)(M-m_c)} = \frac{4}{3} S$$

ţinând seamă de formula cunoscută care dă pe S în funcţie de mediane.

2°. In legătură cu problema 4364 recomand interesantul articol publicat de D-l V. THÉBAULT în supliment, în *Mathesis* No. 4 — 5 din Aprilie — Mai 1934 sub titlul *Triangle bordé de carrés.*

3°. Figura care face obiectul problemei 4364 este cunoscută sub numele de figura lui VECTEN şi se bucură de foarte interesante şi numeroase proprietăţi. Cu ocazia redijării problemei se pun în evidenţă încă următoarele proprietăţi pe care le cred inedite:

a) *Dreptele* $B_1B'_2$, $C_2C'_1$ *se întâlnesc pe mediana* AA_m *în simetricul lui* A *față de* A_m.

Aceasta este reciproca proprietății pe care se bazează demonstrația primei părți din soluția D-lui TH. GH. COCEA.

b) *Înălțimea* AP *a triunghiului* B_1AC_2 *este dată de*

$$AP = \frac{S}{m_a}$$

ceeace rezultă din echivalența suprafețelor ABC, B_1AC_2 și ținând seamă că $B_1C_2 = 2m_a$.

c) *Dacă* i_a, i_b, i_c *sunt înălțimile care pleacă din* A, B, C *în triunghiurile ca* B_1AC_2 *atunci*

$$i_a m_a = i_b m_b = i_c m_c$$

Rezultă din *b*).

d) *Înălțimile din* B_1, C_2 *ale triunghiului* B_1AC_2 *sunt egale respectiv cu* h_b, h_c.

Se demonstrează ca la *b*).

e) *Ortocentrul triunghiului* B_1AC_2 *e pe* AA_m.

Ca la *a*).

3°. Utilizând relațiile cunoscute între elementele unui triunghiu se pot găsi elementele triunghiului B_1AC_2 sau ale altor triunghiuri de ale figurei. Astfel:

Raza S_a a cercului circumscris triunghiului B_1AC_2 e dată de

$$S_a = \frac{bcm_a}{2S}.$$

Distanța H_1A este dată de

$$H_1A^2 = \frac{b^2c^2m_a^2 - a^2S^2}{S^2}$$

și deci mediatricea d_a a aceluiași triunghiu va fi dată de

$$d_a^2 = \frac{b^2c^2m_a^2 - a^2S^2}{4S^2}.$$

Mediana m'_a care pleacă din A este dată de

$$m'_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{b^2 + c^2 - 2m_a^2} = \frac{a}{2}.$$

4°. Toate proprietățile enunțate aici, inclusiv acelea date în problema 4364, se mențin și pentru cazul când patratele se construesc spre interiorul triunghiului.

5°. D-l M. MARGULIUS (Bucureşti) a dat o foarte bună soluţie analitică, luând ca axe de coordonate dreptele izotrope ce trec prin centrul cercului ABC. Asupra utilizării acestor drepte cu axe de coordonate se poate consulta lucrarea D-lui A. HAARBLEICHER care a fost recenzată în *Gazeta Matematică* Vol. XXXVII, pag. 176.

GENERAL GH. BUICLIU.

PROBLEMA 4457. *Să se rezolve sistemul de ecuaţiuni*

$$x + y + z + u = 10 \qquad x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 100$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 30 \qquad x^4 + y^4 + z^4 + u^4 = 354.$$

M. AMĂRĂŞTEANU.

Soluţie dată de D-l A. DOBRESCU (R. Sărat).
Consider sistemul:

$$x + y + z + u = a \qquad x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = c$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b \qquad x^4 + y^4 + z^4 + u^4 = d.$$

Ridic prima ecuaţie succesiv la puterile 2, 3, 4 şi ţinând seamă de celelalte ecuaţiuni obţin succesiv

$$(x + y + z + u)^2 = \Sigma x^2 + 2 \Sigma xy = a^2$$

$$(1) \quad \therefore \qquad \Sigma xy = \frac{a^2 - b}{2}$$

$$(x + y + z + u)^3 = \Sigma x^3 + 3 \Sigma x^2 y + 6 \Sigma xyz = \Sigma x^3 + 3 \Sigma x^2 (a - x) + 6 \Sigma xyz = a^3$$

$$(2) \qquad \therefore \qquad \Sigma xyz = \frac{a^3 - 3ab + 2c}{6}$$

$$(x + y + z + u)^4 = \Sigma x^4 + 4 \Sigma x^3 y + 6 \Sigma x^2 y^2 + 12 \Sigma x^2 yz + 24xyzu = a^4$$

$$(\Sigma x)^4 = \Sigma x^4 + 4 \Sigma x^3 (a - x) + 3 \Sigma x^2 (b - x^2) + 12 \Sigma xyz (a - u) + 24xyzu = a^4$$

$$\therefore \quad -6\Sigma x^4 + 4a\Sigma x^3 + 3b\Sigma x^2 + 12a\Sigma xyz - 48xyzu + 24xyzu = a^4.$$

De unde ținând seamă de ecuațiile date, de (1) și de (2), se scoate

$$(3) \qquad xyzu = \frac{a^4 - 6a^2b + 8ac + 3b^2 - 6d}{24}.$$

Prima din ecuațiile date și relațiile (1), (2), (3) arată că x, y, z, u, sunt rădăcinele ecuațiunei

$$x^4 - ax^3 + \frac{a^2 - b}{2}x^2 - \frac{a^3 - 3ab + 2c}{6}x + \frac{a^4 - 6a^2b + 8ac + 3b^2 - 6d}{24} = 0$$

care pentru a, b, c, d respectiv 10, 30, 100, 354 devine

$$(4) \qquad x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuațiuni sunt rădăcinile sistemului dat în enunțul problemei. Ori (4) are ca rădăcini pe 1, 2, 3, 4. Deci soluțiile sistemului din enunț sunt

$$x = 1 \; ; \; y = 2 \; ; \; z = 3 \; ; \; u = 4.$$

Sistemul fiind simetric în x, y, z, u admite și soluțiile ce se obțin schimbând între ele numerele 1, 2, 3, 4 în toate modurile posibile. Problema are deci 24 sisteme de soluții, care nu diferă între ele decât prin ordinea în care sunt scrise.

Au rezolvat foarte bine problema pe căi analoage D-rele: ANGELA BĂLĂCEANU (Studentă, București), B. URATER (Lc. de fete P. Neamț) și D-nii: I. GR. BOGDAN, I. I. BUZINCU (Lc. militar Iași), V. CEAUȘESCU (Lc. militar Tg. Mureș), C. CHIRIAC (Șc. Navală), M. CHIRIȚĂ (Șc. Preg. Ofițeri), P. P. COJOCARU (P. Neamț), I. C. DUMITRU (Acadânlar), A. HILF, M. A. NEGREA (Brăila), I. I. ȚIȚEICA (Lc. Mănăstirea Dealului) și D. N. STOICA (Lc. militar Tg. Mureș).

PROBLEMA 4463. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$2\cos x \cos 2x \cos 3x = 1.$$

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila).

Aplicând formulele cunoscute:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1,\quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

punând $\cos^2 x = y$ şi desvoltând calculele găsim ecuaţia:

$$f(y) = 16y^3 - 20y^2 + 6y - 1 = 0.$$

Luând derivata acestei ecuaţii găsim:

$$f'(y) = 24y^2 - 20y + 3 = 0,$$

care are rădăcinile $(5 - \sqrt{7})/12$ şi $(5 + \sqrt{7})/12$, adică 0,2... şi 0,6... Şirul lui ROLLE este dar:

$f(-\infty)$	$f(0{,}2)$	$f(0{,}6)$	$f(+\infty)$
$-$	$-0{,}472..$	$-1{,}144..$	$+.$

Ecuaţia are dar o singură rădăcină reală mai mare ca 0.6... Cum $f(1) = +1$ se vede că rădăcina este inferioară lui 1 şi poate conveni lui $\cos^2 x$.

Strângând intervalul în care se află rădăcina găsim că $f(0{,}9) = -0{,}136$. Deci rădăcina este între 0,9 şi 1. Metoda părţilor proporţionale ne dă repede $f(0{,}91) = -0{,}044864$ şi $f(0{,}92) = +0{,}051008$. O nouă interpolare ne duce la $y = 0{,}915$ cu o eroare prin spor. Avem dar:

$$y = \cos^2 x = 0{,}915,\ldots \quad \therefore \quad \cos x = \pm\sqrt{0{,}915} = \pm 0{,}9566\ldots$$

Cu ajutorul tablelor trigonometrice găsim că lui 0,9566... cosinus îi răspunde unghiul de $16^0\ 56'\ 31''$. Soluţiile problemei sunt dar $x = k\pi \pm 16^0\ 56'\ 31''$.

EXERCIŢII

32. Să se desfacă numărul 60 într'o sumă de 5 termeni cari să fie în progresie aritmetică.

M. NĂSTASE.

R. Se găseşte pentru:

$r = 1$; $a = 10$ progresia: $\div$ 10 . 11 . 12 . 13 . 14

$r = 2$; $a = 8$ „ $\div$ 8 . 10 . 12 . 14 . 16

$r = 3$; $a = 6$ „ $\div$ 6 . 9 . 12 . 15 . 18

$r = 4$; $a = 4$ „ $\div$ 4 . 8 . 12 . 16 . 20

$r = 5$; $a = 2$ „ $\div$ 2 . 7 . 12 . 17 . 22

Deci în total admite 5 soluţii.

33. ABC fiind un triunghiu dreptunghiu, cercurile având centrul în A şi razele $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, tae înălţimea AD în B', C'.

Dacă B'', C'' sunt punctele în care paralelele duse ipotenuzei $\overline{BC}$ prin B', C' tae respectiv laturile AC, AB, există egalitatea:

$$\overline{AB''} = \overline{AC''} = \overline{BC}.$$

C. IONESCU-BUJOR.

R. Fie a, b, c trei numere date, cărora li se asociază şirul de medii proporţionale

$$\sqrt{bc} \ , \ \sqrt{ca} \ , \ \sqrt{ab}. \tag{1}$$

A patra proporţională a numerelor (1) luate în ordinea

$$\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ca}} = \frac{\sqrt{ab}}{X} \tag{2}$$

este $X = a$, adică primul număr al şirului dat.

Se consideră şirul

$$\overline{BC} \ , \ \overline{DB} \ , \ \overline{DC}$$

pentru care şir (1) este

$$\overline{AD} \ , \ \overline{AC} \ , \ \overline{AB} \tag{3}$$

sau

$$\overline{AD} \ , \ \overline{AC} \ , \ \overline{AB'}.$$

A patra proporţională a acestor segmente — luate în ordinea (2) este segmentul $\overline{AB''}$, iar după cele arătate, $\overline{BC}$.

Deci

$$\overline{AB''} = \overline{BC}.$$

La fel, scriind şirul (3) sub forma

$$\overline{AD} \ , \ \overline{AC'} \ , \ \overline{AB}$$

rezultă că a 4-a proporţională este $\overline{AC''}$ sau $\overline{BC}$.

34. Ecuaţia

$$2a^2 - 5b^2 = 4$$

e imposibilă în numere întregi.

M. G.

R. Se mai poate scrie $2(a^2 - 2) = 5b^2$ şi de oarece a^2 poate fi M5, M5 $\pm$ 1, membrul întâiu e prim cu 5.

35. Ecuaţia

$$10a^2 - b^2 = 14$$

e imposibilă în numere întregi.

M. G.

R. Patratul unui număr poate fi $7m$, $7m + 1$, $7m - 3$, $7m + 2$.
Ecuaţia dată e posibilă numai când $a = 7m$, $b = 7n$ dar atunci devine $7(10a^2 - b^2) = 2$, care este evident imposibilă.

PROBLEME PROPUSE

4511. Să se demonstreze elementar că sfera este o suprafaţă închisă.

I. IONESCU.

4512. Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 luate câte odată să se scrie două numere aşa ca unul din ele să fie dublul celuilalt.

V. THÉBAULT.

4513. Să se găsească pătratele perfecte de cinci cifre astfel ca suprimând o cifră oarecare din corpul lor, ele să rămână pătrate perfecte de patru cifre. (Cu excepţia pătratelor berce şi decapitate).

AL. A. ROŞU.

4514. Fie G şi I centrul de greutate şi centrul unuia din cercurile tritangente laturilor unui triunghiu ABC. Să se demonstreze că transversala reciprocă a dreptei IG este tangentă la cercul celor nouă puncte al triunghiului ABC.

G-L GH. BUICLIU.

4515. Fie A_1, $A_2A_3 \ldots A_n$ şi V baza şi vârful unei piramide înscrisă în sfera S; M şi N două puncte situate respectiv pe înălţimea piramidei şi pe diametrul sferei S ce trece prin V; M_1, $M_2, \ldots,$ M_n şi $N_1, N_2, \ldots, N_n$ proiecţiunile punctelor M şi N pe muchiile $VA_1, VA_2, \ldots, VA_n$.

Dacă se notează B_1 intersecția dreptelor M_1M_2, N_1N_2 și $B_2, B_3, \ldots, B_n$ intersecțiile analoage, să se arate că dreptele VB_1, $VB_2, \ldots, VB_n$ sunt în același plan.

C. IONESCU-BUJOR.

4516. Se dă un cerc cu centrul în O și fie un punct P exterior cercului. Ducem tangenta PB, care este tăiată în punctul 1 de tangenta la cerc în A. (A fiind locul unde OP tae cercul O). Față de cercul OA1B cu centrul în O_1 procedăm la fel și obținem un cerc O_2, O_1A_12 B_1 și așa mai departe.

Să se demonstreze:

1°. Că toate tangentele în punctele A_i la cercurile O_i trec printr'un punct fix Q.

2°. Că punctele i $(1, 2, \ldots, n)$ sunt toate situate pe o dreaptă Δ paralelă cu PQ.

GH. VASILIU.

4517. Să se rezolve sistemul:

$$m_1(x_1 + x_2) - n_1x_1x_2 = 0$$
$$m_2(x_2 + x_3) - n_2x_2x_3 = p_2$$
$$m_3(x_3 + x_1) - n_3x_3x_1 = p_3$$

știind că $m_1n_3 = m_3n_1$.

Să se generalizeze.

O. N. ȚINO.

4518. Să se verifice identitatea:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ac & b^2 & bd & 0 & 0 \\ ac & c^2 & bd & d^2 & 0 & 0 \\ ab & ad & 0 & 0 & ab & bc \\ bc & cd & 0 & 0 & ad & cd \\ 0 & 0 & a^2 & ac & b^2 & bd \\ 0 & 0 & ac & c^2 & bd & d^2 \end{vmatrix} \equiv (ad - bc)^6.$$

N. BOTEA.

4519. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 0 \\ 1 & x+1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & x+2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & x+3 \end{vmatrix} = 0.$$

PETRE MIRESCU.

4520. Să se rezolve ecuaţiunea

$$(x+2)^3 + (x+3)^3 + (x+5)^3 + (x+6)^3 = 0.$$

LT. C-DOR GR. ZAPAN.

4521. Fiind date patru funcţiuni de x, f_1, f_2, f_3, f_4, să se demonstreze că există două funcţiuni u şi v, astfel în cât să avem:

$$\begin{vmatrix} f'_1 & f_1^2 & f_1 & 1 \\ f'_2 & f_2^2 & f_2 & 1 \\ f'_3 & f_3^2 & f_3 & 1 \\ f'_4 & f_4^2 & f_4 & 1 \end{vmatrix} = u'v - v'u,$$

unde F′ înseamnă derivata lui F. Să se arate apoi că $\frac{u}{v}$ este tocmai raportul anarmonic al celor patru funcţiuni, din care să se deducă, în fine, proprietatea caracteristică a ecuaţiunii lui RICATTI.

M. GHERMĂNESCU.

4522. Se dă un cerc O şi un punct fix C pe acest cerc. O coardă dusă prin C tae cercul din nou în B. Intersecţia coardei BC cu diametrul cercului care taie cercul în două puncte D şi E, astel că avem:

$$\text{arc CD} = 3 \text{ arc BE}$$

este o *cardioidă.*

LOCOT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu F. M. (4451); *Anonim* (4447); *Apostol Radu* (4375, 444); *Avram N. Const.* (4437); *Bălăceanu A.* (4379); *Berdan C.* (3075); *Bogdan G. I.* (4375, 471); *Bogza V.* (4375, 418); *Boitan P. N.* (4485); *Buzincu I. I.* (4379, 422, 28, 47); *Caraman D. V.* (4485); *Cehan G. A.* (4485); *Cercelaru Gr. D.* (4457); *Chiriac Const.* (4459); *Chiriţă Mihail* (4471); *Cojocaru P. P.* (4444, 47); *Cornăţeanu Aurel* (4409, 44); *Craiu S. P.* (4485); *Dimitriu I. Călin* (4471); *Dobrescu A.* (4471); *Dobrescu Paul* (2643, 4388); *Dragomir Roger* (4430); *Dumbrăvescu Gr. D.* (4418, 43); *Enache Iordache* (4471); *Enăşescu D. Victor* (4471); *Florescu L. V.* (4485); *Ghişoiu I. C.* (4485); *Grigorescu Vintilă* (4419, 71); *Guţu A.* (A); *Hilf Arno* (4471); *Ionescu V.* (4485); *Ivănescu Cezar* (A); *Mănac M.* (4388); *Mazilu Panait* (4444); *Metea Virgil* (4394, 444); *Mihăilescu Gh.* (4444); *Mihalcea St. D.* (4379, 418, 22); *Milu Nicolae* (4459); *Mocanu N. V.* (4485); *Musceleanu S. Dacia* (4422); *Năstase Marin* (4419); *Negrea A. M. Leonte* (4418, 25, 46, 506); *Niţescu C. Gh.* (4453, 71); *Opran I. C.* (4485); *Popescu V. F.* (4485); *Postelnicescu M.* (4419); *Roman I. N.* (4485); *Rotaru G. G.* (4485); *Sager N. I.* (4225, 454); *Stănciulescu G.* (4485); *Ştefănescu D. N.* (4379, 432); *Streder I.* (4418, 43); *Tarasciuc I. S.* (4496, 510); *Ţiţeica I. I.* (4306, 74, 83, 98, 422, 32, 54, 85); *Vasilache Gh.* (4409, 30, 44); *Vusatiuc D. M.* (4485); *Zgârcea G.* (4485).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele **se vor scrie pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite** pe aceiaşi foaie. Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică

Calea Griviţei No. 158

Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceiaş adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN.**

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XL

NUMĂRUL 10. — IUNIE 1935

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASTRA" SIBIU

SUMARUL

1. Rezultatele Concursului „Gazetei Matematice" *G. Ţiţeica.*
2. Sur le Théorème de Feuerbach . . . . . *V. Thébault.*
3. Cărţi vechi de matematică . . . . . *I. Ionescu.*
4. Neegalităţi cu indicatori de ordin superior . *Maior I. Linteş.*
5. Raportul Comisiunii pentru acordarea premiului „V. Cristescu".
6. Premiul bienal „Inginer H. Capriel".
7. Note matematice: 42 — 45.
8. Examenul de capacitate pentru profesorii secundari.
9. Bibliografie.
10. Cereri.
11. Diverse.
12. Probleme rezolvate: 1307, 1892, 2111, 2837, 3169, 4123, 4258, 4451.
13. Exerciţii: 36 — 37.
14. Probleme propuse: 2536, 4523 — 4534.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1935

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 11, 12, 18, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 66, 70, 80, 84, 89, 91, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 16, 17, 26, 38, 41, 42, 45, 49, 52, 58, 61, 64, 65, 66, 68, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 94, 95, 97, 98, 99, 500, 01, 02, 03, 04, 05, 07, 08, 09, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii 1 — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela „*Gazeta Matematică*" cu preţul de 12 lei.

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XL *SUPLIMENT* No. 10

DARE DE SEAMĂ

asupra Banchetului Concursului „Gazetei Matematice", din 4 Maiu 1935.

Invoc muza — prietenă povestitorilor — să-mi fie propice în prezentarea *Banchetului «Gazetei Matematice»* — cel legat prin niceene legi de lună şi echinox.

Aş vrea să pătrundă în aceste rânduri şi din ele în sufletul tău, cetitorule, acea îmbinare de solemn şi familiar, de sărbătoresc şi intim, în care s'a desfăşurat numitul banchet; aş vrea să înţelegi deplin căldura spirituală de care era impregnată atmosfera sălii — pentruca să-ţi poţi reprezenta astfel, înconjurate de aureola lor, vorbele şi faptele pe care le voiu transporta de acolo, aici: Unde a fost „acolo"? E de ajuns să-ţi spun că există paralelism între axa Ot şi curba „Local", când în funcţiunea

Localul banchetului Concursului G. M. $= f(t)$ ia valorile:

$t_1 =$ *1 Aprilie 1934, ore 21.*
$t_2 =$ *4 Mai 1935, ore 21.*

Când t în ascensiunea sa către $+\infty$ atinge valoarea t_2, se aflau dealungul ramurilor mesei de forma simbolică

D-nii: Col. Ştefănescu, Lt.-Col. C. Pană, Maior P. Jugănaru, Aurel Viciu, Petre Trofimov, Locot. G. Ciurea, G. Mazilu, Locot. N. Firu, Tib. Ionescu, Locot. G. Apostol, Locot. I. Popescu şi Al. Tufescu, invitaţi ai *Gazetei Matematice.*

D-nii: I. Ionescu, G. Ţiţeica şi A. G. Ioachimescu membrii stâlpi ai *Gazetei Matematice.*

D-nii: E. Abason, I. S. Antoniu, G-ral. G. Buicliu, I. Buşilă, Al. Bunescu, N. Ciorănescu, I. Chiţulescu, V. Cambureanu, B. Arg. Dumitrescu, M. Ghermănescu, Maior Ghimuş, G. T. Gheorghiu, G. Iliescu, C. Ionescu-Bujor, Colonel G. Liteanu, Maior I. Linteş, Cr. Mateescu, Miron Nicolescu, C. Orăşanu, Al. Pantazi, C. Popovici, Ing. Stamatescu, Lt.-C-dor Gr. Zapan, membri ai *Gazetei.*

D-nii: Bucurenciu I. V., Stoian I., Vasu N., Metea V,, Tătaru N., Pasăre Emil., Boborodea N., Sechel, Ciucă I., Ceauşescu V., Deceanu G., Ţarălungă D., Jipa Al., Caraman A., Streder I., Cornăţeanu

A., ENACHE IORDACHE, BOGDAN I., BUZINCU I., COJOCARU P., ENĂȘESCU V., COSMA V., DIMITRIU V., FLORESCU V., ȘTEFĂNESCU N., APOSTOL R., POSTELNICESCU M., NĂSTASE F., GRIGORESCU V., MĂNAC M., SABAC I., DOBRESCU P., SICHITIU M., BARBU A., IVĂNICĂ M., MARINESCU, GEORGESCU G. AL., NEAGU I. T., STOICA D. AL., AMĂRĂȘTEANU F. M., BOITAN N., ROMAN N., STĂNCIULESCU G., CEHAN G. A., ROTARU G. G., ZGÂRCEA T. G., GĂLAN I., RUNCEANU C., APOSTOL I., NEDELCU N., NISTORESCU D., CARAMAN V., CUNĂ ST., SEGĂRCEANU M., COMĂNESCU T., GIORJI I., RACOȚEANU, RADU P., CONSTANTINESCU C., CIOC D., DRAGOMIRESCU I., MURARU, NICOLAE AL., CECATI O., MILU N., MITACHE A., BLĂNARU I., BULAT M., SOLOVEI A., ZAHARESCU I., PĂDUREȚ V., MIHĂILESCU C., HARNAJ O., elevi concurenți.

Dintre cele *IIII* grupe ce se puteau forma s'a ales evident grupa naturală, grupa arborilor și a societăților sănătoase, grupa tradițională la *Gazeta Matematică*: la bază, părinții *Gazetei* și primii ei aleși, spre vârful ramurilor, tinerele lăstare.

Pe masa — operă concepută de D-l LT. C-DOR GR. ZAPAN — ciorchinii grei de liliac aduceau sub lumina indiferentă a lămpilor, fragmente de soare, primăvara naturii — alături de primăvara vioaie, frumos netimidă, ce se revărsase aici din clasele câtorva școli.

Când și când, evoluau sub cerul electric al sălii escadrile de sunete, insinuant create de alămurile ciudate ale *Jazzului Aviației.*

10 minute se adăogară celor 21 de ore trecute din ultima zi a concursului, așteptam sosirea D-lui GENERAL D. MARȚIAN, devotat prieten și dorit invitat al *Gazetei Matematice*, îl așteptam pentru a-i mulțumi în cadrul sărbătoresc.

Explicația lipsei D-sale am avut-o, nu însă și alungarea părerii de rău.

Jazzul deschide porțile festinului prin anunțarea Invierii lui Christos. Copil, auzisem cântecul Sfânt al Paștilor în ritmul cerut de razele blânde ale soarelui ce intră din răsărit pe ferestrele clasei matinale, îl auzisem mai târziu, când suia spre stele, rupt din laringe profesionale în Noaptea Invierii, dar niciodată nu îl surprinsesem curgând banal din alămuri lustruite, ca Imnul Național din fluerul doinei.

Și acum, în diedrul I al preocupărilor noastre trece rularea Menuului — a unui Menu adecvat Banchetului *Gazetei Matematice.* Autorul a avut grijă să se autoindice în cuprins:

Trec peste Exerciții, peste articolele conștiincios parcurse, peste notele cu fond rece sau lactic și mă opresc la acea parte de cronică intimă care se rostește anual la acest festin și care, cum remarca un credincios prieten al *Gazetei*, exprimă pulsul anual al *Gazetei Matematice*, atmosfera internă și externă; mă opresc la polinomul de toasturi, al cărui prim termen este acel al D-lui A. IOACHIMESCU.

Domnia Sa ne îndeamnă gândul către Acel ce veghează pentru binele Țării, *Către M. S. Regele Carol II.* Vorbele sunt închise de ura, ostășește rostit.

Imediat urmează caracterizarea rectilinie a Concursului din anul acesta, făcută de D-l I. IONESCU. Întâiu ni se amintește caracterul militar al

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU MENUUL

MESEI COMUNE DIN SEARA DE 4.V.1935

dată cu ocazia Concursului „Gazetei Matematice"

Costul mesei şi orice donaţie pe adresa:
Lt.-Comandor GR. ZAPAN (Casa „Gazeta Matematică")

EXERCIŢII (... de aperitive)

— **Derivată** *de prune*
— **Fascicole** *de ridichi*
— **Piramide** *de măsline*

ARTICOLE

— **Şocuri repetate** *între* **ovoizi** *coloraţi*
— *Salată de boeuf* **armonic divizată**
— *Muşchi de porc* **în secţiuni transversale** *cu legume* **adiacente**
— *Salată* **complexă**

NOTE

— **Diferenţiale** *lactice* **integrate** *după* **metode variate**
— *Inghetată „elev la concursul Gazetei"*
— **Sfere deformate** *cu* **polii** *aparenţi*

RECREAŢII

— *Remarcabile toasturi* **desvoltate în serii** *prin intermediul* **produsului rădăcinilor multiple** *ale Podgoriilor noastre*
— **Soluţii bune** *de cafea*

CERERI

— *Achitarea cotizaţiilor în restanţă*
— *Plata mesei*

DIVERSE

— *Se primesc donaţiuni (chiar şi de la invitaţi)*

PROBLEMĂ PROPUSĂ

— *Să se* **demonstreze** *dacă în afară de* **ariile** *ce se vor* **desfăşura în spaţiu** *de către Jazz-ul Aviaţiei, vor putea* **plană**, *prin rezonanţă, şi* **arii** *produse de coardele vocale ale concurenţilor? Se cere* **soluţie** *practică. (Timp de lucru: 3 ore).*

Concursului din anul trecut. *«Anul acesta, are acelaş caracter, ba mai accentuat. Mulţi candidaţi s'au înscris la concurs sub presiunea şcolilor, a părinţilor. De aceea, deşi anul acesta s'a manifestat o ascensiune a pregătirii candidaţilor, o selecţiune mai aspră n'ar strica».*

D-l I. IONESCU observă apoi că ofiţerilor le este necesară matematica şi ridică paharul pentru Armata Română.

Şi asistăm la o extindere a mecanicei. Principiul Newtonian al reacţiunei determinată de o acţiune se dovedeşte aplicabil şi în domeniul ideilor, deoarece acţiunea omagială exercitată asupra „Corpului militar" de D-l I. IONESCU, declansează o contra ofensivă viguroasă.

D-l GENERAL G. BUICLIU observă că nu numai armata constitue osatura ţării. *„Dar o constitue şi inginerii şi profesorii, armată care construeşte zi de zi. Să trăiască inginerii şi profesorii. Apoi D-l* I. IONESCU *a spus : Concursul a avut un caracter militar, dar se cunoaşte următoarea Teoremă militară : Nu e suficient să cucereşti poziţia, trebue să o şi stăpâneşti. Şi vă urez să o stăpâniţi.*

Buchetul de instituţii puse în discuţie: Armata, Corpul ingineresc şi corpul profesoral — prin caracterul virtuţii pe care o practică şi o predică — disciplina — actualizează în minţile noastre această izbânditoare armă.

E un preludiu, preludiu la Cuvântarea morală.

Deci D-l G. ŢIŢEICA ne zugrăveşte — pentru a ne capta definitiv — neprietenia cu care e întâmpinată o cuvântare morală. Se ascultă greu şi se urmează mai greu. De aceea D-sa ar fi renunţat la ea, *«dar este prezent Preşedintele nostru, D-l* A. G. IOACHIMESCU, *creatorul cuvântărilor morale».*

D-l G. ŢIŢEICA vorbeşte despre „Disciplină", amintind o scenă de acum 40 ani — din 1895, pe când era profesor la şcoala de Artilerie şi Geniu. *«Am intrat în Sala de cursuri. O linişte desăvârşită m'a întâmpinat, şeful clasei a strigat «drepţi». Toţi elevii s'au ridicat ca unul».*

«Este aceasta poate o formă, dar care nu trebue dispreţuită : e începutul ordinei şi e nevoe de ea».

«Alt exemplu de disciplină. In «Illustration» am văzut scene cu desfăşurări mari de oameni. Se află o ordine desăvârşită în aceste desfăşurări. Nouă ne lipseşte ordinea chiar în ceremoniile restrânse. Pentru a o dobândi, să începem cu partea formală. Aceasta se transformă cu încetul în ordine de gândire, de simţire, a timpului, a respectului cuvântului.

Deci e necesară deprinderea părţii formale. Dumneavoastră, care v'aţi prezentat pentru concurs, aţi pus o ordine în minte. Pentru disciplinare, matematica e cea mai bună şi merge mână în mână cu armata.

Să tindeţi la disciplina cea mai înaltă, la disciplina morală pusă în slujba ţării. Să trăiţi, Dumneavoastră, tineri cărora vă revine această sarcină».

Cuvântarea morală, amintitoare a straşnicului pilon al matematicei şi scop al *Gazetei Matematice*, răscoleşte trecutul în sufletele unde acest scop a fost realizat şi provoacă răspunsuri din felurite regiuni ale mesei,

D-l C. POPOVICI, primul corespondent al *Gazetei Matematice* își exprimă recunoștința față de D-l G. ȚIȚEICA, pentru cuvântare.

«Impreună cu D-v. tinerii, mulțumesc fondatorilor și să urăm stâlpilor să trăiască mulți ani pentru a fi și alții fericiți.

D-l COL. ȘTEFĂNESCU, al cărui fiu se găsește printre concurenți, mărturisește plăcerea ce are de a se afla între oameni de știință pozitivă.

E fericit de a închina pentru D-l prof. I. IONESCU, unul dintre realizatorii Podului Regele Carol I. Cei 2 dorobanți ce străjuesc acest pod sunt emblema virtuții și a voinței.

Din partea concurenților vorbește D-l V. CEAUȘESCU, urând *Gazetei Matematice* prosperitate și se angajează să ducă mai departe sentimentul pe care stâlpii se străduesc să-l sădească în sufletele lor.

Spațiul de legătură între stâlpi și elevi cristalizează în cuvântul D-lui N. CIORĂNESCU.

«Tradiția Gazetei *vrea ca după 3 zile Concursul să urmeze în fața unei table albe.* Gazeta *oferă candidaților ocazia să cunoască profesorii. Imi pare bine că anul acesta sunt mulți concurenți. Le-aș aminti că* NAPOLEON *a spus «Latina și Geometria fac cea mai bună educație a cuiva: Geometria e metodă în cunoașterea naturii. Și azi când enciclopedismul nu mai e posibil, matematica dă cea mai bună chee a cunoașterii.*

Cu această metodă, aplicată mai viguros, corespondenții Gazetei *vor corespunde așteptărilor.*

Și iată ni se înfățișează amănuntul activității care ne-a prilejuit o așa bogată recoltă de candidați la liceele militare.

D-l LT.-COL. C. PANĂ vorbește din partea Direcțiunii liceelor militare, scuzând mai întâiu lipsa D-lor C-RAL D. MARȚIAN și COL. DEMETRESCU, bolnavi. *„Direcția liceelor militare activează pentru propășirea învățăturii în liceele militare și mai ales a matematicei.*

A supraveghiat pregătirea elevilor pentru Concurs, totuși nu din ordin s'a studiat matematica.

Numărul mare de elevi prezenți se datorește felului, poate exagerat, al profesorilor liceelor militare de a dori ca elevii lor să se evidențieze.

Direcția liceelor militare va fi fericită să primească orice sugestii dela **„Gazeta Matematică“.**

Dorește putere de muncă Comitetului Conducător și succese.

Paralel cu sprijinul Direcției liceelor militare, Concursul actual al *«Gazetei Matematice»* a cunoscut bunăvoință din partea multor persoane și instituții.

Membrul quasiperpetu din triumviratul conducător al destinelor *Gazetei*, D-l AL. BUNESCU, le exprimă mulțumiri.

«Domnilor, e evident că suportul spiritului e materia (manifestarea de azi e o palidă ilustrație). Este evident că efortul **„Gazetei Matematice“** *se amestecă și cu preocupări de ordin material. Ca membru al delegației voiu da atenție acestei preocupări.*

Mulțumesc celor ce ne-au dat concursul pentru manifestarea care a durat 3 zile,

Mulţumesc Domnului Rector al Şcoalei Politechnice Regele Carol II pentrucă ne-a pus la dispoziţie săli de concurs, Direcţiei Liceelor Militare care ne-a găzduit elevii, Direcţiei Generale C. F. R. care ne-a dat costul biletelor pentru transportul concurenţilor. Şi urăm ca şi pe viitor să ne înconjoare de aceeaşi dragoste şi atenţiune».

D-l G. ŢIŢEICA ia cuvântul, liber de cuvântarea morală.

«Vreau să pun în evidenţă ideia D-lui N. CIORĂNESCU. *Care e scopul acestei mese? De obicei matematica se crede că e ceva monstruos, dar matematica e omenească. Matematicianul, însă, are o calitate: E stâncă de granit. Suntem umani, dar adevărul înainte de toate. Matematicianul posedă calitatea de a pune pe fiecare la locul cuvenit. Pentru această calitate ridic paharul».*

Cu spontană recunoştinţă, din mijlocul celor ce au dobândit calitatea amintită la *Gazeta Matematică*, ia cuvântul D-l MAIOR I. LINTEŞ.

«Se pot sublinia 2 perioade critice în viaţa **Gazetei Matematice.** *In timpul războiului era să moară, dar n'a murit. După război, a doua epocă critică: Nu erau bani. Azi,* **Gazeta** *izbuteşte să aibă o casă. Cum? prin voinţa stâlpilor, cari au învins pe o cale pur matematică. Luaţi de la ei pilda sfântă de a învinge pe cale loială.*

Trăiască stâlpii **Gazetei Matematice".**

Sunt orele 24. Timpul de lucru acordat pentru problema propusă în Menu s'a încheiat. Pentru început se cer oarecare indicaţii. Se oferă D-nii C. ORĂŞANU şi M. GHERMĂNESCU. D-l C. ORĂŞANU ceteşte următoarele versuri:

Nu de mult, un biet părinte,
Cu un fiu nu prea cuminte,
Dezolat îmi zicea «frate»
Un mare necaz m'abate.

Tineretul azi nu 'nvaţă.
Face sporturi dimineaţă,
După masă când e ger,
Face patinaj, monşer.

«Şi să vezi ce tura-vura
«Când va 'ncepe iar căldura.
Gându-îi la tir şi sală,
Geaba îi mai faci morală.

Când rămâneam amândoi
Eu îi vorbeam despre Tolstoi,
De Gorki şi Turghenief,
El, luptele de la ONEF.

Eu când îi vorbeam de Göthe
Admira pe Axiote,
Iar când lăudam pe Newton
Imi răspundea pe acelaş ton.

In a sporturilor eră
Să nu-i vorbeşti de carieră,
Că nu-i place meserie
Fie chiar inginerie.

«Să fii inginer de mine»
Zice el, că nu-i convine
Că tot umbli prin coclaur
După un filon de aur.

«Dacă faci pe topometru
«Să măsori la centimetru
«Sărăcia-i la o treaptă
«Banii vin la sfântu-aşteaptă.

«Inginerul are tor
«Chiar de-ar fi el constructor
«In loc s'o ia el mai domol,
«Visează castel spaniol.

Avocat nu vrea să fie
Cică: «Predică-a pustie.
«Doctoru-i frate cu dracu.
«Ofiţeru 'mpuşcă francu.

«Ca s'ajungi al vieței țel»
Zise el, cu exces de zel,
«Numai singura scofală
«E piatra filosofală.

«C'un bilet de loterie
«Stai frumos în berărie
«Merge treaba ca pe șină,
«Capeți casă și mașină.

«Chiar și în viligiatură
«Banii-ți vine mură 'n gură
«Căci Constanța și Sinaia
«Au de toate chiar și de-aia.

«Bacara și Căișori,
«Ce ți-aduce bănișori.
«Viața-i dulce ca alvița
«De ți-e plină pușculița.

Nu pot spune nicăirea,
Cât de mare e mâhnirea
Sufletului meu de părinte,
Auzind așa cuvinte.

Fiindcă li s'a vorbit la curs
De al Gazetei concurs
L'abonai la repezeală
Doar ar face vre-o scoală.

Țineam mult să fie tare,
Să obțină notă mare,
La algebră geometrie.
Și la trigonometrie.

Cunoscând al meu capriciu,
Când veneam de la serviciu
Chiar din prima săptămână
Tot ținea Gazeta 'n mână.

Și mereu o răsfoia
Problemele mi le citea
Mi-arăta drepte 'ncurcate
Și figuri întortochiate,

Semne și litere grecești
De nici nu știi pe unde ești.
Formule cu două cate
Și cu numere inversate.

Una dintre ele are
Chiar și semnul de mirare,
De mă uitam fără habar
Ca pisica-n calendar.

Și-mi spunea mereu: «Părinte»
«Enunțurile sunt cam succinte»
«Dar cum am destulă doxă»
«Nu lucrez în paradoxă».

«Am să fac o decuvertă
«Ca s'apară pe copertă
«Numele-mi ca un fakir
«Cu probleme șir în șir.

La el mereu mă tot uitam,
Ce-mi spunea nu prea credeam
Deși să-l văd îmi convenea.
Matematician sadea.

Intr'o zi fi-miu mă scoală,
«Hai tăticule la școală»,
C'auzise de la curs
De al Gazetei concurs.

Ne îmbrăcarăm chiu și vai,
Luarăm fuga un tramvai,
Mergea tata și cu tizu
Chiar la școala din Polizu.

La școală «Forfotească»
Spunea lui «Tânguială»
Cine cu preciziuue
Va fi în comisiune.

Atunci auzii fărtate
Multe despre trinitate:
«Că sfântul Ion Aritmos,
«Pune 'ntrebările pe dos,

«Că sfântul Gheorghe geometru,
«Te măsoară fără metru;
«Iar cuviosul Andrei
«Trântește din șapte trei.

In urma celor aflate
Era mort pe jumătate
Dar după-o lungă oftare
Imi susținu lung și tare,

Că nu-i nevoe de tărie,
Concursul e lotărie ;
S'apoi el nu e netot
Ca să 'nveţe absolut tot.

«Nu-mi fac capul calendar»
«Examenul ca să-l prepar»
«Şi-ai să vezi c-al tău băiat
«Va eşi chiar premiat.

Toate-acestea fiind zise
Pe concurenţii îi poftise
Asistenţii toţi în masă
Să ocupe loc în clasă

Ce să zic ca să vă las
Abia trecu jum'ate ceas
Fi-miu ca un meteor
Reapăru în coridor.

Tată ! «Mi s'a cerut precis
«Să calculez la Paris
«Umbra Turnului Eiffel
«Şi multe alte fel de fel

«Ţi se cere de eşti tare
«Câte 'n Lună şi în Soare.
«Răspunsul a fost scurt de tot :
«El a cuprins absolut tot.

«Umbra Turnului Eiffel
«N'am văzut-o nici de fel
«Ziua la Paris dormeam
«Numai noaptea mă plimbam.

Ca să nu fiu pisălog,
Vă declar în epilog
Fi-miu astă-zi joacă rumba
De la înscris a făcut tumba.

D-l M. GHERMĂNESCU cântă : *Pe unde treci*, romanţă cu potrivit parfum melancolic, sosit ca o recreaţie după „Seria toasturilor" oprită la un termen suficient de mare pentruca atmosfera anului matematic să fie cât mai bine aproximată.

D-l LT. C-DOR GR. ZAPAN observă că indicaţiile date n'au condus încă pe concurenţi la soluţiunea problemei propusă de D-sa. Şi apoi să nu se uite că înaintea problemei se află rubrica „Cereri".

D-l M. GHERMĂNESCU : „D-l GR. ZAPAN *s'a referit la aceea ce i-a convenit din Menu : Probleme, Cereri, Diverse. Nu s'a referit însă la Articole şi nici la produsul rădăcinilor multiple. Că rădăcinile vor fi fost multiple, de acord — dar produsul nu a avut această calitate*», apoi D-sa cântă *«La fântâna cu găleata»* — probabil în continuarea replicei dată D-lui LT.-C-DOR GR. ZAPAN, organizatorul mesei.

Şi soluţiile încep a sosi. Elevul NĂSTASE cântă câteva bucăţi moderne la violină.

Apoi elevul DOBRESCU — după ce declară în numele celor căzuţi la concurs : *E un imbold la muncă insuccesul*, declară că matematicienii sunt şi muzicanţi. Urmarea enunţării e demonstrarea imediată :

Toţi elevii sub conducerea D-lui V. CEAUŞESCU execută tinerescul *«Gaudeamus igitur»*. Şi D-l A. IOACHIMESCU se ridică. *«Vârsta mă indică să spun şi ultimul cuvânt la acest banchet. Ne-au numit stâlpi. Adevăraţii stâlpi sunt urmaşii noştri. Acum e evul modern, care pune atâta inimă la conducerea* **Gazetei Matematice.** *Cei mai mulţi au fost corespondenţi şi nu de mult. Vă dorim la mulţi din D-voastră să veniţi alături de noi, tuturor succes în carieră, pe drumul drept, care e cel sigur».*

Replica e promptă : **„Trăiască stâlpii Gazetei Matematice".**

Sunt 30 de minute după miezul nopţii, sala se goleşte treptat. E noapte calmă şi senină ca matematicele. Misterul infinitului te învălue de sus, rece şi majestos, pătrunzându-te de melancolică îndoială pe tine, făurar al unei alte spade siegfridice destinată pierderii lui.

C. IONESCU-BUJOR.

REZULTATELE CONCURSULUI „GAZETEI MATEMATICE“

1. In cel dintâi număr al *Gazetei Matematice* din anul acesta, 1934 — 1935, s'a anunțat concursul pentru vacanța Paștilor. S'au făcut înscrierile și s'au publicat, în numărul de pe Februarie, numele candidaților cari au fost admiși să se prezinte la concurs. Au fost admiși 19 elevi din clasa IV, 45 din clasa V, 39 din clasa VI, 52 din clasa VII și 1 candidat din anul preparator al Școalei Politechnice: în total 156 de candidați. Fără îndoială bucuria ne-a fost mare, căci am socotit această bogată înscriere ca un semn bun, ca o dovadă de avânt spre știința matematică. Am constatat și aici, ca și în alte împrejurări, că valoarea numerică nu are nicio legătură cu avântul real, cu entuziasmul sincer și curat.

După lucrările scrise, care s'au anunțat că vor fi eliminatoare, ni s'a înfățișat o altă dovadă tot numerică, dar de data asta dureroasă și sigură, că mulți dintre candidați n'aveau pregătirea serioasă pentru un concurs serios. Din cei 156 candidați înscriși n'au putut fi primiți să treacă probele orale de cât 28. Cele două numere reci 156 și 28 sunt adânc de semnificative, pentru cei cari simt și doresc să le înțeleagă.

Pentru ca acest rezultat trist să nu se mai întâmple, vom fi siliți, poate, să facem și o clasificare negativă, înscriind în ea pe candidații cari, în soluțiile problemelor date, au scris enormități nepermise.

2. Comisiunea a fost compusă din D-nii membri ai Societății noastre: I. S. ANTONIU, I. CHIȚULESCU, C. T. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, C. IONESCU-BUJOR, C. ORĂȘANU, AL. PANTAZI, AL. ROȘU și O. ȚINO, cari au pregătit subiectele probelor scrise și au examinat la oral. La probele orale, ca de obiceiu, au intervenit și alți membri ai Gazetei, cari s'au interesat de concurs, asistând și la probele scrise și anume: D-nii E. ABASON, N. BOTEA, General G. BUICLIU, AL. BUNESCU, N. CIORĂNESCU, D. DUMITRESCU, A. G. IOACHIMESCU, I. IONESCU, A. IOANOVICI, G. ILIESCU, I. LINTEȘ, Col. G. LITEANU, AL. NICULESCU, G. STAMATESCU, G. D. SIMIONESCU, R. WOINAROSKY, GR. ZAPAN.

A asistat la probele orale și un mare număr de profesori dela Școalele Militare.

3. Din cei 28 de candidați pe cari i-am primit la probele orale au ieșit la iveală mulți buni și câțiva foarte buni, pe care îi așezăm în următoarea clasificare.

I. In fruntea acestei liste figurează D-l CEAUȘESCU VASILE, elev în clasa VII la *liceul Militar din Târgul Mureșului.* El a făcut o excelentă lucrare de Algebră, bine studiată, cu observații personale și cu îndemânare de calcul și a dat răspunsuri excelente la oralul de geometrie și răspunsuri foarte bune la Algebră. De altfel un distins corespondent al Gazetei Matematice.

II. In rândul al doilea vine D-l STOICA D. ALEXANDRU, elev în clasa VII la *liceul Voevodul Mihai* din Capitală. Candidat foarte bun, care s'a distins la Geometria descriptivă și la oralul de Algebră.

III. Al treilea e D-l GRIGORESCU VINTILĂ, elev în clasa VII la *liceul Militar Mănăstirea Dealului.* El a fost foarte bine, atât la scris cât și la oral, la Algebră: de asemenea foarte bine la oralul de Geometrie, mijlociu la proba sa de Geometrie.

IV. In locul al patrulea e D-l CIOC I. DUMITRU, elev în clasa V la *liceul Militar din Craiova.* Puțină deosebire față de cel precedent. Bună lucrare scrisă de Algebră, partea întâia chiar foarte bună. La oral foarte bine și la Algebră și la Geometrie. Promite pentru viitor.

V. In rândul al cincilea vine D-l METEA S. VIRGIL, elev în clasa VI la *liceul Militar din Târgul Mureșului*, care e un foarte bun element, dar la probele scrise de Geometrie și Trigonometrie, mai ales la cea din urmă, a avut oarecare părți slabe. Oralul foarte bun.

VI. Al șeaselea e D-l DECEANU GHEORGHE, elev în clasa VIII la *liceul Militar din Târgul Mureșului*, care a fost foarte bine la Astronomie, mai cu seamă la oral, la Algebră bine.

VII. D-l NĂSTASE MARIN, elev în clasa șease la *liceul Militar Mănăstirea Dealului* e clasificat al șaptelea pentru oralul excelent de Trigonometrie, pentru lucrarea scrisă bună la aceeași materie.

Probele de Geometrie au fost destul de bune, cu oarecare rezerve asupra lucrării scrise.

VIII. D-l TĂTARU NICOLAE, elev în clasa patra la *liceul Militar din Târgul Mureșului* încheie lista candidaților care s'au distins la concurs. Probele orale au fost foarte bune, lucrările scrise mai puțin. Avem speranță în viitor.

Ca şi la concursurile anterioare ţinem să menţionăm, dintre cei cari au trecut amândouă probele, pe cei cari au făcut câte o lucrare scrisă sau o probă orală deosebit de bună, şi anume:

D-nii ENACHE I. (Oralul de Trigonometrie), FLORESCU V. (Oralul de Algebră), ŞABAC I. (Oralul de Algebră), ŞTEFĂNESCU N. (Algebra), STOIAN I. (Oralul de Trigonometrie).

Merită să fie menţionat faptul că Matematica este cu deosebire cultivată în liceele Militare, unde se mai păstrează spiritul de altă dată al secţiilor din organizarea lui HARET. Nu pierdem speranţa ca şi în liceele civile, acum cu bifucarea ultimelor două clase, să reînceapă o activitate matematică temeinică.

Dorim, prin urmare, ca acest concurs al *Gazetei Matematica* din al 40-lea an al existenţei sale să anunţe o urcare a entuziasmului tinerilor pentru ştiinţa matematică.

DELEGAT PENTRU RAPOARTE
G. ŢIŢEICA

SUR LE THÉORÈME DE FEUERBACH.

1. Considérons trois cercles de centres O_1, O_2, O_3, de rayons l, m, n, puis le cercle de centre ω orthogonal aux trois premiers et enfin le cercle de centre O circonscrit au triangle $O_1\,O_2\,O_3$. Si d désigne la distance $O\omega$ des centres des cercle (O) et (ω), S l'aire du triangle $O_1\,O_2\,O_3$ et si $O_2\,O_3 = a$, $O_1\,O_2 = b$, $O_3\,O_1 = c$, nous avons prouvé que

$$(1) \qquad \Sigma\, a^2\,(l^2 - m^2)\,(l^2 - n^2) = 16\, d^2\, S^2. \text{ [1]}$$

1) *Revista Matematică din Timişoara*, XII. p. 76.

Cette formule (1) qui a été donnée presque en même temps par M. ROMANUJAN, (*The Mathematics Student*, I. p. 35), n'est pour ainsi dire qu'une variante dela suivante:

$$a\cos\Theta_b\cos\Theta_c + b\cos\Theta_c\cos\Theta_a + c\cos\Theta_a\cos\Theta_b = \frac{S}{R},$$

où Θ_a , Θ_b , Θ_c sont les angles de même sens que fait la droite $O\omega$ avec les côtés O_2O_3 , O_1O_2 , O_3O_1 du trianngle $O_1O_2O_3$, due á M. R. GOORMAGHTIGH, (*The Tohoku Mathematical Journal*, 1926 p. 93). (V. T.).

Cette formule conduit à des relations intéressantes entre les éléments d'un triangle puis à une démonstration directe du théorème de FEUERBACH.

2. Soient A_m, B_m, C_m les milieux des côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $(a > b > c)$, d'un triangle inscrit dans un cercle (O) de rayon R; (I) le cercle inscrit de rayon r, qui touche les côtés BC, CA, AB, en D, E, F; (O_9) la cercle de neuf points, de rayon $\frac{1}{2}$ R; S l'aire du triangle.

1°. Les cercles de centres A, B, C et de rayons $AE = p - a$, $BF = p - b$, $CD = p - c$, sont orthogonaux au cercle inscrt (I). Dans ce cas particulier, la relation (1) devient

$$\begin{aligned}(2)\quad &\Sigma\, a^2\,[(p-a)^2-(p-b)^2]\,.\,[(p-a)^2-(p-c)^2]\\ &=16\,.\,\overline{OI}^2\,.\,S^2=\Sigma\, a^2(p-a+p-b)(p-a-p+b)\times\\ &(p-a+p-c)(p-a-p+c)=\Sigma\, a^2bc\,(b-a)(c-a)\\ &=\Sigma\, 4RS\,.\,a\,(b-a)\,(c-a)\,;\end{aligned}$$

d'ou, observant que $\overline{OI}^2 . = R\,(R - 2r)$,

$$(3)\qquad \Sigma\, a\,(b-a)\,(c-a)=4S\,(R-2r).$$

2°. Les cercles décrits des milieux A_m, B_m, C_m, des côtés du triangle ABC comme centres avec $A_m D = \frac{1}{2}(b - c)$, $B_m E = \frac{1}{2}(c - a)$, $C_m F = \frac{1}{2}(a - b)$ comme rayons sont ainsi orthogonaux au cercle inscrit (I) et, dans ce cas, la relation (1) donne

$$\begin{aligned}&\Sigma\, a^2[(b-c)^2-(c-a)^2]\,.\,[(b-c)^2-(a-b)^2]=64\,\overline{O_9I}^2\,.\,S^2\\ (4)\quad &=\Sigma a^2(b-c+c-a)(b+c-c-a)(b-c+a-b)(b-c-a+b)\\ &=\Sigma a^2(a-b)^2(c-a)(a-c+b-c)[b-c-(a-b)],\end{aligned}$$

ou, après réductions

$$(5)\quad \Sigma[a^2(a-b)^2(c-a)^2+2a^2(a-b)(b-c)^2(c-a)]=64\,\overline{O_9I}^2\,.\,S^2.$$

Le premier membre de cette égalité est la somme des polynômes

$$\begin{aligned}(6)\quad &a^2(a-b)^2(c-a)^2+2a^2(a-b)(b-c)^2(c-a)\\ &b^2(a-b)^2(b-c)^2+2b^2(a-b)(b-c)(c-a)^2\\ &c^2(c-a)^2(b-c)^2+2c^2(a-b)^2(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

dont l'ensemble des termes constitue, en vertu de l'identité

(7) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\equiv bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$,

celui des termes du développement du carré du polynôme

(8) $$a(b-a)(c-a)=4S(R-2r)^2.$$

Finalement, on a donc

(9) $$64\,O_9I^2\,,\,S^2=16\,S^2(2-2r)^2,$$

d'ou

(10) $$O_9I=\tfrac{1}{2}R-r.$$

La distance des centres du cercle des neuf points (O_9) *et du cercle inscrit* (I) *à un triangle étant égale à la différence des rayons de ces cercles, ceux-ci sont tangents intérieurement* et on retrouve le théorème classique de FEUERBACH.

N. B. Par un raisonnement similaire on établirait que le cercle (O_9) touche également les cercles (I_a), (I_b), (I_c) exinscrits au triangle fondamental.

3. Il est intéresant de mettre en évidence les formules relatives au triangle que nous venons de rencontrer et d'en ajouter une autre que nous avons déja signalée: [1])

$$\Sigma a^2(a-b)(a-c)(a+b-2c)(a+c-2b)=[\Sigma a(a-b)(a-c)]_2$$
$$=[\Sigma(b-c)^2(p-a)]^2=[4S(R-2r)]^2.$$

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

CĂRȚI VECHI DE MATEMATICĂ

Una din cărțile vechi de matematică, donate de D-l D. LEONIDA *Gazetei Matematice* (vezi pag. 415) este intitulată:

«Anfangsgründe | der | Mathematik | zum Gebrauche | der mathematischen Schule des. Kaiserl. Königl. | Artilleriekorps. | Zweiter

1) *Mathesis*, 1933 (Supplément p. 19).

Teil. **Die Geometrie.** Zweiter Band | Verfasst | von LEOPOLD Unterberger | Major und öffentlichen Lehrer der Mathematik bei Kaiserl. Königl. Feldartilleriekorps. | Wien. | Gedruckt bey Thom. Edl. v. Tratthenrț | Kaiser 1. Königl. Hofbuchdruckern und Buchhändler. 1776 | .

Volumul nu are o prefață, în care autorul să-și expună ideile care l'au condus la alcătuirea lui. Avem aci de a face cu o *Geometrie practică* făcută în scopul de a folosi corpului de artilerie, fapt interesant căci încă din secolul XVIII începuse să se facă cărți de matematici specializate pentru diferite profesiuni.

Prima secțiune se ocupă cu *trigonometria rectilinie.* In primul Capitol se dau definițiuni și de tabelele de sinusuri (logaritmii lor) care sunt dați in ipoteza că raza *(sinus totus)* ar fi de 10000000. La fine este o tabelă de logaritmii sinusurilor de la 0—32 minute din secundă în secundă. In al doilea Capitol se rezolvă triunghiurile dreptunghice, în al treilea cele *oblice.*

In a doua secțiune se tratează *măsurătorile trigonometrice.* Primul Capitol se ocupă cu instrumentele de măsurarea unghiurilor, capitolul al doilea cu verificarea și rectificarea instrumentelor; capitolul al treilea cu probleme trigonometrice simple și compuse: capitolul următor cu ridicări de planuri și de provincii.

In a treia secțiune se arată *ridicarea cu planșeta.*

In a patra secțiune se tratează despre *Nivelment.* In primul Capitol se dau bazele nivelmentului, în al doilea se descriu instrumentele, în al treilea cum se fac nivelmentele.

După aceste patru secțiuni vine un *Apendice* de aplicațiile Geometriei la Artilerie și la arta Minelor.

Cartea are 308 pagini de 80×160, și 15 planșe cu figuri. Figurile sunt făcute cu multă îngrijire, cu arătarea de reliefuri, de păduri, fortificații, etc.

Cartea nu poate servi pentru nevoile artileriei de azi, însă ea ne dă o idee clară de ce chestiuni în legătură cu geometria și cu topografia, preocupau pe artileriștii de acum 150 de ani.

I. IONESCU.

NEEGALITĂȚI CU INDICATORI DE ORDIN SUPERIOR

Dacă φ_i (N) este indicatorul de ordinul i a lui N și φ_n (N) $= 1$, atunci ne propunem să stabilim o serie de neegalități.

a) Știm că avem :

$$1) \quad \begin{cases} 2\varphi_2 \leqslant \varphi_1 \\ 2\varphi_3 \leqslant \varphi_2 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ 2\varphi_m \leqslant \varphi_{m-1} . \end{cases}$$

Prin adunarea lor și simplificările legale obținem :

$$2) \quad \varphi_1 \leqslant \sum_1^m \varphi_i \leqslant 2\varphi_1 - \varphi_m .$$

Prima neegalitate fiind evidentă.
Iar în cazul când $m \geqslant n$ avem :

$$\varphi_m = 1.$$

b) Inmulțind neegalitățile 1) obținem :

$$3) \quad 1 \leqslant \varphi_m \leqslant \frac{\varphi_1}{2^{m-1}} .$$

c) Dacă factorii primi ai lui N sunt :

$$a < b < \ldots < l$$

atunci avem :

$$4) \quad \varphi_1 \geqslant \mathrm{N} \cdot \frac{a-1}{l} .$$

In adevăr știm că :

$$\varphi_1 = \mathrm{N} \cdot \frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b} \cdots \frac{l-1}{l}$$

unde avem evident :

$$1 \leqslant \frac{b-1}{a} \cdot \frac{c-1}{b} \cdots \frac{l-1}{k} .$$

Ţinând apoi seamă că :

$$\varphi_1 \leqslant N - 1$$

$\left(\text{în cazul lui N par avem } \varphi_1 \leqslant \frac{N}{2} \right)$ neegalităţile 2) se mai pot scrie :

$$5) \qquad N \cdot \frac{a-1}{l} \leqslant \sum_1^m \varphi_i \leqslant 2(N-1) - \varphi_m .$$

In G. M. XXIX, 448 am arătat că :

$$6) \qquad N - 1 < \sum_1^n \varphi_i < 2N.$$

Prin urmare pentru $m \geqslant n$ putem scrie că :

$$7) \qquad N - 1 < \sum_1^m \varphi_i \leqslant 2\varphi_1 - 1$$

care are un interval mult mai restrâns.

d) Ştiind că :

$$8) \qquad \varphi_1(N^\alpha) = N^{\alpha-1} \cdot \varphi_1(N)$$

atunci avem succesiv :

$$9) \quad \begin{cases} \varphi_1(N) \leqslant \sum_1^m \varphi_i(N) \leqslant 2\varphi_1(N) - \varphi_m(N) \\ \varphi_1(N^2) \leqslant \sum_1^m \varphi_i(N^2) \leqslant 2\varphi_1(N^2) - \varphi_m(N^2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_1(N^p) \leqslant \sum_1^m \varphi_i(N^p) \leqslant 2\varphi_1(N^p) - \varphi_m(N^p). \end{cases}$$

Adunând şi ţinând seamă de 8), obţinem :

$$10) \quad \frac{N^p - 1}{N - 1} \cdot \varphi_1(N) \leqslant \sum_1^m \sum_1^p \varphi_i(N^j)$$

$$\leqslant 2 \cdot \frac{N^p - 1}{N - 1} \cdot \varphi_1(N) - \sum_1^p \varphi_m(N^j).$$

Admiţând m suficient de mare şi $\varphi_1(N) = N - 1$ (cu exces), atunci 10) se mai poate scrie:

$$11) \qquad N^p - 1 \leqslant \sum_1^m \sum_1^p \varphi_i(N^j) \leqslant 2(N^p - 1) - p.$$

e) Scriind acum succesiv:

$$12) \qquad \begin{cases} \varphi_2 \leqslant \dfrac{\varphi_1}{2} \\ \varphi_3 \leqslant \dfrac{\varphi_1}{2^2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m \leqslant \dfrac{\varphi_1}{2^{m-1}} \end{cases}.$$

Adunând aceste neegalităţi, obţinem:

$$13) \qquad \varphi_1 \leqslant \sum_1^m \varphi_i \leqslant \varphi_1 \cdot \frac{2^m - 1}{2^{m-1}}$$

care este însă mai largă decât 2).

Inmulţind apoi neegalităţile 12) şi ţinând seamă că pentru $m < n$ avem: $\varphi_i \geqslant 2$, atunci avem:

$$14) \qquad 2^m \cdot \varphi_1 \leqslant \prod_1^m \varphi_i \leqslant \frac{\varphi_1^m}{2^{\frac{1}{2}m(m-1)}}.$$

f) Ţinând seamă de 8) şi de neegalităţile:

$$2^m \varphi_1(N^\alpha) \leqslant \prod_1^m \varphi_i(N^\alpha) \leqslant \frac{\varphi_1(N^\alpha)}{2^{\frac{1}{2}m(m-1)}}$$

avem pentru $\alpha = 1, 2, 3, \ldots p$:

$$15) \qquad 2^m \cdot \frac{N^p - 1}{N - 1} \varphi_1 \leqslant \prod_1^m \prod_1^p \varphi_i(N^j) \leqslant \frac{N^{pm} - 1}{N^m - 1} \cdot \frac{\varphi_1^m}{2^{\frac{1}{2}m(m-1)}}.$$

In cazul când $m = n$, atunci — făcând aceleaşi considerente ca pentru 11) — putem scrie:

$$16) \qquad 2^{n-1} \cdot (N^p - 1) \leqslant \prod_1^n \prod_1^p \varphi_i(N^j) \leqslant \frac{N^{p \cdot n} - 1}{2^{\frac{1}{2}n(n-1)}}.$$

g) Dacă ridicăm la puterea k neegalitățile 1) și le adunăm, obținem :

$$17) \qquad (2^k - 1) \sum_{1}^{m} \varphi_i^k \leqslant 2^k \cdot \varphi_1^k - \varphi_m^k.$$

Pentru $m \geqslant n$, $\varphi_m^k = 1$.

h) Dacă avem : $\varphi_{m-1} \leqslant 2^k$, atunci avem și :

$$18) \qquad \varphi_m^k \leqslant \varphi_{m-1}^{k-1} \qquad (m > 1)$$

căci știm dela 1) neegalitatea :

$$\varphi_m \leqslant \frac{\varphi_{m-1}}{2}$$

și va fi suficient să avem :

$$\left(\frac{\varphi_{m-1}}{2}\right)^k \leqslant \varphi_{m-1}^{k-1}.$$

Dacă $m = 1$ atunci numai pentru N par avem :

$$\varphi_1^k \leqslant N^{k-1},$$

iar pentru N impar se va lua :

$$\varphi_1^k \leqslant (2N)^{k-1},$$

știind că trebue să avem $N \leqslant 2^k$.

Cu aceasta, s'au generalizat ori s'au restrâns intervalele multor neegalități ce au fost publicate în G. M.

MAIOR I. LINTEȘ.

RAPORTUL COMISIUNII
PENTRU
ACORDAREA PREMIULUI „V. CRISTESCU"

In volumul XXXIX al *Gazetei Matematice,* s'au publicat următoarele articole de geometria triunghiului sau trigonometrie, scrise de studenți :

1°. un articol intitulat *„Relații trigonometrice într'un triunghiu în legătură cu punctele lui* FEUERBACH" (pag. 123–128, 295–298) datorit D-lui N. N. MIHĂILEANU, student al Facultății de Științe, secția Matematici, din București.

2⁰. un articol cu titlul *„Asupra cubicei lui* DARBOUX" (pag. 438 — 443) datorit tot D-lui MIHĂILEANU.

3⁰. un articol cu titlul *„Două teoreme de geometrie"* (pag. 90 — 92) datorit D-lui M. MARGULIUS, student al Facultății de Științe și al Școalei Politehnice din București.

Nu s'a publicat în volumul XXXIX niciun articol al cărui autor să fie elev de liceu sau de școală militară.

Suntem de părere ca pentru perioada 15 Sept. 1933 — 15 Aug. 1934 să se acorde premiul «V. CRISTESCU» D-lui N. MIHĂILEANU, ale cărui lucrări, citite mai sus, îndeplinesc condițiile cerute de regulamentul premiului.

COMISIA PENTRU PREMIUL „V. CRISTESCU":
N. BOTEA, GENERAL GH. BUICLIU,
LT.-C-DOR GH. NICULESCU.

Acest raport s'a citit și aprobat în *«Adunarea Generală»* dela 13 Februarie 1935.

PREMIUL BIENAL „INGINER H. CAPRIEL"

pentru lucrări de matematici superioare pure sau aplicate, pe anul 1936.

SUBIECTUL PROPUS.

Limitarea modulelor rădăcinilor unei ecuațiuni algebrice.

A) Prezentarea unitară a rezultatelor cunoscute până în prezent.

B) Rezultate noui.

COMISIUNEA:
AL. PANTAZI, O. N. ȚINO, I. BUȘILĂ.

NOTE MATEMATICE

42. *Cum se hotărnicea în secolul XVIII la noi!* In o *hotarnică* a Năsoeștilor, făcută de hotarnicul IORDACHE ILIESCU la 20 Martie 1781, se spune:

« ... și acolo lângă fag despre răsărit s'au pus *piatră hotar* cum și *bour în fag* și după *hotarnica* veche acum sunt mai mulți stânjeni partea răzeșilor 42 și am cunoscut că alta nu este, fără

numai că stânjenul a fost mai mare atuncea şi acum mai mic, şi pentru ca să nu mai fie pricină, am lăsat tot după semnele vechi, rămâind aceştia în partea răzeşilor».

« ... iar în lungul moşiei n'am putut să'l măsor în stânjeni fiind pădure la amândouă capetele».

I. I.

43. *Rectificarea soluţiei exerciţiului 24.* La pag. 283, Vol. XL, *Gazeta Matematică,* se cere să se rezolve în numere întregi ecuaţiunea

$$10a^2 - b^2 = 24 \tag{1}$$

care se reduce la

$$5z^2 - 2y^2 = 3 \qquad \text{cu } a = 2z\ ,\ b = 4y \tag{2}$$

şi se dă ca rezultat soluţiile

$$a = 2\ ;\ b = \pm 4 \quad \text{şi} \quad a = 14\ ,\ b = 44.$$

Acest rezultat este cu totul parţial. Ecuaţia dată are o infinitate de soluţie după cum se vede din cele ce urmează. Urmând cuvânt cu cuvânt soluţia pe care am dat-o, la pag. 107, Vol. XL, în articolul întitulat *„Patrate berce"*, pentru rezolvarea în numere întregi a ecuaţiei

$$2z^2 - 5y^2 = 3$$

se găseşte că soluţiile întregi ale ecuaţiei (2) sunt date de sistemele

$$\begin{cases} y_1 = 5u + t \\ z_1 = 2u + t \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} y_2 = -5u + t \\ z_2 = 2u - t \end{cases}$$

în care u şi t sunt soluţiile întregi ale ecuaţiei

$$t^2 - 10u^2 = 1$$

şi anume

$$t = \frac{(19 + 6\sqrt{10})^n + (19 - 6\sqrt{10})^n}{2}$$

$$u = \frac{(19 + 6\sqrt{10})^n - (19 - 6\sqrt{10})^n}{2\sqrt{10}}$$

n putând lua orice valoare întreagă şi pozitivă.

Aşa că sistemele generale de soluţiuni ale ecuaţiei propuse în exerciţiul citat sunt

$$a = 4u + 2t \qquad \text{şi} \qquad a = 4u - 2t$$
$$b = 20u + 4t \qquad\qquad b = -20u + 4t.$$

Pentru valorile particulare 0, 1, 2, ... ale lui n găsim pentru a şi b următoarele valori particulare.

a	2	62	2354	...
b	4	196	7444	...

şi

a	2	14	530	...
b	4	44	1676	...

Evident că convin şi valorile negative ale lui a şi b.

GENERAL GH. BUICLIU.

44. *Asupra unei chestiuni de examen.*

Dintr'o eroare de transcripţiune, enunţul chestiunii a doua, dată la Concursul «Gazetei» pentru anul preparator al Şcoalelor Politehnice, a apărut într'o formă, care-l face inexact. Forma corectă este următoarea :

„u_n şi v_n fiind termenii generali a două serii, dacă raportul $\frac{u_n}{v_n}$ are o limită, să se arate *în ce condiţiuni* aceeaşi limită o are şi raportul $\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}}$ “.

Se vede că această problemă constitue o reciprocă a unor teoreme ale lui CESARO. Am propus-o pentru că în practică se confundă de multe ori teoremele lui CESARO cu cea de mai sus. Astfel, ca să dau un exemplu, în problema 2042 (G. M. XIX) se cere limita expresiunei

$$\lim_{n=\infty} \left[n \sqrt[n]{n} - (n-1) \sqrt[n-1]{n-1} \right],$$

expresiune pe care dinadins am propus-o ca aplicaţie la problema de mai sus, întrucât soluţia dată pe vremuri problemei 2042 nu este exactă. In adevăr, se pune (loc. cit.) $u_n = n\sqrt[n]{n}$, $v_n = n$, iar expresia dată devine $\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}}$ şi se conchide

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1,$$

ceeace nu este exact, înainte de a se demonstra că prima limită există, sau înainte de a se răspunde la problema pusă de mine la începutul acestei Note.

Eu posed răspunsuri la această chestiune, dar ar mai putea fi şi altele, pe cari le aştept bucuros dela corespondenţii Gazetei. Citez unul din cazurile ce am precizat:

„Dacă raportul $\frac{v^n}{v_{n-1}}$ *are o limită diferită de unitate, atunci*

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{u_n}{v_n},$$

când ultima limită există“.

Aşteptăm soluţii bune şi la problema 2042.

M. G.

45. *Asupra teoremei lui* STEINER *generalizată.*

Dacă B, C, A′, A″ şi A_1 sunt punctele unde o dreaptă oarecare Δ taie două cercuri arbitrare şi axul lor radical, avem relaţia:

$$(1) \qquad \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{A''B'}{A''C}.$$

(Culegerea de Probleme de Geometrie. IX. 81).

D-l MICU GRÜNBAUM în broşura *„Contribuţii la Geometria triunghiului“* numeşte relaţia (1) teorema lui STEINER generalizată, pentrucă în cazul particular când cele două cercuri sunt tangente interior în A, devine:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{A''B}{A''C} = \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

care este tocmai relația lui STEINER relativă la ceviene izogonale *(Culegerea de Probleme de Geometrie. IX. 28)*.

In cele ce urmează vom da o nouă demonstrație relației (1) diferită de cea dată de D-l GRÜNBAUM și reprodusă în Culegere.

Fascicolul punctual de cercuri determinat de cele două cercuri din enunț taie dreapta Δ după o involuție, conform teoremei lui DESARGUES. In această involuție se corespund perechile de puncte (B, C) și (A', A''). E clar apoi că A_1 este punctul central al involuției, adică corespunzătorul punctului impropriu al dreptei Δ.

Avem prin urmare:

$$(A_1A'BC) = (\infty\, A''CB)$$

ceeace se poate scrie:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{A''B}{A''C}.$$

CEZAR IVĂNESCU.

O a treia soluție mai simplă ca cea a D-lui GRÜNBAUM și mai elementară ca cea a D-lui IVĂNESCU se poate da cu ajutorul relațiilor folosite la rezolvarea problemei 4244 (G. M. XL, pag. 184).

Din relația:

$$A_1B \cdot A_1C = A_1A' \cdot A_1A''$$

se deduc relațiile:

$$\frac{A_1B}{A_1A'} = \frac{A_1A''}{A_1C} = \frac{A''B}{CA'}, \qquad \frac{A_1C}{A_1A'} = \frac{A_1A''}{A_1B} = \frac{A''C}{BA'}$$

din care se scoate relația căutată.

N. B.

EXAMENUL DE CAPACITATE PENTRU PROFESORII SECUNDARI

Specialitatea Matematici (pentru fete)

București 11 — 14 Martie 1935

PROBA DE LICENȚĂ

I. Variabilele complexe $z = x + iy$ și $Z = x + iy$ sunt legate prin relația

(a) $$Z = \frac{z^2 - 1}{z}$$

Se cere:

1°. Să se construiască curba (C) pe care o descrie Z când z descrie dreapta $y = 1$.

2°. Locul geometric al punctelor z care *nu sunt* pe dreapta $y = 1$ şi care se transformă, prin relaţia dată (a) în puncte de pe curba (C).

3°. Să se arate că, dacă z descrie o circonferinţă cu centrul în origină şi cu raza *diferită de* 1, Z descrie o curbă închisă *fără nici un punct dublu sau multiplu.*

II. Se dă funcţiunea F (x), definită pentru $x \geqslant 0$ prin integrala

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

unde α e un număr *pozitiv* dat. Se cere:

1°. Să se arate că lim. F (x) pentru x tinzând către $+\infty$ există şi este finită. (Se va utiliza pentru cazul $\alpha \leqslant 1$, formula întregrării prin părţi).

2°. Să se compare între ele maximele şi minimele lui F (x) construindu-se forma curbei

$$y = F(x)$$

între $x = 0$ şi $x = +\infty$.

3°. Să se arăte ce modificări intervin în această curbă dacă, în loc de integrala de mai sus, se consideră

$$F(x) = \int_0^x \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\, dt.$$

III. Se consideră ecuaţiunile diferenţiale:

(1) $$x\,y''' - y'' - x\,y' + y = 0\,.$$

(2) $$(2x - 1)\,y'' - (4x^2 + 1)\,y' + (4x^2 - 2x + 2)\,y = 0.$$

1°. Să se integreze ecuaţia (1).

2°. Să se integreze ecuaţia (2) luând ca soluţii fundamentale pe acelea care pentru $x = 0$ devin 1 şi au derivata întâi respectiv egală cu 1 şi cu 0

3°. Să se deducă că o soluţie particulară a ecuaţiei (1) coincide cu o soluţie particulară a ecuaţiei (2). Presupunând că acest fapt e indicat prin enunţ, să se arate cum integrarea ecuaţiei (1) atrage aflarea soluţiei generale a ecuaţiei (2).

PROBA DE LICEU

I. Se consideră un solid format din două sfere de rază R legate între. ele printr'un cilindru de rază r şi de înălţime 2R.

1°. Să se calculeze suprafaţa şi volumul solidului. Să se studieze variaţia suprafeţei solidului când r variază de la 0 la R.

2°. n fiind un număr întreg, să se arate că expresiunea

$$E = n\,(n^2 - 1)\,(n^2 - 2)\,(n^2 - 4)$$

se divide cu 840 sau cu 2520 după cum n este sau nu multiplu de 3.

II. Se consideră ecuaţiunea :

$$f(x) = x^3 - 7x\cos^2\varphi + 6\cos 2\varphi = 0.$$

1°. Să se determine φ astfel ca una din rădăcinile acestei ecuaţii să fie îndoitul alteia.

2°. *În acest caz,* să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$. Să se construiască, pentru $\varphi = k\pi$, curba :

$$(x^2 + 1)^2 y^2 = f(x).$$

III. Să se arate că ecuaţiunea

$$f(x) = 1 - Ax + Bx^2 - Cx^3 - Dx^4 = 0$$

unde A, B, C, D sunt coeficienţi pozitivi, admite cel mult o rădăcină în intervalul $0, \frac{1}{\sqrt{B}}$.

2°. Să se generalizeze pentru ecuaţia de grad n de acelaş tip.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XLI. No. 2. Fevruarie 1935. New-York. Asupra desvoltării în serii de polinomiale ortogogonale a funcţiunilor, de J. A. SHOLAT. Categorii de clasa Lip (α, p), de E. S. QUADE. Identităţi de aritmetică ternare, de E. T. BELL. Invarianţi mecanici ai procedeului „sweeping-out", de C. H. DIX. O teoremă de descompunere pentru şiruri închise de G. T. WHYBURN. Reţea de hipersuprafeţe cuadratice în r dimensiuni, de T. R. HOLLCROFT. O teorie de factorizare pentru polinomiale în x şi în funţiunea e^{ax}, de L. A. MACCOLL. Numărul trisecantelor unei curbe în spaţiu de ordinul m care întâlnesc o secantă de ordinul i, de L. A. DYE. Gradul de aproximaţiune prin polinomiale la funcţiunile continui, de W. E. SEWELL. O reprezentare polară a matricelor singulare, de J. WILLIAMSON. Asupra unei teoreme a lui FÉRAUD, de D. C. LEWIS. Asupra funcţiunii derivată de ordinul r conjugată, de A. F. MOURSUND. Convoluţiuni simetrice ale lui BERNOULLI, de A. WINTNER. Demonstrarea a trei teoreme ale lui PALEY, de M. FEKETE.

Idem, No. 4. Aprilie 1935. Geometria mulţimilor W_e, de A. B. COBLE. Derivarea elementară a echivalenţei masei şi energiei, de A. EINSTEIN. O notă asupra teoremei lui TAYLOR de A. F. MOURSUND. O teoremă asupra funcţiunilor analitice de o variabilă reală, de R. P. BOAS. Un şir de relaţiuni definind grupul simplu de ordinul 1092, de A. SINKOV. Noţiunea de regularitatea metodelor de sumare a seriilor infinite, de J. D. TAMARKIN. O extenziune la funcţiunile poligama a teoremei lui GAUSS, de H. T. DAVIS. Ireductibilitatea polinomialelor de gradul n care iau aceiaşi valoare de n ori, de L. WEISNER. Notă asupra ecuaţiei conductibilităţii căldurii, de A. E. HEINS. Un sistem neliniar cu un parametru de hipersuprafeţe de ordinul n în spaţiul r, de B. C. WONG. Extreme prime şi indescomposabilitatea, de N. E. RUTT. Geometria

diferențială proiectivă a curbelor, de L. R. WILCOX. Soluțiunea aproximativă a ecuațiilor integrale, de E. N. OBERG. Secțiuni plane prin o tangentă asimptotică la o suprafață, de E. D. LANE. Asupra independenții ideilor nedefinite, de J. C. C. MCKINSEY. Distribuția celor mai mari și mai mici variații și intervalelor lor în cazul unui univers dreptunghiular, de E. G. OLDS.

The Mathematical Gazette. Vol, XIX. No. 233. Mai 1935. Londra. Opera unei june asociații matematice, de G. L. PARSONS. Starea mecanicii statistice și cuantice în operele școlare, de D. R. HARTREE. Despre diferențiale, de D. K. PICKEN. Determinarea focarului și directoarei unei parabole a cărei ecuație e dată prin coeficienți numerici, de L. CRAWFORD. Triunghiuri și patrulatere mărginite de triunghiuri echilaterale, de V. THÉBAULT. Trasarea conicelor în coordonate lineare, de S. P. JOHNSON. Conice armonice, de J. CLEMOW. Simplex ortocentric în spațiul cu trei sau mai multe dimensiuni, de H. LOB. Prima cunoștință cu o limită, de diverși (discuție). Uzul semnelor în geometrie, de H. V. MALLUSON.

Mathesis. Tomul XLIX. No. 3—4. Martie—Aprilie 1935. Gembloux Tratatul de hosoedre al lui VITO CARAVELLI, de P. VER. EECKE. Curbura secțiunilor plane ale suprafețelor strâmbe, de J. L. KRAMES. Aplicarea proprietăților funcțiunii gama la calculul unei integrale definite, de J. MAHRENHOLZ. Asupra unei pseudo-drepte, de P. LIBOIS. Notă de Geometrie analitică plană, de AD. M. Ortologie și ortologie strâmbă în geometria triunghiului și a tetraedrului, de A. CLAEYS. Asupra curburii curbelor algebrice și a desfășuratelor lor, de R. GOORMAGHTIGH. Deslegarea unei ecuații nedeterminate, de L. TITS. O propoziție de aritmetică de SIMON DE BACKER.

Boletin Matematico. Anul VIII. No 1. Martie 1935. Buenos Aires. La începutul anului al optulea al Buletinului Matematic, de B. I. BAIDAF. Inaugurarea Casei *«Gazeta Matematica»* (traducerea în limba spaniolă a articolului D-lui A. D. BUNESCU, a cuvântării Preotului C. MOISE și a unei părți din cuvântare D-lui I. IONESCU din *Gazeta Matematică*, de pe luna Fevruarie anul curent, cu reproducerea fotografiei Casei *«Gazeta Matematica»*.

Journal de Mathematiques Elementaires publié par V. VUIBERT. Anul 59. No. 14. Aprilie 1935. Paris

Idem. No. 15. Mai 1935.

Idem. No. 16. Mai 1935.

Știință și progres. Anul II. No. 2. 1 Mai 1935. Târgul Mureș. Introducerea în studiul șirului lui FIBONACCI, de M. DUMITRESCU.

Revista Matematică din Timișoara. Anul XV. No. 3. Mai 1935. Timișoara. Sur les bissectrices du triangle, par V. THÉBAULT. Domeniul matematicilor în clasificarea lui AUGUSTE COMTE, de N. O. ZAHARIA.

MIGUEL SIMONOFF. *Electricidad y Magnetismo.* Publicația No. 98 a Universității Naționale De La Plata). La Plata 1935.

L. LEEMANS. *Applications diverses de la Géométrie vectorielle au triangle et au tétrédre.* Gembloux 1935. (Supliment la *Mathesis).*

V. THEBAULT. *Sur les nombres curieux.* (Supliment la *Mathesis* No. 3—4. Anul 1935).

. . . . . Cubice strâmbe proiective ale căror patru puncte comune sunt puncte unite. (Extras din Cursul de Geometrie proectivă al autorului la Universitatea din Bruxelles. Supliment la *Mathesis).*

J. REY PASTOR. *Boletin del Seminario Matematico* al Institutului ispano-americano. Vol. VI. No. 15. Mai 1934. Buenos Aires-Madrid. O teorie a integrării funcţiunilor de un număr oarecare de variabile, de J. REY PASTOR. Desvoltarea funcţiunilor în serii de primitive de J. REV. PASTOR. Unele proprietăţi polare ale cubicelor plane, de J. REY PASTOR.

J. B. TOURRIOL. *Chaleur.* Paris 1935. Librăria Guthier-Villars. Un Volum de 304 pagini conţine o parte din cursul de fizică pentru clasele de matematici speciale din Franţa. In prima parte se reamintesc unele noţiuni fundamentale privitoare la materie, masă, presiune, măsuri de mărimi şi erori la măsurători. Partea a doua se ocupă cu gaze, a treia cu termometria, a patra cu calorimetria, a cincea cu schimbările de stare fizică.

I. I.

A. MYLLER. *Schiţa învăţământului matematic la Universitatea din Iaşi.* Iaşi 1935. (Extras din *Revista Stiinţifică* „V. ADAMACHI").

M. GHERMANESCO. *Sur leş équations aux différences finies.* (Extras din *Annali di Matematica pura ed applicata).* Bologna 1935.

Gazeta Matematica. *Supliment cu Exerciţii.* Anul I. No. 8. Mai 1935, Bucureşti.

GASTON JULIA. *Leçous sur la réprésentation conforme des aires multiplement connexes,* Paris, Ganthier-Villares, 1934.

Acest volum e a 14-a fasciculă din colecţia „Cahiers scientifiques" şi a fost redactat de doi matematicieni tineri bine cunoscuţi: BOURION şi LERAY. Intr'o fasciculă anterioară D-l JULIA a tratat chestia mai simplă şi clasică a reprezentării ariilor simplu conexe. De data aceasta a atacat problema generală, care are oarecare legături cu funcţiunile algebrice, prin metodele cele mai variate până la cea mai nouă a D-lui DE LA VALLÉE POUSSIN, perfecţionată de autor. E o bună introducere, de altfel aprofundată, în acest domeniu interesant şi greu.

G. Ţ.

NORBERT WIENER. *Fourier transforms in the complex domain,* New-York, American Mathamatical Society, 1934.

Volumul face parte din colecţia *«Colloquium publications»* publicată de Societatea matematică americană şi a fost începută de D-l WIENER cu PALEY, mort într'un accident. In cazul când integrala

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{iux}\, dx$$

are un sens, $g(u)$ este transformata lui FOURIER a funcţiunii $f(x)$. In cazul când n'are sens şi noţiunea de integrală e mai largă, problema e mai delicată. Autorul studiază această problemă cu toată rigoarea şi cu foarte multe aplicaţii la teoria funcţiunilor.

G. Ţ.

CERERI

Răspuns la cererea No. 242. In răspunsul publicat de Domnul Profesor Ing. ION IONESCU la pag. 414, se arată că printre elevii primei noastre Şcoli de Silvicultură era şi unul cu numele GIURCOVICI. Interesându-mă mai în deaproape pentru a identifica pe acest GIURCOVICI, am aflat următoarele:

Inginerul ION GIURCOVICI a venit în ţară pe la 1845, aducând cu sine şi pe fraţii săi, în număr de patru. Dintre aceştia, cel mai mic se numea MARCU şi avea vârsta de 15 ani. Acesta a fost pus să înveţe ingineria în ţară însă nu s'a ţinut de şcoală şi pe la 1855—57, a fost trimis de fratele său la Paris de unde s'a întors inginer de Poduri şi Sosele. A fost şi el antreprenor de lucrări publice.

Este foarte probabil ca acest MARCU GIURCOVICI să fie elevul despre care se vorbeşte în raportul lui C. CANTACUZINO şi de la care să fi rămas şi caeţelele.

I. S. A.

Răspuns la cererea No. 246. Ca răspuns la cererea No. 246 din No. 8, pot comunica următoarele:

Exisă două ediţii ale Aritmeticii lui A. TEODORESCU, ambele tipărite în 1839. Ele au textul indentic şi se deosibesc numai prin aceea că o ediţie e tipărită în rânduri mai lungi şi cu spaţii mai mari între ele, ceeace face ca numărul paginilor să fie diferit de al celeilalte. Pe de altă parte ediţia mai larg tipărită nu conţine în josul copertei cuvintele: *Supt inspecţia* D. GHERMANOS „ARCHIMANDRIT". E curioasă apariţia acestor două ediţii într'un an! Seminarul matematic al Universităţii din Iaşi posedă în Bibliotecă câte un exemplar din ambele ediţii.

A fi foarte interesante şi ceva date despre ANDREI TEODORESCU.

A. MYLLER

In *Istoria Seminarului «Veniamin» din Iaşi,* publicată de D-l G. ADAMESCU în 1904 cu ocaziunea centenarului *Seminarului dela Socola* (numit în urmă *Veniamin,* în cinstea Mitropolitului VENIAMIN COSATCHE care l'a înfiinţat, găsim că ANDREIU TEODORESCU a fost numit profesor de aritmetică la 1834 la acel Seminar şi că a fost înlocuit la 1842, împreună cu Directorul Şcoalei şi cu alţi profesori. Tot acolo mai găsim că văduva lui, CASANDRA, primea în 1860 pensiunea de 400 lei lunar din Bugetul Mânăstirii şi al Seminarului, aşa că ANDREI TEODORESCU a murit înainte de acel an.

ANDREI TEODORESCU a mai predat şi geografia şi filosofia. El a fost un profesor care şi-a făcut datoria, nu numai ca profesor, ci şi ca un bun român doritor de a răspândi cultura la noi în ţară. Aceasta reese în mod clar din discursul pe care l'a ţinut învăţatul Episcop de Roman MELCHISEDEC la Semicentenarul Academiei Mihăilene în 1885:

«Vecinica pomenire încă la doi profesori ai Seminarului: unul mirean ANDREI TEODORESCU, *şi altul preot* ICONOMUL CONSTANTIN. *Cel dintâiu preda lecţii din matematică, filosofie şi geografie; seara preda gratis, fără a fi dator şi fără a fi în programa Seminarului, limba franceză elevilor care la promovarea lui, au arătat dorinţa de a învăţa; ear noaptea până după miezul nopţii târziu traducea feliurite cărţi ştiinţifice şi literare din limba franceză şi care toate sunt depuse în biblioteca Seminarului Fratelui său — pentru devotamentul cel mare către biserică şi către ştiinţa bisericească. El, prin faptă şi cuvânt a insuflat elevilor săi iubirea şi devotamentul către biserica noastră românească. De aceia, încă odată vecinica lor pomenire!».*

Se spune că ADREI TEODORESCU ar fi învăţat aritmetica la Bucureşti, la cursurile lui ION HELIADE RĂDULESCU.

Mă unesc şi eu cu cererea D-lui A. MYLLER ca viaţa şi opera acestui înaintaş al culturii noastre naţionale să fie cercetată şi dată publicităţii, până se mai pot găsi urme din activitatea lui.

I. IONESCU.

DIVERSE

In cursul lunii Aprilie, Societatea Română de Matematice a ţinut următoarele şedinţe: La 8 Aprilie au comunicat: D-l S. STOILOV, despre *«Spaţiul topologic şi suprafeţele lui Riemann»,* D-l P. SERGESCU, despre: *«Câteva aplicaţii ale unei teoreme a lui* VAN VLECK.

La 15 Aprilie au comunicat: D-l CR. MATEESCU despre: *«O problemă de vizibilitate»* şi D-l MIRON NICOLESCU despre: *«Rezolvirea directă a câtorva probleme de frontieră pentru funcţiunile armonice şi biarmonice, într'o sferă».*

Sporirea Bibliotecii.

Legendre. Elemente de Geometrie după *Legendre.* Tipărită cu cheltuiala din casa Schoalelor naţionale pentru scholarii ce urmează acest curs în Colegiul din Sf. Sawa. Bucureşti. In Tipografia lui ELIAD.
Donată de D-l Inginer G. STAMATESCU.

B. E. COUSINERY. Géométrie élémentaire du compas, exposant les divers Systhèmes de Tracé que comporte l'emploi exclusif du Compas, tant les rigoureux que les approximatifs pour servir de prolégomènes au *«Rapporteur de précision»*. Paris 1851.
Donată de D-l I. IONESCU, inginer.

Societatea Română de Ştiinţe. Buletinul de ştiiţe matematice pure şi aplicate. Anii 1923, 1924 şi 1925.
Donate de *Secţiunea matematică a Societăţii Române de Ştiinţe.*

Bulletin mathématique de la Société roumaine des Sciences. Anii 30, 31 şi 32.
Donate de *Societatea română de Ştiinţe, Secţiunea matematică.*

Bulletin of the Calcata Mathematical Society. Anul XXII 2, 3, 4.
Donată de D-l Maior I. LINTEŞ.

M. LEBRUN: Application de la soudure électrique à l'arc.
Donată de D-l Maior I. LINTEŞ.

Sitzungsberichte. Band 139. Heft. 3–8.
Donată de D-l Maior I. LINTEŞ.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1307. *Fie* $p = 2q + 1$ *un număr prim fără soţ. Să se arate că cele* $2q$ *rădăcini ale ecuaţiei:*

$$(1) \qquad x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0$$

pot fi reprezentate prin formulele

$$x_i' = \frac{P(y_i)\, z' + Q(y_i)}{P_2(y_i)\, z' + Q_1(y_i)} \text{ şi } x_i'' = \frac{P(y_i)\, z'' + Q(y_i)}{P_1(y_i)\, z'' + Q_1(y_i)}\ ^{1)},$$

$$i = 1, 2, 3 \ldots q,$$

1) In loc de

$x_i' = P(y_i)\, z' + Q(y_i)$, $x_i'' = P(y_i)\, z'' + Q(y_i)$ cum era în enunţ.

în care: y_i reprezintă rădăcinile ecuației ce se deduce din (1), *punând* $x + \frac{1}{x} = y$; *z' și z'' rădăcinile unei ecuații de forma* $z^2 + z + a = 0$, *a fiind un număr întreg;* $P(y_i)$, $Q(y_i)$, $P_1(y_i)$, $Q_1(y_i)$ *polinoame întregi în raport cu* y_i.

A. G. IOACHIMESCU.

Ecuația (1) de gradul $p - 1 = 2q$ are două rezolvante, una de gradul q și una de gradul 2, sau una de gradul 2 și una de gradul q. Prima categorie de rezolvante se formează imediat punând în ecuația (1) $x + \frac{1}{x} + y$, ecuația (1) poate fi scrisă

$$x^{2q} + x^{2q-1} + \ldots + x^q + \ldots + x + 1 = 0$$

sau

$$\left(x^q + \frac{1}{x^q}\right) + \left(x^{q-1} + \frac{1}{x^{q-1}}\right) + \ldots + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0,$$

dar

$$x + \frac{1}{x} = y\ ,\ x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \ldots x^{h+1} + \frac{1}{x^{h+1}}$$

$$= \left(x^h + \frac{1}{x^h}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{h-1} + \frac{1}{x^{h-1}}\right) \ldots$$

ceeace transformă ecuația precedentă într'o ecuație în y de gradul q cu coeficienți întregi; fie

$$(2) \qquad f(y) = 0$$

această ecuație, care împreună cu ecuația

$$(3) \qquad x^2 - yx + 1 = 0,$$

reprezintă un sistem de rezolvante care ne dă cele $2q$ rădăcini ale ecuației (1).

Un al doilea sistem de rezolvante, de gradul 2 și de gradul q, îl vom obține dacă considerăm o rădăcină α a ecuației (1) și o rădăcină primitivă r a numărului prim p, rădăcinile ecuației (1) vor fi

$$\alpha^{r^0},\ \alpha^{r^1},\ \alpha^{r^2} \ldots \alpha^{r^{2q-1}}.$$

Să formăm ecuația care are ca rădăcini pe

$$z' = \alpha^{r^0} + \alpha^{r^2} + \alpha^{r^4} + \ldots + \alpha^{r^{2(q-1)}}$$

și

$$z'' = \alpha^{r^1} + \alpha^{r^3} + \alpha^{r^5} + \ldots + \alpha^{r^{2q-1}},$$

avem

$$z' + z'' = \alpha^{r^0} + \alpha^{r^1} + \ldots + \alpha^{r^{2q-1}} = -1, \quad z'z'' = \Sigma\, \alpha^{r^{2h}+r^{2k+1}}$$

sub semnul Σ fiind q^2 termeni. Pentru calculul sumei precedente vom distinge 2 cazuri: *a*) impar, atunci q din termenii de sub Σ sunt egali cu 1, căci exponentul lui α din z' fiind de forma r^{2h}, iar al unuia din z'' de forma r^{2k+1}, care îl putem înlocui r^{2l+q}, q fiind impar, produsul

$$\alpha^{r^{2h}} \cdot \alpha^{r^{2h+q}} = \alpha^{r^{2h}+r^{2h+q}} = \alpha^{r^{2h}(1+r^q)} = 1$$

de oare ce $r^q = -1$; ceilalți $q^2 - q$ termeni reprezintă, reproduse de câte $\dfrac{q^2-1}{2q}$, cele $2q$ rădăcini ale ecuației (1), a căror sumă este -1, deci

$$z'z'' = q - \frac{q^2 - q}{2q} = \frac{q+1}{2} = a,$$

număr întreg; *b*) q par, atunci cele q^2 produse din $z'z''$ sunt toate rădăcini ale ecuației (1), nici unul nu este egal cu 1, ele reproduc cele $2q$ rădăcini ale ecuației de câte $\dfrac{q^2}{2q} = \dfrac{q}{2} = a$ ori, a întreg. Ecuația în z va fi:

$$z^2 + z + \frac{q+1}{2} = 0,$$

pentru q impar și

$$z^2 + z + \frac{q}{2} = 0,$$

pentru q par: în toate cazurile ecuația în z va fi

$$z^2 + z + a = 0, \ a \text{ întreg.} \tag{4}$$

A doua rezolvantă va fi o ecuație în x de gradul q, care are ca rădăcini puterile lui α din grupul care dă pe z' sau z''; ea va fi de forma

$$(5) \qquad \varphi(x) = x^q + A_1 x^{q-1} + \ldots + Aq = 0,$$

$A_1, A_2 \ldots Aq$ fiind polinoame întregi în raport cu z' sau z'' pe care le putem forma.

Rezolvarea ecuației (1) se va putea face, fie prin sistemul (2) și (3), fie prin sistemul (4) și (5).

Ecuațiile (3) și (5) au o rădăcină comună și una singură, pe care o putem găsi prin operații de împărțire între polinomul $\varphi(x)$ și polinomul $x^2 - yx + 1$; aceste 2 polinoame vor avea un divizor comun de gradul întâi de forma $Ax - B$, A și B polinoame în raport cu y și z, deducem că o rădăcină x_i' a ecuației date, care corespunde la un y_i și z' va fi de forma:

$$x_i' = \frac{B(y_i, z')}{A(y_i, z')};$$

dar puterile z' mai mari ca 1, le putem reduce în baza ecuației (4) la forma $mz' + n$, căci

$$z'^2 = -z' - a, \; z'^3 = -z'^2 - az' = z' + a + az' \ldots,$$

în definitiv $B(y_i, z')$ va fi de forma $P_i(y_i)\, z' + Q(y_i)$, iar $A(y_i, z')$ de forma $P_1(y_i)\, z' + Q_1(y_i)$. Deasemenea când înlocuim pe z' prin z''. Deci putem scrie:

$$x_i' = \frac{P(y_i)\, z' + Q(y_i)}{P_1(y_i)\, z' + Q_1(y_i)}, \quad x_i'' = \frac{P(y_i)\, z'' + Q(y_i)}{P_1(y_i)\, z'' + Q(y_i)}.$$

D. GEORGESCU.
Profesor, Pitești

PROBLEMA 1892. *Fie* $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma x_i^2 - \Sigma x_i x_k$ *se cere să se determine un număr întreg* n, *așa încât să avem:*

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} - x_n, x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} - x_{n-1} + x_n, \ldots - x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = nf(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

A. G. IOACHIMESCU.

Fie $a_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1} - x_i + x_{i+1} + \ldots + x_n$,

$a = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $A = \Sigma x_i^2$, $B = \Sigma x_i x_k$

$a_i = a - 2x_i$, iar $f(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} - x_n \ldots)$

$= f(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n) = \Sigma a_i^2 - \Sigma a_i a_k$,

dar $a_i^2 = (a - 2x_i)^2 = a^2 - 4ax_i + 4x_i^2$;

deducem:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 = \Sigma (a^2 - 4ax_i + 4x_i^2)$$

$$= na^2 - 4a \cdot a + 4A = (n-4)a^2 + 4A,$$

apoi

$$a_i a_k = (a - 2x_i)(a - 2x_k) = a^2 - 2a(x_i + x_k) + 4x_i x_k,$$

iar

$$\Sigma a_i a_n = \frac{n(n-1)}{2} a^2 - 2a \Sigma (x_i + x_k) + 4B = \tfrac{1}{2} n(n-1) a^2$$

$- 2(n-1)a^2 + 4B$, căci $\Sigma (x_i + x_k) = (x_1 + x_2) + (x_1 + x_3) + \ldots$

$+ (x_1 + x_n) + (x_2 + x_3) + \ldots + (x_2 + x_n) + \ldots + (x_{n-1} + x_n)$

$= (n-1)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$,

deci $\Sigma a_i a_k = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-4)a^2 + 4B$,

iar

$$\Sigma a_i^2 - \Sigma a_i a_k = (n-4)a^2 + 4A - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-4)a^2 - 4B$$

$$= -\tfrac{1}{2}(n-3)(n-4)a^2 + 4A - 4B.$$

Condițiunea impusă de problemă fiind:

$$f(a_1, a_2, \ldots a_n) = \Sigma a_i^2 - \Sigma a_i a_k = n f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$= n \Sigma x_i^2 - n \Sigma x_i x_k = nA - nB,$$

deducem că trebue să avem indentic:

$$-\tfrac{1}{2}(n-3)(n-4)a^2 + 4A - 4B = nA - nB \quad \therefore$$

$$(n-4)[A - B + \tfrac{1}{2}(n-3)a^2] = 0 \quad \therefore \quad n = 4,$$

care e soluția problemei.

Paranteza mare egalată cu zero nu ne dă pentru n valori independente de $x_1, x_2, \ldots x_n$.

IOAN C. VASILIU.
Șc. Politechnică București.

PROBLEMA 2111. *Ştiind că o lampă incandescentă electrică are o consumaţie specifică iniţială* k *waţi/lumânare şi intensitate luminoasă la care după un timp* t *devine* α I *(cu* $\alpha < 1$*) şi ştiind, că consumaţia totală a lămpii în waţi rămâne constantă cu timpul, iar între* t, α *şi* k *există relaţia*

$$t = \lambda (1 - \alpha) k^n$$

în care λ, k *şi* n *sunt constante pentru aceeaşi lampă, să se găsească pentru o clădire în care se întrebuinţează 60 lămpi de 50 lumânări şi 30 lămpi de 100 lumânări, caracterizate toate prin*

$$\lambda = 6000 \text{ şi } n = 6$$

(t *fiind exprimat în ore*)*:*

1. *Care vor trebui să fie valorile lui* α *şi* k *a lămpilor, pentru care costul luminatului pe lumânare oră va fi minim pentru fiecare din cele două tipuri de lampă.*

2. *La ce interval de timp vor trebui lămpile înlocuite, admiţând că ele ard 6 luni câte 12 ore pe zi şi 6 luni câte 8 ore pe zi.*

3. *Care este în aceeaşi ipoteză de minim, costul luminatului anual al clădirei, în cazul că preţul energiei electrice este 65 bani pe kilowatt-oră, iar al lămpilor de 50 lumânări 1,50 lei şi al celor de 100 lumânări 2 lei una.*

C. I. BUDEANU.

1. Consumaţia iniţială a lămpilor este $K \frac{\text{Wat}}{\text{lumânare}}$.

Notăm preţul energiei prin $c \frac{\text{lei}}{k \text{ W oră}}$ iar preţul lămpilor prin g lei pe bucată.

Intre timpul t (în ore) de funcţionare a lămpilor şi factorul α avem conform enunţului

$$(1) \qquad t = \lambda (1 - \alpha) k^n .$$

Intrucât intensitatea luminoasă iniţială este I lumânări, iar după un timp t este α I lum., rezultă în timpul t o intensitate luminoasă medie, dat fiind variaţia liniară a lui I în funcţie de t, de $\frac{1 + \alpha}{2}$. I lum.

In consecință consumația medie a lămpilor în timpul t devine $\frac{2\,K}{1+\alpha}\ \frac{\text{Watt}}{\text{lum.}}$.

Prețul iluminatului pentru fiecare lampă se exprimă, în $\frac{\text{lei}}{\text{lum. oră}}$, prin

$$(2) \qquad p = p_1 + p_2 \quad \text{în care}$$

p_1 referitor la cosumația de energie este

$$(3) \qquad p_1 = \frac{2k}{1+\alpha}\ \frac{\text{Wat}}{\text{lum.}} \times c\ \frac{\text{lei}}{k\ \text{W. oră}} = \frac{2kc}{1000\,(1+\alpha)}\ \frac{\text{lei}}{\text{lum. oră}}$$

p_2 referitor la costul lămpilor este:

$$(4) \qquad p_2 = \frac{g\ \text{lei}}{\frac{1+\alpha}{2}\ \text{I. lum.} \times t\ \text{ore}} = \frac{2g}{(1+\alpha)\,\text{I}\,t}\ \frac{\text{lei}}{\text{lum. oră}}.$$

Inlocuind pe t prin valoarea sa din (1), valoarea lui p (relația 2) devine:

$$(5) \qquad p = p_1 + p_2 = \left[\frac{2kc}{1000\,(1+\alpha)} + \frac{2g}{(1-\alpha^2)\,\lambda k^n\,\text{I}}\right]\frac{\text{lei}}{\text{lum. oră}}.$$

Valorile α și k care ne conduc la minimum lui p ne sunt date prin sistemul de ecuații a derivatelor lui p în funcție de α și k.

$$(6) \qquad \begin{cases} p'_k = \dfrac{2c}{1000\,(1+\alpha)} - \dfrac{2gn}{(1-\alpha^2)\,\lambda\,k^{n+1}\,\text{I}} = 0 \\ p'_\alpha = -\dfrac{2kc}{1000\,(1+\alpha)^2} + \dfrac{4g\alpha}{(1-\alpha^2)^2\,\lambda\,k^n\,\text{I}} = 0 \end{cases}$$

ceeace ne conduce la:

$$(7) \qquad k = \sqrt[n+1]{\frac{1000gn\,(n+2)}{2\lambda c\text{I}}} \quad \text{și} \quad \alpha = \frac{n}{n+2}.$$

Pentru cazul particular a valorilor $n = 6$ și $\lambda = 6000$ date prin enunț avem:

$$(7') \qquad k = \sqrt[7]{\frac{4g}{c\text{I}}} \quad \text{și} \quad \alpha = 0{,}75\,.$$

Pentru lămpile de $I = 50$ lum. și dat fiind $g = 1{,}50$ lei și $c = 0{,}65 \frac{\text{lei}}{k\ \text{W. oră}}$ găsim consumația inițială optimă

$$(8) \quad k_1 = \sqrt[7]{\frac{4 \times 1{,}50}{0{,}65 \times 50}} = 0{,}78556 \sim 0{,}786 \frac{\text{wat}}{\text{lum.}}$$

iar pentru lămpile $I = 100$ lum. cu $g = 2$ lei

$$(8') \quad k_2 = \sqrt[7]{\frac{4 \times 2}{0{,}65 \times 100}} = 0{,}74135 \sim 0{,}741 \frac{\text{wat}}{\text{lum.}}$$

α are în ambele cazuri valoarea de la (7') de 0,75, adică lămpile se vor utiliza până ce intensitatea luminoasă va fi ajuns la 75% din acea inițială.

2) Ținând seama de (7), (7'), (8) și (8') timpul de durată este: Pentru lămpile de 50 lum.:

$$(9) \quad t_1 = 6000 \times 0{,}25 \times \overline{0{,}786}^6 = 352{,}52 \text{ ore.}$$

Pentru lămpile de 100 lum.:

$$(9') \quad t_2 = 6000 \times 0{,}25 \times \overline{0{,}741}^6 = 249{,}02 \text{ ore.}$$

Notând cu z_1 numărul de zile cât lampa arde în lunile de câte 12 ore pe zi și cu z_2 numărul de zile în lunile de câte 8 ore pe zi, rezultă:

Că pentru lămpile de 50 lum. numărul total de zile z este caracterizat prin sistemul

$$(10) \quad \begin{cases} z = z_1 + z_2 \\ 352{,}52 = 12 z_1 + 8 z_2 . \end{cases}$$

In particular dacă ne găsim numai în lunile de 12 ore de funcționare pe zi, $z = z_1 = \frac{352{,}52}{12} = 29{,}376$ zile, iar numai în lunile de 8 ore de funcționare pe zi $z = z_2 = \frac{352{,}52}{8} = 44{,}065$ zile.

Analog pentru lămpile de 100 lum. avem sistemul:

$$(11) \quad \begin{cases} z = z_1 + z_2 \\ 249{,}02 = 12 z_1 + 8 z_2 \end{cases}$$

cu cazurile particulare.

In lunile de 12 ore pe zi, $z = z_1 = \frac{249{,}02}{12} = 20{,}75$ zile.

In lunile de 8 ore pe zi, $z = z_2 = \frac{249{,}02}{8} = 31{,}127$ zile.

3. Luminatul pe oră cu o lampă de o intensitate luminoasă inițială I lum. ținând seama de (2), (3), (4), revine la:

$$(12)\quad P = (p_1 + p_2)\ \frac{\text{lei}}{\text{lum. oră}}\ \frac{1+\alpha}{2}\ \text{I lum.} = \left[\frac{k\ c\ I}{1000} + \frac{g}{t}\right]\frac{\text{lei}}{\text{oră}}.$$

Pentru cele două categorii de lămpi, ținând compt de datele problemei și de (8), (8'), (9) și (9') avem:

$$(13)\quad \begin{cases} P_1 = \dfrac{0{,}786 \times 0{,}65 \times 50}{1000} + \dfrac{1{,}50}{352{,}52} = 0{,}0298\ \dfrac{\text{lei}}{\text{oră}} \\ P_2 = \dfrac{0{,}741 \times 0{,}65 \times 100}{1000} + \dfrac{2}{249.02} = 0{,}0562\ \dfrac{\text{lei}}{\text{oră}}. \end{cases}$$

Aci P_1 se referă la lămpile de 50 lum. și P_2 la lămpile de 100 lum.

Repartizând numărul total de zile ale anului în 182 zile (6 luni) cu o funcționare de 12 ore pe zi și 183 zile (6 luni) cu o funcționare de 8 ore pe zi, costul total al iluminatului clădirii pe an revine la:

$$(14)\quad C = (182 \times 12 + 183 \times 8)(60 \times 0{,}0298 + 30 \times 0{,}0562)$$

$$C = 12673{,}15 \text{ lei}.$$

Observație. — Toate prețurile în lei de mai sus se referă la situația dinainte de 1916, când s'a dat problema.

C. B.

PROBLEMA 2837. *Să se rezolve ecuația:*

$$|\,2 - 3e^{2ix}\,| = \left|\frac{1 + e^{2ix}}{1 - e^{ix}}\right| + \sin\frac{x}{2},$$

unde $i = \sqrt{-1}$ *și* e *baza logaritmilor neperieni.*

V. ALACI.

Ţinând seamă de formula lui EULER :

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin \alpha , \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

putem scrie :

$$2 - 3e^{2ix} = 2 - 3 \cos 2x - 3i \sin 2x$$

$$\frac{1 + e^{2ix}}{1 - e^{ix}} = \frac{1 + \cos 2x + i \sin 2x}{1 - \cos x - i \sin x} .$$

Modulul unei cantităţi imaginare, fiind suma patratelor părţei reale şi a coeficientului părţii imaginare, putem scrie :

$$(1) \quad |2 - 3e^{2ix}| = \sqrt{(2 - 3\cos 2x)^2 + 9 \sin^2 2x}$$

$$= \sqrt{13 - 12 \cos 2x} = \sqrt{13 - 12 (\cos^2 x - 1)}$$

$$= \sqrt{25 - 24 \cos^2 x}$$

$$(2) \quad \left|\frac{1 + e^{2ix}}{1 - e^{ix}}\right| = \frac{\sqrt{(1 + \cos 2x)^2 + \sin^2 2x}}{\sqrt{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x}}$$

$$= \frac{\sqrt{2 (1 + \cos 2x)}}{\sqrt{2 (1 - \cos x)}} = \frac{\cos x}{\sin \frac{x}{2}} .$$

In virtutea relaţiilor (1) şi (2), ecuaţia dată devine :

$$\sqrt{25 - 24 \cos^2 x} = \frac{\cos x}{\sin \frac{x}{2}} + \sin \frac{x}{2} ,$$

sau :

$$25 - 24 \cos^2 x = \frac{\left(\cos x + \sin^2 \frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\left(\cos x + \frac{1 - \cos x}{2}\right)^2}{\frac{1 - \cos x}{2}} = \frac{(\cos x + 1)^2}{2 (1 - \cos x)} .$$

De aci deducem :

$$2\,(1 - \cos x)\,(25 - 24\,\cos^2 x) = \cos^2 x + 2\,\cos x + 1.$$

Efectuând calculele, obținem ecuația :

$$48\,\cos^3 x - 49\,\cos^2 x - 52\,\cos x + 49 = 0,$$

în care notând :

$$\cos x = u,$$

obținem :

$$(3) \qquad f(u) = 48u^3 - 49u^2 - 52u + 49 = 0.$$

Această ecuație nu are rădăcini întregi și observând că :

u	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(u)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$

conchidem că ea are o singură rădăcină convenabilă pentru $u = \cos x$, cuprinsă între 0 și 1, pe care ne propunem s'o calculăm cu aproximație de 0,001.

Pentru aceasta observând că :

$$f(0{,}5) = 16{,}75 \quad , \quad f(1) = -4,$$

înseamnă că :

$$0{,}5 < u < 1.$$

Apoi fiindcă :

$$f(0{,}8) = 0{,}616 \quad , \quad f(0{,}9) = -2{,}498,$$

rezultă :

$$0{,}8 < u < 0{,}9.$$

Folosind acum metoda lui NEWTON și observând că derivata 2-a,

$$f''(u) = 288u - 98,$$

este pozitivă în intervalul de mai sus, punând :

$$u = 0.8 + h,$$

avem :

$$h = -\frac{f(0{,}8)}{f'(0{,}8)} = -\frac{48 \times 0{,}8^3 - 49 \times 0{,}8^2 - 52 \times 0{,}8 + 49}{144 \times 0{,}8^2 - 98 \times 0{,}8 - 52}$$

$$= \frac{0{,}616}{38{,}24} = 0{,}016,$$

unde cifra sutelor este exactă, deci :

$$u = 0{,}8 + 0{,}01 = 0{,}81,$$

care este valoarea rădăcinei căutate, cu aproximaţie de 0,01.

Pentru a avea acum această rădăcină cu aproximaţie de 0,001, folosim încă odată metoda lui NEWTON, şi avem :

$$u = 0{,}81 + h_1,$$

unde :

$$h_1 = -\frac{f(0{,}81)}{f'(0{,}81)} = -\frac{48 \times 0{,}81^3 - 49 \times 0{,}81^2 - 52 \times 0{,}81 + 49}{144 \times 0{,}81^2 - 98 \times 0{,}81 - 52}$$

$$= -\frac{0{,}240268}{36{,}9016} = 0{,}006 \ldots$$

Rezultă acum că rădăcina căutată cu aproximaţie de 0,001, este :

$$u = 0{,}816 = \cos x.$$

Căutând acum în tabele, de exemplu tabelele lui DUPUIS, la liniile trigonometrice naturale, găsim cu uşurinţă

	Pentru :	819 ...	35^0
	»	814 ...	35,30′
Atunci	»	5 ...	30′
Deci	»	3 ...	18′

Rezultă :

$x = 35^0{,}18'$ şi mai general : $x = 2k\pi \pm 35^0{,}18'$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Soluţii date de D-nii : C. BERDAN (Bârlad), EMIL MANOLESCU şi GHEORGHE D. POPESCU (lic. Internat, Iaşi).

V. A.

PROBLEMA 3169. *Să se determine forma generală a polinoamelor* $P_0, P_1, P_2, \ldots$ *aşa încât să avem*

$$(1) \qquad P_n^2 - P_{n+1} P_{n-1} = x^{2n}$$

P_n *fiind un polinom de gradul* n *în* x.

A. ANGELESCU.

Soluția. Să căutăm o relație de recurență lineară între trei polinoame consecutive. Eliminând pe x^n, între (1) și relația ce se capătă din aceasta înlocuind pe n prin $n+1$, avem

$$P_{n+1}^2 - P_n\, P_{n+2} = x^2\,(P_n^2 - P_{n+1}\, P_{n-1})$$

de unde

$$(2)\qquad P_{n+1}\,(P_{n+1} + x^2\, P_{n-1}) = P_n\,(P_{n+2} + x^2\, P_n)$$

în care făcând pe $n = 1, 2, \ldots, n$ și înmulțind între ele relațiile căpătate găsim

$$P_{n+1}\,(P_2 + x^2\, P_0) = P_1\,(P_{n+2} + x^2\, P_n)$$

$$(3)\qquad P_1\, P_{n+2} - (P_2 + x^2\, P_0)\, P_{n+1} + x^2\, P_1\, P_n = 0.$$

Distingem mai multe cazuri după valorile lui P_0 și P_1.

I. $P_0 = 0$. Dacă facem în (1) $n = 1$ avem $P_1^2 = x^2$ sau $P_1 = \pm x$.

1. — $P_1 = x$. Tot din (1) făcând $n = 2$ găsim

$$P_2^2 - x\, P_3 = x^4$$

ceeace arată că P_2 se divide prin x și deci va fi de forma

$$P = x\,(ax + b)$$

ar (3) se mai scrie

$$P_{n+2} - (ax + b)\, P_{n+1} + x^2\, P_n = 0$$

relație care ne dă imediat funcția generatoare a acestor polinoame folosind un articol al D-lui Prof. A. ANGELESCU (G. M., XXX, 163). Găsim

$$(4)\qquad \frac{xy}{1 - (ax+b)\,y + x^2y^2} = P_0 + y\,P_1 + \ldots + y^n\,P_n + \ldots$$

unde presupunem

$$|\,(ax + b)\,y - x^2\,y^2\,| < 1.$$

Însă

$$(5)\qquad \frac{xy}{1 - (ax+b)\,y + x^2y^2} = xy\,\{1 + [(ax + b)\,y - x^2\,y^2] + [(ax + b)\,y - x^2\,y^2]^2 + \ldots\}$$

care comparată cu (4) ne dă

$$(I)\quad P_n = x[(ax+b)^{n-1} - C_{n-2}^1\,(ax + b)^{n-3}\,x^2 + C_{n-3}^2\,(ax + b)^{n-5}\,x^4 - \ldots]$$

2. — $P_1 = -x$. In mod analog se găseşte

$$(II)\quad P_n = (-1)^n x\,[(ax+b)^{n-1} - C^1_{n-2}(ax+b)^{n-3}x^2 + C^2_{n-3}(ax+b)^{n-5}x^4 - \ldots]$$

II. $P_0 = c \neq 0$. Facem două ipoteze asupra lui P_1.

1. — $P_1 \neq 0$, fie: $P_1 = ax + b$. Relaţia (3) se mai scrie

$$(3')\qquad \frac{P_2 + x^2 P_0}{P_1} P_{n+1} = P_{n+2} + x^2 P_n;$$

însă, în baza lui (1)

$$P_1^2 - cP_2 = x^2$$

cu ajutorul căreia (3') devine

$$(3'')\qquad \frac{\dfrac{(ax+b)^2 - x^2}{c} + cx^2}{ax+b} \cdot P_{n+1} = P_{n+2} + x^2 P_n.$$

Cum partea a doua este un polinom, va trebui să fie şi prima parte tot un polinom. Ori acest lucru se poate întâmpla în mai multe feluri. Dacă $a \neq 0$, adică numitorul conţine pe x, atunci sau se simplifică fracţia (care are loc când $b = 0$ sau $c^2 = 1$), sau $ax + b$ divide pe P_{n+1}. Apoi este cazul $a = 0$ când prima parte este în totdeauna un polinom. Să le examinăm pe rând.

α) $a \neq 0$, $b = 0$. Relaţia dintre trei polinoame consecutive este

$$ac\,P_{n+2} - (a^2 + c^2 - 1)\,x\,P_{n+1} + acx^2 P_n = 0$$

unde punând

$$\frac{a^2 + c^2 - 1}{ac} = A$$

se scrie sub forma

$$P_{n+2} - Ax\,P_{n+1} + x^2 P_n = 0.$$

In baza articolului citat funcţia generatoare a acestor polinoame va fi

$$(6)\qquad \frac{c + (a - cA)\,xy}{1 - Axy + x^2y^2} = P_0 + P_1 y + \ldots + P_n y^n + \ldots$$

unde vom presupune

$$|\,Axy - x^2y^2\,| < 1.$$

Dar

$$\frac{c+(a-cA)\,xy}{1-Axy+x^2y^2}=[c+(a-cA)\,xy][1+(Axy-x^2y^2)+(Axy-x^2y^2)^2+\ldots]$$

care comparată cu (6) ne dă

$$P_n=[c(A^n-C^1_{n-1}A^{n-2}+C^2_{n-2}A^{n-4}-\ldots)+(a-cA)(A^{n-1}-C^1_{n-2}A^{n-3}+C^2_{n-3}A^{n-5}-\ldots)]\,x^n$$

care se mai scrie în baza unei relații cunoscute între combinări:

$$\text{(III)}\quad P_n=[a(A^{n-1}-C^1_{n-2}A^{n-3}+C^2_{n-3}A^{n-5}-\ldots)-c(A^{n-2}-C^1_{n-3}A^{n-4}+C^2_{n-4}A^{n-6}-\ldots)]\,x^n$$

β) $a\neq 0$, $c=1$. Relația dintre trei polinoame consecutive este

$$(3'_1)\qquad P_{n+2}-(ax+b)P_{n+1}+x^2P_n=0$$

deci au funcția generatoare

$$\frac{1}{1-(ax+b)y+x^2y^2}=P_0+P_1y+P_2y^2+\ldots+P_ny^n+\ldots$$

în care presupunem

$$|(ax+b)y=x^2y^2|<1$$

și ținând seamă de (4) în care suprimăm factorul xy, se găsește

$$\text{(IV)}\quad P_n=(ax+b)^n-C^1_{n-1}(ax+b)^{n-2}x^2+C^2_{n-2}(ax+b)^{n-4}x^4-\ldots$$

γ) $a\neq 0$, $c=-1$. În mod analog ca la cazul precedent se găsește imediat

$$\text{(V)}\quad P_n=(-1)^n[(ax+b)^n-C^1_{n-1}(ax+b)^{n-2}x^2+C^2_{n-2}(ax+b)^{n-4}x^4-\ldots].$$

δ) $a=0$. Relația (3″) devine

$$\frac{\frac{b^2-x^2}{c}+cx^2}{b}P_{n+1}=P_{n+2}+x^2P_n$$

unde făcând $n=0$, 1 ne dă

$$P_2=\frac{b^2-x^2}{c},\quad P_3=\frac{b^2+(c^2-1)x^2}{bc}\cdot\frac{b^2-x^2}{c}-bx^2.$$

Cum însă P_3 trebue să fie cel mult de gr. III, va trebui să avem $c^2 = 1$, şi relaţia de recurenţă devine

$$\pm b P_{n+1} = P_{n+2} + x^2 P_n$$

care arată că în acest caz, cum $P_0 = \pm 1$ şi $P_1 = b$, polinoamele se capătă din (IV) şi (V) făcând $a = 0$.

2. — $P_1 = 0$. Făcând în (1) pe $n = 1$ găsim

$$-c P_2 = x^2$$

şi apoi $n = 2$:

$$P_2^2 = x^4 \qquad P_2 = \pm x^2$$

adică $c = \pm 1$.

α) $c = 1$. Cum relaţia (3) este identic verificată, o înlocuim cu aceea ce se capătă din (2) în care-l facem pe n egal cu n, $n - 1, \ldots,$ 2. Făcând calculele necesare, se găseşte relaţia de recurenţă

$$P_3 P_{n+1} = x^2 P_{n+2} + x^4 P_n \qquad (n \geqslant 2). \tag{7}$$

Să arătăm că P_3 se divide cu x^2. Intr'adevăr făcând aci pe $n = 2$ găsim

$$P_3 P_4 = x^2 P_5 + x^4 P_4 .$$

Cum partea a doua se divide cu x^2 însemnează că şi prima se divide cu x^2. Avem trei posibilităţi:

P_3 se divide cu x^2 şi afirmarea este adevărată;

P_3 se divide numai cu x. Atunci P_4 se divide şi el cu x. Dar din (1) scoatem

$$P_3^2 + x^2 P_4 = x^6 \tag{1'}$$

care ne spune că P_3^2 se divide cu x^3 şi cum P_3 este polinom va trebui ca x^2 să dividă pe P_3;

P_4 se divide cu x^2. Atunci (1') ne spune imediat că şi P_3 se va divide cu x^2.

Rezultă că putem pune

$$P_3 = x^2 (ax + b)$$

şi (7) se mai poate scrie

$$(ax + b) P_{n+1} = P_{n+2} + x^2 P_n \qquad (n \geqslant 2) \tag{7'}$$

care este identică cu $(3'_1)$. Rezultă de aci că aceste polinoame sunt

(VI) $\qquad 1\ ,\ 0\ ,\ -x^2\ ,\ x^2(ax+b),\ldots$

şi $P_n\ (n>2)$ se capătă din P_{n-2} dat de (V) prin înmulţirea cu $-x^2$.

β) Se găseşte ca şi la cazul precedent că şirul polinoamelor este

(VII) $\qquad -1\ ,\ 0\ ,\ x^2\ ,\ x^2(ax+b),\ldots$

şi $P_n\ (n>2)$ se deduce din P_{n-2} date de (IV) prin înmulţirea cu x^2.

Observări. 1. Printre polinoamele găsite se găsesc două cazuri interesante.

Dacă facem în (4): $a=2,\ b=0$ găsim

$$\frac{xy}{(1-xy)^2}=P_0+yP_1+\ldots+y^nP_n+\ldots$$

de unde se citeşte că

(I') $\qquad P_n=nx^n\ .$

Dacă în (7') luăm $a=b=0$ avem

$$P_{n+2}=-x^2P_n$$

ceeace ne spune că şirul devine

(VI') $\qquad P_{2p}=(-1)^p\,x^{2p}\ ,\ P_{2p+1}=0.$

2. Comparând polinoamele (I') cu forma (I) deducem identitatea

$$2^{n-1}-C^1_{n-2}\,2^{n-3}+C^2_{n-3}\,2^{n-5}-\ldots=n.$$

GH. TH. GEORGHIU.

A rezolvat problema şi D-l M. MĂNESCU.

PROBLEMA 4123. *Suma a trei numere de acelaş număr de cifre, formată din cifrele primelor şase patrate perfecte, este un patrat perfect a cărei rădăcină este cuprinsă între ultimele două patrate din cele şase.*

Care sunt soluţiunile problemei?

SUB.-LOCOT. I. C. SAVIN.

Cifrele primelor şase patrate perfecte sunt:

1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 9

adică *nouă* cifre, cu care deci nu se pot forma decât numere de câte *trei* cifre.

Fie acum:

$$a_1b_1c_1 \quad ; \quad a_2b_2c_2 \quad ; \quad a_3b_3c_3$$

cele trei numere care se pot forma, atunci, conform enunţului, avem:

1) $$a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_3 = N^2$$

unde $$25 < N < 36$$

adică $$276 \leqslant N^2 \leqslant 1225.$$

Relaţiunea 1) se mai poate scrie:

2) $$100 \cdot A + 10 \cdot B + C = N^2$$

unde avem:

$$A = a_1 + a_2 + a_3$$
$$B = b_1 + b_2 + b_3$$
$$C = c_1 + c_2 + c_3.$$

Deasemenea observăm că:

3) $$A + B + C = 37$$

unde:

$$5 \leqslant A \leqslant 12$$
$$4 \leqslant B \leqslant 21$$
$$4 \leqslant C \leqslant 21.$$

Prin urmare, dacă suma tuturor cifrelor cu care formăm cele trei numere este *37*, înseamnă că, scăzând *1* din acea sumă, obţinem un *M3*, cu alte cuvinte, va trebui să avem:

4) $$N^2 - 1 = M3.$$

In aceste condiţiuni, dând lui N^2 valori cuprinse între 25^2 şi 36^2, vom deduce uşor valorile lui A şi C, iar din *3* vom deduce pe B, adică avem:

N^2	676				784				841			
A	5		6		6		7		7		8	
C	6	16	6	16	4	14	4	14	11	21	11	21
B	—	16	—	15	—	17	—	16	19	9	18	8

961				1024				1156				1225			
8		9		9		10		10		11		11		12	
10	20	10	20	4	14	4	14	6	16	6	16	5	15	5	15
19	9	18	8	—	14	—	13	21	11	20	10	21	11	20	10

Cu aceste rezultate putem face următoarele grupări posibile:

Nº	676	784	1225			
A	1, 1, 3	1, 2, 3	1, 1, 9	1, 4, 6	2, 3, 6	2, 4, 5
C	2, 5, 9 4, 6, 6	1, 4, 9 —	— 3, 6, 6	— 1, 5, 9	— 1, 5, 9	— 3, 6, 6
B	4, 6, 6 2, 5, 9	5, 6, 6 —	— 2, 4, 5	— 2, 3, 6	— 1, 4, 6	— 1, 1, 9

lar prin permutări circulare obținem toate soluțiunile, care sunt:

— pentru 676 avem 54 soluțiuni

— » 784 » 27 »

— » 1225 » 108 »

In total deci problema admite:

$$54 + 27 + 108 = 189$$

soluțiuni.

I. L.

A rezolvat problema trimițând:

$$5 + 8 + 12 = 25$$

soluțiuni D-l V. CEAUȘESCU.

PROBLEMA 4258. *Să se determine* U_n *dat de relația de recurență*

$$(n - 2)\, U_n = n\,(U_{n-1} - a) \qquad \textit{pentru } n = 1, 2, 3 \ldots n$$

unde a *este o constantă și presupunând* $U_0 = 0$.

TH. ANGHELUȚĂ.

Au rezolvat problema D-ra DORINA FABIUS şi D-nii: D. D. MAVRODIN, M. I. PREDOESCU, I. I. PETRESCU.

Soluţie. Dacă în relaţia de recurenţă dată facem întâi

$$n = 1$$

se găseşte

$$U_1 = a,$$

ţinând seamă că u_0 este dat egal cu zero. Făcând apoi

$$n = 2.$$

Se vede că egalitatea obţinută este identic satisfăcută; oricare ar fi U_2. Prin urmare U_2 rămâne arbitrar.

Inlocuind pe n prin 3 în relaţia obţinută, avem pe U_3 şi aşa mai departe, putem din aproape în aproape, calcula un termen U_n de un rang oarecare, în funcţie de n de U_1 şi U_2. Problema este de a determina această expresie a lui U_n.

Pentru aceasta scriem relaţia dată sub forma următoare:

$$\frac{n-2}{n} U_n = U_{n-1} - U_1 .$$

Dând lui n valorile 3, 4, 5, ..., $n-1$, n obţinem următorul şir de egalităţi

$$\frac{1}{3} U_3 = U_2 - U_1$$

$$\frac{2}{4} U_4 = U_3 - U_1$$

$$\frac{3}{5} U_5 = U_4 - U_1$$

. . . . . .

$$\frac{n-3}{n-1} U_{n-1} = U_{n-2} - U_1$$

$$\frac{n-2}{n} U_n = U_{n-1} - U_1.$$

Ca să găsim valoarea lui U_n trebue să eliminăm între egalităţile precedente pe U_3, U_4, U_5, ... U_{n-1}. In acest scop vom

înmulți: a doua egalitate cu $\frac{1}{3}$; a 3-a cu $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4}$; ... penultima cu $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{n-4}{n-2}$ și ultima cu $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{n-3}{n-1}$. Adunând apoi egalitățile astfel obținute, membru cu membru găsim,

$$\frac{1.2.3\ldots(n-3)\ (n-2)}{3.4.5\ldots(n-1)\ n} U_n = U_2 - U_1\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.4} + \ldots + \frac{1.2.3\ldots(n-3)}{3.4.5\ldots(n-1)}\right].$$

Coeficientul lui U_n este $\frac{2}{(n-1)\ n}$; iar factorul care înmulțește pe U_1 se poate scrie

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.4} + \ldots + \frac{1.2.3\ldots(n-3)}{3.4.5\ldots(n-1)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \ldots + \frac{2}{(n-2)\ (n-1)}.$$

In egalitatea

$$\frac{1}{(n-2)\ (n-1)} = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1},$$

făcând succesiv

$$n = 5, 6, \ldots, n$$

și adunând egalitățile obținute găsim

$$\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots + \frac{1}{(n-2)\ (n-1)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{n-1}.$$

Revenind la egalitatea care ne dedea U_n o putem scrie prin urmare,

$$\frac{2}{(n-1)\ n} U_n = U_2 - U_1\left(1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{n-1}\right).$$

De unde deducem valoarea lui U_n căutată,

$$U_n = \frac{n(n-1)}{2} U_2 - n(n-2) U_1 .$$

Se putea determina U_n, după cum au făcut corespondenții noștri, calculând din aproape în aproape pe U_3, U_4, ... și inducând din aceste expresii legea de formare a coeficienților lui U_2 și U_1. Am preferat metoda dată, ea fiind mai puternică ca instrument de calcul.

PROBLEMA 4451. *Se cer două perechi de numere consecutive, astfel ca suma să fie formată numai din două cifre identice.*

I. IONESCU

Fie a, $(a+1)$; $(b-1)$, b cele două perechi de numere consecutive. Conform enunțului suma lor va fi:

$$S = 2(a+b) = 11m \leqslant 99 \qquad (1)$$

Membrul întâiu fiind divizibil cu 2 și membrul al doilea va trebui să fie divizibil cu 2; deci:

$$n = 2m. \qquad (2)$$

Egalitatea (1) devine:

$$a + b = 11m \leqslant 44. \qquad (3)$$

De aici rezultă:

$$m = 1, 2, 3, 4, \qquad (4)$$

sau:

$$a + b = 11, 22, 33, 44.$$

Putem, deci, forma tabloul numerelor cerute după cum urmează:

a	$a+1$	$m=4$; $a+b=44$ S = 88		$m=3$; $a+b=33$ S = 66		$m=2$; $a+b=22$ S = 44		$m=1$; $a+b=11$ S = 22	
		$b-1$	b	$b-1$	b	$b-1$	b	$b-1$	b
0	1	43	44	32	33	21	22	10	11
1	2	42	43	31	32	20	21	9	10
2	3	41	42	30	31	19	20	8	9
3	4	40	41	29	30	18	19	7	8
4	5	39	40	28	29	17	18	6	7
5	6	38	39	27	28	16	17	5	6
6	7	37	38	26	27	15	16		
7	8	36	37	25	26	14	15		
8	9	35	36	24	25	13	14		
9	10	34	35	23	24	12	13		
10	11	33	34	22	23	11	12		
11	12	32	33	21	22				
12	13	31	32	20	21				
13	14	30	31	19	20				
14	15	29	30	18	19				
15	16	28	29	17	18				
16	17	27	28	16	17				
17	18	26	27						
18	19	25	26						
19	20	24	25						
20	21	23	24						
21	22	22	23						
Nr. soluţiilor distincte		22		17		11		6	
		Total 56 soluţii distincte.							

Soluţiile din prima linie sunt formale.

ALEXANDRU D. STOICA
(Lic. „Marele Voevod Mihai", Bucureşti).

Au mai rezolvat problema şi D-nii: I. SAGER şi V. GRIGORESCU.

EXERCIŢII

36. ABC fiind un triunghiu dreptunghiu, cercul cu centrul A, tangent în T ipotenuzei BC, tae laturile AB, AC în B', C'.

Dacă B'' , C'' sunt punctele în care paralelele, duse prin B' , C' la BC, tae respectiv catetele AC şi AB, există egalitatea:

$$\overline{AB''} + \overline{AC''} = \overline{BC}.$$

C. IONESCU-BUJOR.

Fie a, b, c trei numere date, cărora li se asociază şirul de medii proporţionale

$$\sqrt{bc} \ , \ \sqrt{ca} \ , \ \sqrt{ab}. \tag{1}$$

A patra proporţională a numerelor (1) luate în ordinea

$$\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ca}} = \frac{\sqrt{ab}}{X} \tag{2}$$

este $X = a$, adică primul număr al şirului dat.

Se consideră şirul

$$\overline{TC} \ , \ \overline{TB} \ , \ \overline{BC}$$

pentru care şirul (1) este

$$\overline{AB} \ , \ \overline{AC} \ , \ \overline{AB'}.$$

A patra proporţională a acestor segmente luate în ordinea (2) este segmentul $\overline{AB''}$, iar după cele precente, $\overline{TC}$.

Deci

$$\overline{AB''} = \overline{TC}.$$

Analog se consideră şirul

$$\overline{TB} \ , \ \overline{TC} \ , \ \overline{BC}$$

pentru care şir (1) este

$$\overline{AC} \ , \ \overline{AB} \ , \ \overline{AC'}.$$

A patra proporţională a acestor segmente luate în ordinea (2) este segmentul $\overline{AC''}$, iar după proprietatea iniţială, $\overline{TB}$.

Urmează

$$\overline{AB''} + \overline{AC''} = \overline{BC}.$$

37. Ecuaţia

$$2a^2 - 5b^2 = 6$$

e imposibilă în numere întregi.

M. G.

R. Se mai poate scrie $2(a^2 - 3) = 5b^2$, unde primul membru e prim cu 5

PROBLEME PROPUSE

2536 [1]). Prin vârfurile A, B, C ale unui triunghiu descriem câte două cercuri cu raze respectiv x, X ; y, Y ; z, Z. Să se arate că dacă centrele radicale ale cercurilor x, y, z şi X, Y, Z sunt simetrice faţă de centrul cercului EULER, atunci avem relaţiunea:

$$x^2 + X^2 + a^2 = y^2 + Y^2 + b^2 = z^2 + Z^2 + c^2.$$

D. PERIEŢEANU.

4523. Se scriu două numere de două cifre unul după altul. Putem forma astfel două numere de patru cifre. Poate fi unul din acestea multiplu al celuilalt?

I. IONESCU.

4524. In orice triunghiu avem relaţiunea:

$$a(b + c)\, r_a + b(c + a)\, r_b + c(a + b)\, r_c = 4p^2R.$$

V. THÉBAULT.

4525. Să se construiască un triunghiu ABC înscris în cercul O, cunoscând diferenţa a două laturi, unghiul format de ele şi un punct oarecare M de pe latura a treia.

PROFESOR PETRE TROFIMOV.

4526. Fie A_b şi A_c proecţiunile vârfului A al triunghiului ABC respectiv pe bisectoarele unghiurilor B şi C. Analog se obţin punctele B_c , B_a , C_a , şi B_b .

---

1) Se publică din nou enunţul problemei 2536 căreia nu i s'a dat încă soluţia. Problema rezolvată la pag. 165 Vol. XXIII sub Nr. 2536 este de fapt problema 2535 căreia i s'a mai publicat soluţia sub numărul adevărat la pag. 259 Vol. XXVIII.

Relaţiile de demonstrat în enunţul problemei 2536 publicat la pag. 287 Vol. XXII erau

$$x^2 + y^2 + a^2 = y + Y^2 + y^2 + b^2 = z^2 + Z^2 + c^2.$$

Consideraţiuni de simetrie impun rectificarea dată mai sus. Rezolvitorii vor căuta să dovedească care e adevărata relaţiune cerută de autorul problemei.

$A_1B_1C_1$ fiind triunghiul format de dreptele $A_b\,A_c$, $B_c\,B_a$ şi $C_a\,C_b$, să se arate că:

1°. Triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt ortologice;

2°. Dreapta ce uneşte centrele lor de ortologie trece prin centrul de greutate ale triunghiului ABC.

THEODOR G. COCEA.

4527. Se consideră un triunghiu ABC înscris într'un cerc de centru O. Se mai consideră punctul D, simetricul lui A în raport latura BC, şi cercurile (B), (C) cu centrele în B, C şi trecând prin punctele A şi D.

Dreapta AO întâlneşte cercurile (B) şi (C) respectiv în E , F. Tangenta în E la cercul (B) întâlneşte perpendiculara, coborîtă din D pe AB, în L; iar tangenta în F la cercul (C) întâlneşte perpendiculara, coborîtă din D pe AC, în punctul K.

Să se arate că dreptele AO şi LK sunt perpendiculare.

N. BOTEA.

4528. Dacă într'un patrulater complect o latură trece prin centrul cercului circumscris triunghiului ABC format de celelate trei laturi, atunci punctele comune cercurilor descrise pe diagonalele patrulaterului ca diametre se găsesc unul ω pe cercul ABC, celălalt ω' pe cercul celor nouă puncte ale triunghiului ABC.

G-L. GH. I. POPESCU.

4529. Să se rezolve sistemul:

$$(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) = a_1$$
$$(x_2 + x_3)(x_3 + x_4) = a_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(x_{n-1} + x_n)(x_n + x_1) = a_{n-1}$$
$$(x_n + x_1)(x_1 + x_2) = a_n .$$

CHIRIŢĂ MIHAIL.

4530. Să se determine pentru $n = \infty$, limita expresiunii:

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n-p}} - C_p^1 \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-p-1}} + C_p^2 \frac{(n-1)^{n-2}}{(n-2)^{n-p-2}} + \ldots + (-1)^p \frac{(n-p+1)^{n-p}}{(n-p)^{n-2p}},$$

p fiind un număr întreg şi pozitiv fix.

M. GHERMĂNESCU.

4531. Se cere relaţia care leagă unghiul τ, ce-l fac în spaţiu două drepte concurente D_1 şi D_2 de înclinaţii cunoscute φ_1 şi φ_2, cu proecţia lui pe un plan oarecare. Să se discute.

GH. VASILIU.

4532. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$x^6 - 3x^4 + 308x^3 - 397x^2 + 484x + 615 = 0$$

ştiind că are o rădăcină de forma $a + b\sqrt{-2}$, unde a şi b sunt numere întregi.

TIBERIU POPOVICIU.

4533. Să se calculeze

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}$$

G-L GH. BUICLIU.

4534. Intr'un plan vertical se consideră două puncte A şi B, aşezate pe aceeaşi orizontală şi la distanţa $2l$ unul de celălalt. Din aceste două puncte se suspendă de două fire grele, flexibile, inextensibile, egale şi de lungime λ, o bară grea de lungimea $2a$ $(2a < 2l)$. Să se studieze cum variază poziţia de echilibru când se schimbă greutatea barei.

R. VOINAROSKY.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aioanei R. (4456); *Amărăşteanu F. M.* (4349, 85, 86, 414, 520); *Anonim* (4419); *Antonescu N. Filofteia* (4444, 520); *Apostol V. R.* (4354, 456, 520); *Bădescu Em. A.* (4454, 56); *Bălăceanu Angela* (4379, 421); *Belloiu N. Const.* (4520); *Blaga I. Em.* (4388); *Bogdan Gr. I.* (4305, 08, 44, 78, 456, 93); *Bucur V.* (4456, 93); *Buzincu I. I.* (4378, 79); *Caracudovici Margareta,* (4496); *Cojocaru I. P.* (4305, 78, 88, 456, 93, 520); *Cornăţeanu A.* (4456); *Costescu C.* (4368, 456, 93); *Cristea Gh. E.* (4450, 520); *Dimitriu C. C. I.* (4368, 456); *Enache Iordache* (4305, 444, 56, 93); *Enăşescu D.* (4456); *Florescu L. Victor* (4459, 520); *Gavrilescu N. Const.* (4520); *Herbay Emil* (4520); *Jipa Gh.* (4456); *Mănac M.* (4456); *Metea V.* (4456); *Mihalcea St. D-tru* (4305, 09, 30, 59, 79, 493); *Musceleanu Dacia* (4471); *Năstase Marin* (4447); *Negrea Leonte Mircea* (4425, 71, 520, 21); *Postelnicescu C. M.* (4456); *Siara V.* (4456); *Ştefănescu D. N.* (4379, 407, 506, 20); *Stoica D. Al.* (4472, 520); *Stoicescu F.* (4376, 87, 496); *Streder I.* (4409, 44); *Tarasiuc S.* (4521); *Thébault V.* (A, P); *Ţiţeica I. I.* (4455, 71, A); *Vasilache I. Gh.* (4456).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia V* (sub presă).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“
Casa Gazeta Matematică
Calea Griviţei No. 158
Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceiaş adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN (Telefon 4-3929).**

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XL

NUMĂRUL 11. — IULIE 1935

BIBLIOTECA CENTRALĂ SIBIU

SUMARUL

1. Spiru C. Haret . . . . . *A. G. Ioachimescu.*
2. Triangle bordé de triangles équilatéraux. *V. Thébault.*
3. Vechile geometrii românești . . . . . *I. Ionescu.*
4. Note matematice: 46 — 49.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 247.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 2309, 2860, 4147, 4276, 4388, 4403, 4431, 4434, 4499.
9. Exerciții: 38 — 41.
10. Probleme propuse: 4535 — 4546.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1935

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 11, 12, 18, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 66, 70, 80, 84, 89, 91, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 16, 17, 26, 38, 41, 42, 45, 49, 52, 58, 61, 64, 65, 66, 68, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 94, 95, 97, 98, 500, 01, 03, 04, 05, 08, 09, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela „*Gazeta Matematică*" cu preţul de 12 lei.

SPIRU C. HARET

In ziua de 9 Iunie 1935 s'a desvelit la Bucureşti statuea lui SPIRU C. HARET, ridicată din iniţiativa unui comitet, format în special de profesori din toate treptele învăţământului. La această iniţiativă s'a asociat şi „*Gazeta Matematică*".

HARET a fost numit cu drept cuvânt „*Omul şcoalei*", iar locul cel mai potrivit, pentru aşezarea statuii lui, era în faţa Universităţii lângă marii apostoli ai culturii neamului românesc, GHEORGHE LAZĂR şi IOAN ELIADE RĂDULESCU, aşa cum s'a şi făcut.

Nu poate să fie chestiunea aici a face o dare de seamă asupra activităţii lui HARET, pe diferite terenuri; mă voiu mărgini numai la câteva episoade, în legătură mai de aproape cu matematicele şi cu *Gazeta Matematică*, care ar interesa pe tinerii noştri cititori [1]).

HARET este autorul legii prin care învăţământul, în cursul superior de liceu, era despărţit în clasic, real şi modern. Această reformă, realizată în 1897, şi care, în ceeace priveşte învăţământul ştiinţific, a dat rezultate foarte bune, a durat peste 30 de ani, când s'a revenit la vechiul liceu integral. Mulţi sunt de părere că revenirea nu a fost fericită. Noi cei dela «G. M.» ştim precis că, pe când liceul HARET, dădea un însemnat număr de elemente bine pregătite la partea ştiinţifică, azi numărul lor s'a redus foarte mult şi, după cum mulţi profesori au avut ocazia să constate, lipsa unei pregătiri ştiinţifice mai serioase, nu a fost compensată printr'o pregătire mai solidă în alte domenii.

HARET, care urmărea orice activitate culturală din ţară, s'a interesat întotdeauna şi de activitatea *Gazetei Matematice*. Odată neprimind exact la 15 ale lunii revista noastră, deşi era ministru foarte ocupat, s'a interesat imediat dacă nu cumva revista şi-a încetat apariţia! Prin 1898 unii directori de licee luase dispoziţia să oprească intrarea oricărei reviste sau ziar în şcolile ce conduceau, printre revistele oprite era şi G. M.; ducându-ne atunci la

1) Comitetul de iniţiativă al statuii şi comemorării lui HARET, a publicat o vastă lucrare, în mai multe volume, cuprinzând întreaga activitate ştiinţifică, şcolară şi extraşcolară a lui HARET. In primul volum D-l PROF. G. ADAMESCU, fostul său secretar general la minister, a publicat o biografie amănunţită a lui HARET. De asemenea în Volumul XVIII al „G. M". s'a publicat o biografie şi o dare de seamă asupra activităţii sale ştiinţifice.

HARET, care era ministru, şi expunându-i cazul, H. a dat imediat o circulară ridicând oprirea făcută şi abonând aproape toate liceele şi şcolile secundare la G. M. Tot după propunerea lui HARET, Societatea G. M. a fost recunoscută prin parlament, ca persoană morală şi juridică. (A se vedea G. M. Vol. XVI, pag. 161). În 1907, cu ocazia împlinirii a 25 ani de activitate didactică a lui HARET şi a D-lui DAVID EMANUEL, revista noastră a închinat un număr special acestei aniversări, în care H. a publicat un interesant articol de amintiri din viaţa sa de şcoală (Numărul G. M. de pe Aprilie 1907).

Ca profesor HARET era de o exactitate absolută. Imi amintesc că în ziua de 13 Martie 1907, în toiul răscoalelor ţărăneşti, când mulţi erau foarte îngrijoraţi de situaţia ţării, la ora 8 dimineaţa HARET era în cancelaria universităţii spre a-şi face obişnuita lecţiune, iar peste câteva ore depunea jurământul de ministru. Când ieşea din minister îşi relua activitatea profesorală, ca şi cum nu ar fi părăsit-o niciodată, cu acelaşi calm şi regularitate desăvârşită; niciodată nu a refuzat vre-o însărcinare şcolară, chiar când unele din aceste însărcinări aveau puţin aerul de şicană politică. HARET a fost un mare om al ţării din toate punctele de vedere! El a murit la Decemvrie 1912 în vârstă de 62 ani. Unul din meritele sale cele mai de seamă, este că a contribuit în largă măsură la pregătirea sufletească a marei mase a poporului, care ne-a condus la unitatea naţională. Păcat că el nu a avut parte să vadă acest mare eveniment!

A. G. IOACHIMESCU.

TRIANGLE BORDÉ DE TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX

1. Notations. Soient α_1, β_1, γ_1, et α_2, β_2, γ_2, les centres des cercles circonscrits aux triangles équilatéraux A_1BC, B_1CA, C_1AB et A_2BC, B_2CA, C_2AB construits extérieurement ou intérieurement à un triangle ABC inscrit dans un cercle (O); A_m, B_m, C_m et A_h, B_h, C_h les milieux des côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ et les pieds des hauteurs $AA_h = h_a$, $BB_h = h_b$, $CC_h = h_c$.

Soient M_a, M_b, M_c et M'_a, M'_b, M'_c les intersections des côtés BC, CA, AB, avec les droites $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$, et $A\alpha_2$, $B\beta_2$, $C\gamma_2$, N_a, N_b, N_c et N'_a, N'_b, N'_c les points de rencontre des mêmes côtés avec les médiatrices des côtés des triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$; Q_a, Q_b, Q_c et Q'_a, Q'_b, Q'_c les milieux de B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, et B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2, y_a, y_b, y_c les projections orthogonales des points Q_a, Q_b, Q_c, puis α'_1, β'_1, γ'_1 celles des points A_1, B_1, C_1 sur BC, CA, AB, D_1 la projection du point B_1 sur γ'_1C_1.

2. Les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont orthologiques, l'un des centres d'orthologie étant le point O. Dès lors, leurs triangles complémentaires $A_m B_m C_m$, $Q_a Q_b Q_c$ sont aussi orthologiques, et l'un des centres d'orthologie coïncide avec le complémentaire du point O, par rapport au triangle fondamental, c'est-à-dire avec le centre O_9 du cercle des neuf points de ce dernier triangle. Les points y_a, y_b, y_c coïncident donc avec les milieux des segments rectilignes $A_m A_h$, $B_m B_h$, $C_m C_h$, et

$$(1)\quad A_m y_a = \tfrac{1}{2} A_m A_h,\ B_m y_b, = \tfrac{1}{2} B_m B_h,\ C_m y_c = \tfrac{1}{2} C_m C_h.$$

Considérant, par exemple, les sommets des rectangles semblables, de centres α_1, β_1, γ_1, qui bordent extérieurement le triangle fondamental, on obtient facilement

$$(2)\quad \beta'_1B_1 = \tfrac{1}{2}(h_a + A_h C\sqrt{3}),\ \gamma'_1C_1 = \tfrac{1}{2}(h_a + BA_h\sqrt{3});$$

d'où

$$(3)\quad \gamma'_1 C_1 - \beta'_1B_1 = \tfrac{1}{2}(BA_h - A_h C)\sqrt{3} = A_m A_h\sqrt{3} = D_1C_1$$

$$(4)\quad \gamma'_1 C_1 + \beta'_1B_1 = \tfrac{1}{2} a\sqrt{3} + h_a = 2 y_a Q_a$$

$$(5)\quad \gamma'_1\beta'_1 = \gamma'_1A_h + A_h B'_1 = \tfrac{1}{2} a + h_a\sqrt{3}.$$

Des égalités

$$(6)\qquad \frac{A_m M_a}{M_a A_h} = \frac{\alpha_1 A_m}{A_h A} = \frac{a\sqrt{3}}{6h_a},$$

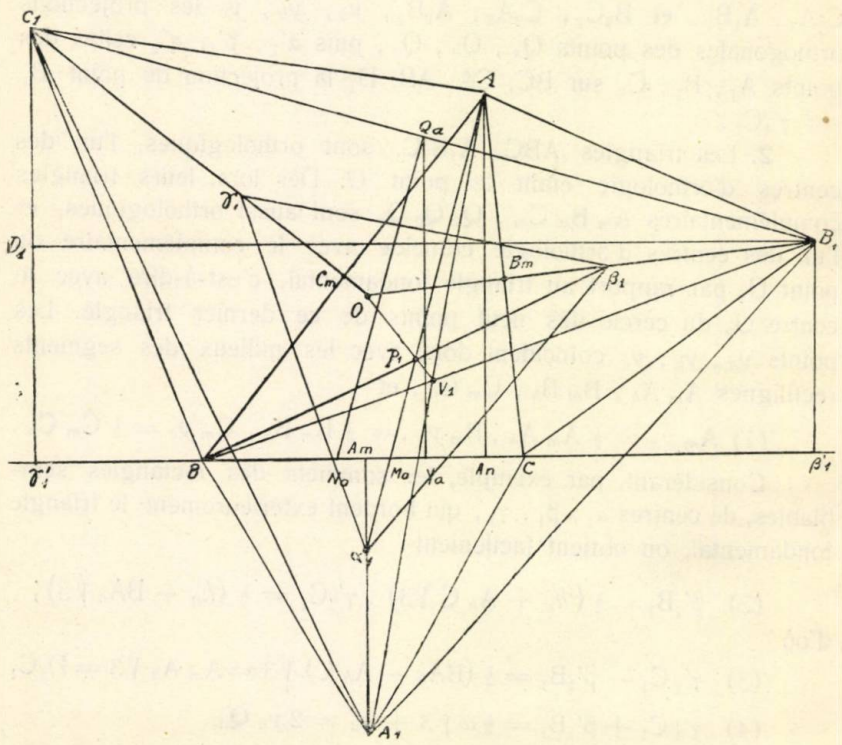
$$\frac{A_m M_a}{A_m M_a + M_a A_h} = \frac{A_m M_a}{A_m A_h} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}+6h_a},$$

on déduit que

$$(7)\qquad A_m M_a = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}+6h_a} \cdot A_m A_h.$$

D'autre part, les triangles rectangles semblables $N_a Q_a Y_a$ et $B_1 D_1 C_1$ donnent, en vertu de (3),

$$(8) \qquad \frac{N_a y_a}{D_1 C_1} = \frac{y_a Q_a}{B_1 D_1} = \frac{y_a Q_a}{\beta'_1 \gamma'_1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} a \sqrt{3} + h_a\right)}{\frac{1}{2} a + h_a \sqrt{3}},$$



puis

$$(9) \qquad N_a y_a = \frac{y_a Q_a \cdot D_1 C_1}{\beta'_1 \gamma'_1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} a \sqrt{3} + h_a\right)}{\frac{1}{2} a + h_a \sqrt{3}} \cdot A_m A_h \sqrt{3}$$

$$= \frac{3a + 2 h_a \sqrt{3}}{2\left(a + 2 h_a \sqrt{3}\right)} \cdot A_m A_h ,$$

d'où

$$N_a A_m = N_a y_a - A_m y_a = N_a y_a - \tfrac{1}{2} A_m A_h$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3} + 6 h_a} \cdot A_m A_h = A_m M_a .$$

Par analogie, $B_m M_b = N_b B_m$, $C_m M_c = N_c C_m$, et les points M_a et N_a, M_b et N_b, M_c et N_c sont *isotomiques* sur les côtés BC, CA, AB. Un raisonnement analogue prouve que les points M'_a et N'_a, M'_b et N'_b, M'_c et N'_c jouissent de la même propriété et l'on peut énoncer ce théorème :

Sur les côtés d'un triangle ABC *on construit extérieurement* ou intérieurement *les triangles équilatéraux* A_1BC, B_1CA, C_1AB.

Les médiatrices des côtés du triangle A, B, C, *rencontrant les côtés du triangle* ABC *aux points* N_a, N_b, N_c, *les droites* AN_a, BN_b, CN_c, *concourent aux réciproques des points de rencontre* P_1, P_2 *des droites joignant les points* A, B, C, *aux centre des cercles* A_1BC, B_1CA, C_1AB [1]).

En vertu des relations (7) et (9), si φ et θ désignent les angles $\alpha_1 M_a B$ et $y_a N_a Q_a$,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha_1 A_m}{A_m M_a} = \frac{a\sqrt{3} + 6 h_a}{6 A_m A_h} = \frac{y_a Q_a}{N_a y_a} = \operatorname{tg}\theta ,$$

et $\varphi = \theta$. *Les droites* $Q_a N_a$ *et* $A\alpha_1$ *sont donc parallèles* et il en est de même pour les droites $Q_b N_b$ et $B\beta_1$, $Q_c N_c$ et $C\gamma_1$.

On montre de la même manière que les droites $Q'_a N'_a$ et $A\alpha_2$, $Q'_b N'_b$ et $B\beta_2$, $Q'_c N'_c$ et $C\gamma_2$ sont parallèles.

Par suite, *le centre* P_1 (ou P_2) *d'homologie des triangles* ABC *et* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ (ou $\alpha_2\beta_2\gamma_2$) *coïncide avec l'un des centres d'orthologie des triangles* ABC et $A_1B_1C_1$ (ou $A_2B_2C_2$).

Comme les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ (ou $A_2B_2C_2$) sont à la fois homologiques et orthologiques, le centre d'homologie étant le centre *isogone* V_1 (ou V_2) relatif au triangle fondamental, d'après un théorème de P. SONDAT [2]), *les points* P_1 (ou P_2), O, V_1 (ou V_2) *sont collinéaires. Les axees d'homologie sont perpendiculaires aux droites* OV_1, OV_2.

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

1) J. NEUBERG. M. AD. MINEUR en a donné une solution analytique (*Mathesis*, 1928 — 127, en utilisant les coordonnées barycentriques des points P_1, P_2 données par J. NEUBERG (*Mathesis*, 1923 — 451).

2) *Intermédiaire des mathématiciens*, 1894 — 18.

VECHILE GEOMETRII ROMÂNEŞTI

(Conferinţă ţinută la Societatea Română de Ştiinţe, Secţiunea matematică, în ziua de 10 Iunie 1935)

Este sigur că oarecare cunoştinţe de *geometrie practică* aveau vechii noştri *hotarnici* şi *vădrarii* cari se ocupau cu *cotitul vaselor;* însă despre cunoştinţe de *geometrie teoretică* nu avem urme până în secolul XVII. D-l N. IORGA a găsit notiţele de şcolar ale lui CONSTANTIN CANTACUZINO STOLNICUL, din care reies că acesta a învăţat *„Elementele lui* EUCLIDE" în 1667 la Padova, cu Profesorul Veronez VALERIANO BONVICINO, la cursul de *„Filosofie extraordinară"*.

In 1644 VASILE LUPU înfiinţează la Iaşi o *Academie* pentru învăţături înalte, iar în 1678 se înfiinţează o asemenea *Academie* la Bucureşti de către ŞERBAN CANTACUZINO. Aceste şcoli au durat până la Revoluţia din 1821. Limba de predare în aceste Academii erea cea greacă, limba învăţaţilor din Orientul Europei, după cum latina era limba în care se preda şi se tipărea ştiinţa, pe atunci, în Occident. De aceea trebue să considerăm acel învăţământ ca naţional, după cum învăţământul latin şi cărţile latine din Occident se consideră ca învăţământ naţional al ţărilor respective; mai ales că cărţile greceşti de la noi aveau cele mai multe ca autori români macedoneni.

In Academiile din Bucureşti şi Iaşi se dedea mai multă atenţiune gramaticei eline, literaturii şi filosofiei; nu lipseau însă nici cursuri ştiinţifice de *matematică* şi de *fizică*, mai mult sau mai puţin desvoltate, după priceperea şi râvna care o depuneau profesorii din diferitele timpuri. Se dădea mai multă atenţiune *aritmeticii*, la care se ajungea să se studieze şi *logaritmii*, însă mai rar se ajungea să se studieze opera lui EUCLIDE şi a lui ARCHIMEDE. Dela profesorii şi elevii Academiilor greceşti ne-au rămas manuscrise conţinând mai multe părţi din *Elementele de Geometrie ale lui* EUCLIDE, ca de exemplu cursul început de către NICHIFOR TEOTOCHI în anul 1764 şi o traducere a Geometriei franceze a lui VLOD de către ION FORNEIU.

Din tot secolul XVIII nu ne-a rămas, în limba română, niciun manuscris de geometrie sau vreo carte de geometrie tipărită în limba română, pe când cărţi de aritmetică au apărut câteva. In 1795 a

apărut în Tipografia Mitropoliei din Bucureşti a doua ediţie din *Învăţătura pentru măsurarea buţiilor cu cotul*", în 6 foi, aşa că ceva mai înainte trebue să fi apărut ediţia I.

Necesitatea învăţământului Geometriei însă era foarte simţită pe atunci. Mitropolitul IACOB STAMATE, în scrisoarea pe care a trimis-o Domnitorului Moldovei după 1792, atrage în special atenţiunea *„Pentru dascălii de geometrie de practică"*, scriind următoarele :

„Fiind că pre cei fără meşteşug numai pământul îi hrăneşte, şi mai vârtos pre cei mai mulţi ai Moldovei pământeni, din care pricină răsar şi cele din toate zilele sfezi şi judecăţi pentru hotarele moşiilor, urmează dar că de nu ar fi aflat mai înainte geometria Egipţienii tot pentru aceastaşi turburare negreşit trebuia să o afle Dachii, ca să hotărască după regulă pământurile lor. Drept aceia dar au trebuinţă de un hotarnic după meşteşug, şi acesta este dascălul de geometria cea de practică, pe care Franţuzii îl numesc inginer, şi care negreşit trebuie să se aşeze în Academie, paradosind epistimia aceasta în limba franţuzească până când cei ce vor învăţa-o să o ieie pe limba lor».

Arhiereul AMFILOCHIE HOTINIUL, care fusese bursier la Roma, a tipărit la Iaşi câteva cărţi printre care la 1795 *„Elemente aritmetice arătate fireşti"*. Aceasta are un capitol, începând la pagina 131, intitulat *„Pentru aritmetica geometrii"*, căruia îi zice uneori şi *„Geometriceasca aritmetică"*, şi în care se ocupă de *măsuri, figuri geometrice,* de *patrate* şi *rădăcini patrate.* Ca măsuri vorbeşte de *grăunţele de orz,* a cărui mărime îi zice *linie,* de *degete, lat de mână, palmă, pas geometric, picior, prăjină, stadie, verstă, legă, milă italienească* şi *nemţească, piciorul parijului, piciorul romii, piciorul vespian, piciorul moldovenesc, palma domnească.* Lungimile picioarelor sunt date în carte prin linii desemnate de lungimea lor reală.

La punct îi zice şi mai simplu *punt, puntul matematic* şi uneori *pontu.* Definiţia punctului este aceasta :

„O părticică de materie, întru care să închide şi începutul şi sfârşitul de toate aceste urme : lungime, lăţime şi grosime".

„Linia dreaptă este ca o sfoară întinsă între două cuie". Linia mai poate fi *„strâmbă* au *călcată"*, poate fi *„boltită"* sau *„scăfată"* după cum este ca o jumătate de cerc în sus sau în jos.

Liniile drepte se trag cu *îndreptariu* care poate fi *„sfoara cu cretă întinsă.*

Unghiului îi zice *angol,* care poate fi *drept, ascuţit* sau *tâmpit,* (obtuz).

Ca figuri limitate de linii drepte vorbeşte de *triangol,* care poate fi *ecfilater, isocile* sau *scalen.* Ca figuri cu patru laturi vorbeşte de *romboid* (paralelogram), *romb, cfadrat în tocma* sau *rătund* (patratul), *cfadrat lung* (dreptunghiu). Se ocupă de *perpendicolare, oblicfe* sau *aplecate, paralele.*

Găsim apoi cuvintele *cerc, arc, rază, diametru* ca şi azi Razei îi zice însă uneori *semidiametru* sau *dreaptă înmijloacă.* Coarda este *strună.* Găsim însă *grad, minute, secunde* şi *terţi.* El nu utilizează numire specială pentru periferia cercului, căreia la nevoie îi zice *împrejorare.* Aria lui este *faţa* dela un cerc.

Cartea nu are figuri, probabil din lipsa de xilografi la Iaşi pe acele vremuri. Imaginea lor este dată prin nule culese la distanţe convenabile pe diferitele rânduri ale textului cum se arată aci de exemplu pentru *angol, cfădrat lung* şi *romb:*

0	00000	0
0 0	00000	000
0 0	00000	00000
0 0	00000	0000000
0 0	00000	00000
	00000	000
	00000	0

Capitolul aritmeticei geometriei se termină cu: *„Pentru măsurile care se fac într'un vas de câte ocă sau vedre să fie".* Aici autorul exclamă:

„Eu mă minunez cum a găsit omul atâtea meşteşuguri, întâiu acesta de a da cu un băţ în apă şi a şti măsura apii, că este un lucru vrednic de minune?".

Pe la începutul secolului trecut nevoia de ingineri hotarnici şi de ingineri constructori devenise foarte mare. Astfel la 1803 un ardelean «INGINER IONIŢĂ», *„inginer cu ştiinţa meşteşugului acesta desăvârşit"* voind să părăsească ţara, Domnitorul l'a scutit de *„dăjdii şi angerii"*... de *„dijmărit şi vinăriciu..."* de *fumărit şi de căminărit...".* La 1813 GHEORGHE ASACHI deschide la Iaşi şi

la 1818 GHEORGHE LAZĂR la Bucureşti primele şcoli de inginerie cu predarea în limba română. Ei au trebuit să predea şi *cursuri de geometrie*, traduse şi adaptate după cărţi streine şi să stabilească o *nomenclatură matematică română*. Manuscrisul de geometrie al lui LAZĂR, pe care-l predase la Şcoala lui de inginerie şi care se găsea la Academie, s'a pierdut; GHEORGHE ASACHI însă şi-a tipărit cursul lui cu oarecare modificări, abia la 1838.

Din programa cursului de geometrie pe care GHEORGHE LAZĂR a pus-o la începutul manuscrisului lui din 1821: *„Aritmetica Matematicească"*, tipărită de abia în 1924 cu ocazia serbării centenarului morţii lui, şi din *„Trigonometria cea dreaptă"* a lui, tipărită în 1919 de TRAIAN LALESCU în *„Biblioteca Gazetei Matematice"* se poate deduce ce cuprindea geometria lui LAZĂR şi ce termeni întrebuinţa el.

Această geometrie începea cu *„Punerile în geometrie"* în care sunt date *definiţiuni, teoreme, construcţiuni geometrice, măsurători pe teren* şi *ridicări de planuri*. Partea a doua se ocupă de *ariile* figurilor obişnuite, a treia de *măsurarea înălţimilor* pe teren şi a patra *„despre solidometrie"*.

In nomenclatura lui GHEORGHE LAZĂR se resimte graba cu care a trebuit să-şi redigeze cursurile, căci unele numiri româneşti întrebuinţate la început sau românizate, au fost înlocuite mai târziu cu neologisme. La unele se simte influenţa limbii latine pe care o învăţase ca student, la altele a limbii franceze, dela cărţile de care s'a folosit, şi dela termenii care se introduseseră la noi prin cultura franceză, ce începuse să se răspândească ceva înainte; la alte cuvinte se resimte influenţa studiilor lui de inginerie făcute la Viena şi în fine la altele influenţa termenilor greceşti cari se utilizau pe atunci la noi.

Multe cuvinte, adoptate de GHEORGHE LAZĂR, s'au păstrat până azi, ca *punct, linie, dreaptă, unghiu, formă, figură, pătrat, romb, trapez, poligon, înălţime, cerc, rază, diametru, coardă, grad, măsură, arie, plan, prismă, piramidă, cub.* etc. Unele cuvinte şi-au schimbat genul, ca *teorem, problem, catet, ipotez,* etc. Altele şi-au schimbat pluralul, ca *arcuri, cilindri, coni, sferi.* Alte cuvinte se găsesc la GHEORGHE LAZĂR puţin schimbate de cum sunt azi, ca *drept-lini, dreptulinii* şi *dreapteiliniat, egzagon, omologeceşti, sfericesc, scala geometricească,* etc.

La unele elemente geometrice le zicea în mai multe feluri din care ne-a rămas una din ele ca *perpendiculară, perpendicul* şi chiar *„o drept căzătoare“ ; paralelele* erau şi *„drept alergătoare“*, apoi *triunghiu* şi *triangol; paralelogram* şi *romboid; bază* şi *basis; centru, ceantru, chentru,* şi *cheantru ; ipotenus* şi *baeră, paralelipiped* şi *înbriuncetu; cilindru* şi *sul; geometrie* şi *gheometrie,* etc.

Unele cuvinte, chiar bine alese de GHEORGHE LAZĂR, au fost înlocuite în urmă. Astfel *hotărîre* cu definiţie, *vrednicie* cu axiomă, *arătare* cu demonstraţie, *canoane* cu reguli; *învăţ, învăţătură* sau *lămurire* cu explicaţie; *întâmplarea* cu cazul; *pilda* cu exemplu; *potrivirea* cu egalitatea; *asemenea* cu egal; *desfacerea* (triunghiurilor) cu rezolvarea; *puterea* cu valoarea; *cuvântul* cu raport; *den făptură* cu prin construcţie; *figură închipuită* cu figură presupusă; *figura poftită* cu figura căutată, a *scrie* o figură în loc de a descrie; *cap* cu extremitate ; a *slobozi* perpendiculare cu a duce ; *dreaptă prinsă la mijloc* cu dreaptă interceptată; a *împărţi o linie drept în două* prin a o împărţi în părţi egale; *părţi dreapte* cu părţi egale; *curmeziş* cu transversal; *pieziş* sau *piezăşat* cu oblic; *linie diagonalocească* cu diagonală; *înconjurare* cu circumscriere; *împotrivitoare* cu opuse; *tăetoare* cu secantă; *atingătoare* cu tangentă; *faţă* cu suprafaţă; *tăetor* cu sector ; *bucată* cu segment; *pas* cu compas; *masă* cu planşetă; *strâmtoare* cu obstacol; *trup* cu corp sau solid; *temelia* trupurilor cu baza solidelor; *tăetură* cu secţiune; *ciontat* cu trunchiat; *întregimea* unui corp cu volumul lui, etc.

GHEORGHE LAZĂR a făcut economie de termeni matematici, necăutând cuvinte pentru noţiunile rar întrebuinţate în geometrie. Astfel, la el nu găsim cuvinte ca *bisectoară, săgeată, coroană, diedru, triedru,* etc. Alteori el ocoleşte prin mai multe cuvinte introducerea de cuvinte noui. Astfel el zice triunghiului echilateral *„triunghiu asemenea lăturat“* (adică cu laturi egale); triunghiului isoscel îi zice *„triunghiu asemenea piciorat“* (adică cu picioarele egale); zice *cercul pe jumătate* în loc de semicerc; *pătrat lungăreţ* în loc de dreptunghiu, etc.

Dintre cuvinte greceşti el întrebuinţează *analoghia* sau *analogia* pentru proporţie; *analog* pentru proporţional ca în expresiunile *al treilea analog, al patrulea analog, cel de mijloc analog;* apoi

diastemă pentru măsura lungimilor şi *a diastema* pentru a măsura ; *epifanie* pentru arie, *ergalie geometricească* pentru aplicaţiuni, etc.

Cu termenii aleşi de GHEORGHE LAZĂR au continuat învăţământul geometriei elevii lui, în special ION HELIADE RĂDULESCU care a tipărit prima Aritmetică raţionată în Bucureşti la 1832 şi care îşi propusese să tipărească şi o geometrie, dar pe care nu a mai putut-o scoate din cauza multor altor ocupaţiuni ale lui. A apărut însă în 1824 la Buda o *„Învăţătură a măsurării buţilor cu cotul"* şi numai după 10 ani I. VĂLCELEANU tipăreşte la Bucureşti, în tipografia lui ELIAD. *„Otarnicul şi cotitorul român"*.

Prin *Regulamentul Organic* s'a dat o mare atenţiune învăţământului ştiinţific şi în special al matematicelor. Se prevedea predarea geometriei la clasa IV dela *Şcolile începătoare* şi la clasa I a *Şcolilor de învăţături complimentare.* Se cerea aci *geometrie plană, geometrie solidă, trigonometrie dreptliniată* şi *aplicaţiile geometriei* la ridicarea planurilor. Aceasta mai ales la secţia de matematică aplicată la *Şcoala de ingineri civili.* Aceste cerinţi au dus la necesitatea de traducere a unor cărţi de geometrie, practică şi teoretică. De aceea, în 1837, PETRACHE POENARU traduce renumita geometrie franceză a lui LEGENDRE ; în 1838 GHEORGHE ASACHI îşi tipăreşte cursul de geometrie pe care-l predase la Şcoala de inginerie din Iaşi cu unele modificări, iar în 1839 ALEXE MARIN tipăreşte o geometrie practică pentru şcolile rurale. După acestea, până la 1852, nu au mai apărut alte geometrii ci numai unele manuscrise pentru cursurile ce se făceau la şcolile din Bucureşti şi Iaşi sau de către profesorii cari pregăteau în particular pe copiii de boieri. Despre cele trei geometrii apărute în cei trei ani consecutivi, 1837, 1838, 1839 voiu vorbi în Nr. viitor.

I. IONESCU.

NOTE MATEMATICE

46. *Asupra problemei 4123.* Numărul încercărilor de făcut la problema 4123 a cărei soluţie s'a dat la pag. 470 vol. XL se poate restrânge mult, după cum se vede din această notă. Problema 4123 cere ca cu cifrele 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 9 să se formeze 3 numere

$a_1\ b_1\ c_1$, $a_2\ b_2\ c_2$, $a_3\ b_3\ c_3$ a căror sumă să fie un pătrat perfect N^2 cuprins între 25^2 şi 36^2, adică

$$(1) \qquad 625 < N^2 < 1296.$$

Fie $N^2 = xyzu$ acel pătrat în care x nu poate fi, după (1), decât zero sau 1. Conform enunţului avem

$$c_1 + c_2 + c_3 = 10\,\Sigma + u$$

$$\Sigma + b_1 + b_2 + b_3 = 10\,\Sigma' + z$$

$$\Sigma' + a_1 + a_2 + a_3 = 10\,\Sigma'' + y$$

$$\Sigma'' = x$$

de unde prin adunare

$$(2) \qquad 37 = 9\,(\Sigma + \Sigma' + \Sigma'') + u + z + y + x$$

căci suma cifrelor date a_1 , a_2 , ... c_2 , c_3 este 37. Din (2) se deduce

$$(3) \qquad x + y + z + u = 9m + 1.$$

Din cele 10 pătrate care sunt date de (1) numai

$$26^2 = 676 \ ; \ 28^2 = 784 \ ; \ 35^2 = 1225$$

satisfac pe (3), vom încerca deci numai pe acestea şi găsim soluţiile date la pag. 472, Vol. XL.

G-L GH. BUICLIU.

47. *O problemă cu 1935.*

In cele ce urmează îmi propun să studiez şi să rezolv problema:

„Care este cel mai mic număr impar divizibil cu 5 de patru cifre, al cărui indicator de ordinul al doilea este 144“ ?

Ştiind că:

$$\varphi_2(N) = 144 = 2^4 \cdot 3^2$$

înseamnă că:

$$\varphi_1(N) = 2^a \cdot 3^b \cdot (2^{a_1} \cdot 3^{b_1} + 1)\,(2^{a_2} \cdot 3^{b_2} + 1)\,(2^{a_3} \cdot 2^{b_3} + 1)$$

unde $a > 0$ căci $\varphi_1(N)$ este întotdeauna *par,* iar parantezele sunt numere prime.

Dacă $b = 0$ atunci avem:

$$a + a_1 + a_2 + a_3 = 5$$
$$b_1 + b_2 + b_3 = 2.$$

Dacă $b > 0$ atunci avem:

$$a + a_1 + a_2 + a_3 = 4$$
$$b + b_1 + b_2 + b_3 = 3.$$

Ceeace ne arată că unul din exponenţii $b_{1,2,3}$ trebue să fie nul. In aceste condiţiuni valorile pe care le poate lua $\varphi_1(N)$ sunt:

$2^3 \cdot 37 = 296$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$
$2^4 \cdot 19 = 304$	$2^4 \cdot 3^3 = 532$
$2^2 \cdot 7 \cdot 13 = 364$	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 540$
$2 \cdot 5 \cdot 37 = 370$	$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 = 546$
$2^2 \cdot 5 \cdot 19 = 380$	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 = 570$
$2^2 \cdot 3 \cdot 37 = 444$	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 630.$
$2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 = 468$	

Vom examina acum pe fiecare în parte, căutând numerele *impare* corespunzătoare, dacă aceste valori de mai sus ar fi indicatorii lor.

Vom ţine seamă că *2* poate să fie indicatorul lui 3; 2^2 indicatorul lui *5; 2 . 3* indicatorul lui *7* şi *9; 2^3* indicatorul lui *15*, etc... unde am luat numai numerile impare.

Vom elimina apoi toate numerile *pare* şi acele *impare* printre factorii cărora nu este şi *5*.

In consecinţă vedem că:

1) Numerele: *304, 364* şi *370* nu pot fi indicatori.

2) Numărul: *296* nu are decât corespunzător *par*.

3) Numerele: *380, 444, 468, 540, 546, 570* şi *630* nu au numere M*5*.

4) Singurele numere cari convin problemei sunt: *504* care poate să fie indicatorul numerilor: *1935* şi *2205;* iar *532* care poate să fie indicatorul numerilor: *755* şi *945*.

Dintre ele numai **1935** este cel mai mic număr de patru cifre, care constitue relaţia problemei.

MAIOR I. LINTEŞ.

48. *Asupra problemei 3785.* In nota dela pag. 172, Vol. XL se arată că prin construcţia indicată de D-l R. GOORMAGHTIGH la pag. 71, Vol. XL, problema 3785 se consideră rezolvată. Dar construcţia D-lui R. GOORMAGHTIGH se bazează pe nişte proprietăţi publicate la pag. 155 anul 1906 al revistei *Mathesis* pe care de sigur că majoritatea corespondenţilor noştri nu o pot avea la îndemână. De aceea voi da în cele ce urmează o soluţie geometrică elementară şi destul de simplă problemei al cărei enunţ este:

Să se construiască triunghiul care avea aceeaşi suprafaţă cu a triunghiului său ortic.

Observ de la început că triunghiul ABC cerut, nu poate avea toate unghiurile ascuţite căci în acest caz vârfurile A′, B′, C′ ale triunghiului ortic sunt între vârfurile triunghiului ABC şi deci suprafaţa S′ a lui A′B′C′ va fi mai mică decât suprafaţa S a triunghiului ABC.

Fie deci unghiul A obtuz. In acest caz B′, C′ sunt pe prelungirile laturilor CA, BA. Notez cu H ortocentrul triunghiului ABC, O, O_9, O_a centrele cercurilor ABC, A′B′C′, BHC şi cu K diametralul lui H în O_a. Se ştie că HK $\perp$ B′C′ în O'_a şi că, păstrând notaţiile obişnuite, avem relaţiunile

$$S = \frac{abc}{4R} \quad , \quad S' = \frac{a'b'c'}{2R}$$

care pentru triunghiul căutat devin:

$$(1) \qquad abc = 2\,a'b'c' \,.$$

Din asemănarea triunghiurilor uşor de urmărit pe figură se găseşte

$$\frac{a}{a'} = \frac{HA'}{HO'_a} \; ; \; \frac{b}{b'} = \frac{HC}{HA'} \; ; \; \frac{c}{c'} = \frac{HB}{HB'}$$

$$(2) \qquad \therefore \; \frac{abc}{a'b'c'} = \frac{HB \times HC}{HO'_a \times HA'}$$

iar din (1) şi (2) rezultă

$$(3) \qquad HB \times HC = 2\,HO'_a \times HA'$$

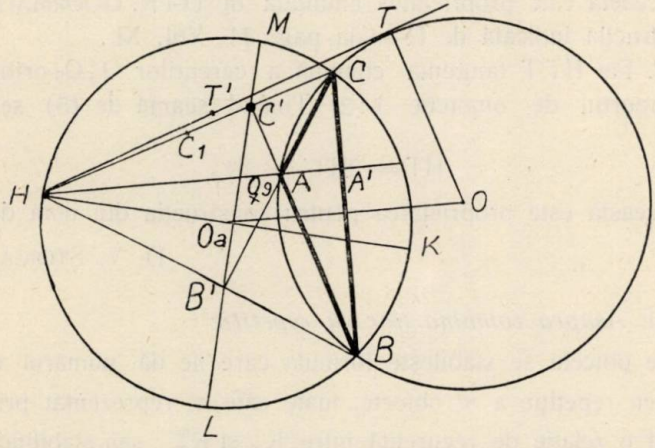
Se ştie însă că produsul a 2 laturi ale unui triunghiu este egal cu produsul diametrului cercului circumscris prin înălţimea ce pleacă din vârful comun celor 2 laturi. Pentru triunghiul HBC vom avea deci

$$HB \times HC = HK \times HA'$$

şi ţinând seamă de (3)

$$(4) \qquad 2\,HO'_a = HK = 2\,R$$

egalitate care arată că HO'_a este raza cercului circumscris triunghiului BHC, deci O'_a se confundă cu O_a. Rezultă că *dacă* ABC, A'B'C' *sunt echivalente, centrul cercului* BHC *se află pe* B'C'.



Dar se ştie că într'un triunghiu oarecare cercurile ABC, BHC sunt egale şi simetrice faţă de BC aşa că rezultă imediat următoarea construcţie pentru triunghiurile cerute :

Fie HK , LM două diametre perpendiculare ale unui cerc O_a de rază R. Prin H ducem o coardă oarecare HB care taie pe LM în B' . Perpendiculara în B' pe HB taie cercul O_a într'un punct C de aceeaşi parte cu B faţă de LM. Coarda HC taie diametrul LM în C' . Dreptele BC' , CB' se taie în A. Triunghiul ABC este triunghiul căutat.

La acestea am de adăugat următoarele 2 observaţiuni :

1°. Fie C_1 mijlocul lui HC. Triunghiurile ABC, BHC au acelaşi cerc al celor 9 puncte A'B'C' care trec şi prin C_1 şi faţă de care

$$HC_1 \times HC' = \tfrac{1}{2}\,HC \times HC' .$$

Dar din asemănarea triunghiurilor $HO_a C'$, HCK se scoate

$$HC \times HC' = HO_a \times HK' = 2R^2$$

aşa că egalitatea precedentă devine

$$(5) \qquad HC_1 \times HC' = R^2 = HT'$$

unde T' e punctul de contact al tangentei duse din H la O_9.

Pe de altă parte O este simetricul lui H faţă de O_9, deci puterea lui O faţă de O_9 este egală cu puterea lui H faţă de O_9, putere care după (5) este R^2. Aceasta dovedeşte că *cercurile* O *şi* O_9 *sunt ortogonale.*

Aceasta este proprietatea enunţată de D-l R. GOORMAGHTIGH în construcţia indicată de D-sa la pag. 71, Vol. XL.

2^0. Fie $HT'T$ tangenta comună a cercurilor O, O_9 ortogonale şi cu raportul de omotetie $1:2$. Ţinând seamă de (5) se poate scrie

$$HT = 2HT' = 2R .$$

Aceasta este proprietatea pentru construcţia din nota de faţă.

D. V. STOICA.

49. *Asupra combinărilor cu repetiţie.*

De obiceiu se stabileşte formula care ne dă numărul combinărilor cu repetiţie a m obiecte, luate câte n, reprezentat prin K_m^n, stabilind o relaţie de recurenţă între K_m^n şi K_m^{n-1} sau stabilind direct relaţia

$$K_m^n = C_{m+n-1}^n ,$$

în care C_m^p reprezintă numărul combinărilor simple a m obiecte, luate câte p. Raţionamentele făcute pentru a se ajunge la rezultatele de mai sus sunt destul de delicate, deşi simple, pentru a fi înţelese uşor de începători.

Nu ştiu dacă ceeace urmează e cunoscut, dar voiesc să indic mai jos un raţionament care în fond este destul de elementar, deşi implică ceva mai multe calcule.

Fie a un obiect oarecare din cele m date. Toate cele K_m^n combinări căutate cuprind: K_{m-1}^n grupe ce nu conţin pe a, K_{m-1}^{n-1} grupe ce conţin odată pe a, K_{m-1}^{n-2} grupe ce conţin de două ori pe a şi în general K_{m-1}^{n-p} grupe ce conţin de p ori pe a.

Rezultă de aci formula

$$1)\quad K_m^n = K_{m-1}^n + K_{m-1}^{n-1} + K_{m-1}^{n-2} + \ldots + K_{m-1}^{n-p} + \ldots + K_{m-1}^0 .$$

Pe de altă parte avem evident $K_1^n = 1$, căci cu un singur obiect putem forma un singur grup de n obiecte identice. Relaţia (1) devine pentru $m = 2$,

$$K_2^n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n + 1 = C_{n+1}^1 .$$

Ţinând seama de aceasta, (1) devine pentru $m = 3$

$$K_3^n = C_{n+1}^1 + C_n^1 + C_{n-1}^1 + \ldots + C_2^1 + 1.$$

Insă în virtutea identităţii

$$(2)\qquad C_k^p + C_k^{p-1} = C_{k+1}^p ,$$

putem scrie

$$K_3^n = (1 + C_2^1) + C_3^1 + \ldots + C_{n+1}^1 = (C_3^2 + C_3^1) + C_4^1 + \ldots + C_{n+1}^1$$
$$= (C_4^2 + C_4^1) + C_5^1 + \ldots + C_{n+1}^1 = (C_5^2 + C_5^1) + C_6^1 + \ldots + C_{n+1}^1$$
$$= \ldots = C_{n+2}^2 .$$

Zic că în general avem

$$(3)\qquad K_m^n = C_{m+n-1}^n .$$

Presupunem această relaţiune adevărată până la indicele inferior $m - 1$. Relaţia (1) devine în acest caz:

$$K_m^n = C_{m+n-2}^n + C_{m+n-3}^{n-1} + C_{m+n-4}^{n-2} + \ldots + C_{m-1}^1 + 1$$
$$= (C_{m-1}^0 + C_{m-1}^1) + C_m^2 + \ldots + C_{m+n-2}^n$$
$$= (C_m^1 + C_m^2) + C_{m+1}^3 + \ldots + C_{m+n-2}^n$$
$$= (C_{m+1}^2 + C_{m+1}^3) + C_{m+2}^4 + \ldots + C_{m+n-2}^n$$

şi din aproape în aproape se ajunge, ţinând seama de (2), la (3), care este astfel generală.

De obiceiu se obţine invers, (1) din (3).

M. G.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine. XVII-ème Année. No. 1—2. Bucureşti 1935. Sur l'équation intégrale de FREDHOLM dans le domaine complexe, par R. BADESCO. Revision des longitudes mondiales, par G. DEMETRESCU. Sur l'interpretation des sismographes, par G. DEMETRESCU.

Boletin Matematico. Anul VIII. No. 2. Aprilie 1935. Buenos Aires Cuvântările D-lor ION IONESCU, G-RAL GH. BUICLIU şi GH. ŢIŢEICA la inaugurarea Casei *«Gazeta Matematică»*.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 59. No. 17. Iunie 1935.

Idem. No. 18 Iunie 1935. Paris.

Ştiinţă şi Progres. Anul II. No. 3—4. Iunie 1935. Târgul-Mureş. Teorema piesei de 5 lei a D-lui PROF. ŢIŢEICA, de G. CĂLUGĂREANU. Sărbătorirea D-lui PROF. MONTEL la Cluj, de C. IACOB.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Anul XXI. No. 1. Martie 1935. Iaşi. A 25-a aniversare a Revistei Ştiinţifice *«V. Adamachi»*, de C. M. Schiţa desvoltării învăţământului matematicilor la Universitatea din Iaşi, de A. MYLLER.

Numerus. Revista de matematici elementare pentru învăţământul secundar, normal, profesional şi militar. Director R. N. RACLIŞ. Volumul I. Caetul 1. Mai 1935. Abonamentul 90 lei pentru 10 caete, se face la Institutul Matematic român, Aleea Vulpache 21, Bucureşti 3. La Géométrie du triangle, par TRAJAN LALESCO.

W. WILKOSZ. *Une question concernant les fondements de la théorie des déformations continues.* (Extras din *«Mathematica»*, Vol. IX.) Cluj 1935.

CAIUS JACOB. *Asupra unei probleme din teoria vânelor licuide.* (Extras din *Procedings of the fourth international Congress for applied mechanics*, Cambridge 1934). Cambridge în 1934.

GH. EM. FILIPESCU. *Statistica construcţiunilor şi Rezistenţa materialelor.* Vol. I, II şi III. Bucureşti 1935.

P. SERGESCU. Sur l'organisation de l'enseignement des mathématiques en Roumanie. (Extras din *Comptes rendus du deuxième Congrès des mathématiciens des pays slaves.* Praha 1934). Praga 1935.

P. SERGESCU. *Compléments à ma communication du Congrès de Chambéry.* (Extras din *Comptes rendus du deuxième Congrès des mathématiciens des pays slaves.* Praha 1934). Praga 1935.

P. SERGESCU. *Matematica la Români.* Conferinţă ţinută la *Liga Culturală* din Braşov. Vălenii de Munte 1934.

P. SERGESCU. *Aperçu sur les mathématiques en Roumanie.* (Extras din *Comptes rendus du deuxième Congrès des mathématiciens des pays slaves.* Praha 1934). Praga 1935.

G. ZAPAN. *Deformările psichice.* Teorie relativistă a sistemelor psihofizice, expusă în ipoteza câmpurilor somatice neomogene. (Din *Publicaţiile Institutului de Psihologie al Universităţii din Bucureşti).* Bucureşti 1935.

MAIOR I. LINTEŞ. *Studiul teoretic al unui proiectil.* (Extras din *Revista Artileriei).* Timişoara 1935.

MAIOR I. LINTEŞ. *Caracteristicile şi Posibilităţile aviaţiei în legătură cu A. c. A.* Bucureşti 1935.

CAIUS JACOB. Asupra câtorva proprietăţi ale soluţiei generale a unei probleme a D-lor H. VILLAT şi B. THIRY. (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de Paris). Paris 1935.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul XCV. Ianuarie—Iunie 1923. Densificare infinitesimală. Armonizare tensorială. Filosofie şi digresiuni matematice, de J. MULHALL.

Idem. Tomul CXV. Bazele unei teorii generale a corelaţiei, de C. E. DIEULEFAIT. Asupra unei noui generări de polinoame ortogonale, de C. E. DIEULEFAIT. Unele teoreme asupra produsului de serii sumabile BOREL, de J. C. VIGNAUX. Generalizarea curbelor lui PAERSON, de C. E. DIEULEFAIT. Asupra unei generalizări a metodei de sumare a lui ABEL, de J. C. VIGNAUX.

Idem. Tomul CV, Ianuarie-Aprilie. Mecanica atomică de A. E. S. BERRA şi R. GRINFELD.

Gazeta Matematică. *Supliment cu exerciţii.* Anul I. No. 9. Bucureşti.

CERERI

247. Se mai găsesc manuscrise din cursul de Algebră făcut de profesorul NICULAE DRĂGHINICI la Academia Mihăileană din Iaşi?

La expoziţia făcută la 1885 cu ocazia împlinirii de 50 ani dela întemeierea acelei Academii, se expusese un exemplar din *algebra* lui *universală* (1839), din Biblioteca EMANOIL MORŢUN. Se mai găseşte acel exemplar?

I. I.

DIVERSE

D-l PROF. P. MONTEL, de la Sorbona, a făcut dela 17 la 26 Mai al patrulea curs de teoria funcţiilor la Universitatea din Cluj. Anul acesta a tratat despre *Funcţiunile periodice şi aproape periodice.* La 22 Mai, Universitatea din Cluj l-a proclamat în mod solemn *Doctor Honoris Causa.* Cu ocazia vizitei sale, Societatea de ştiinţe din Cluj a organizat două şedinţe speciale matematice, un adevărat congres în miniatură. Au făcut comunicări D-nii: P. MONTEL, D. POMPEIU, N. CIORĂNESCU, M. GHERMĂNESCU, A. PANTAZI, P. SERGESCU, D. V. IONESCU, G. CĂLUGĂREANU, R. BĂDESCU, TIB. POPOVICIU şi CAIUS JACOB.

La 27 Mai, Universitatea din Cernăuţi a proclamat pe D-l PROF. PAUL MONTEL, *Doctor Honoris Causa.* La 28 Mai a avut loc o şedinţă matematică la care au făcut comunicări D-nii: P. MONTEL, O. ONICESCU şi A. PANTAZI.

Societatea Română de Matematice a ţinut următoarele şedinţe:

Luni 13 Maiu au comunicat D-nii: G. ŢIŢEICA despre *«Câteva proprietăţi afine»* şi N. CIORĂNESCU, *«Asupra zerorilor funcţiunilor meromorfe şi aplicaţii la unele ecuaţii algebrice».*

Joi 16 Maiu, în şedinţa de comunicări libere au vorbit D-nii: D. POMPEIU despre *«Proprietăţi geometrice obţinute cu ajutorul cantităţilor complexe,* D. BARBILIAN *«Asupra unor transformări»* şi I. CÂRSTOIU, *„Asupra ecuaţiei* RICCATI".

Luni 27 Maiu au comunicat D-nii: AL. FRODA despre *«Proprietăţi ale funcţiilor nemăsurabile»* şi D. BARBILIAN despre *«O caracterizare globală a curbelor raţionale normale».*

Luni 10 Iunie au comunicat D-nii: I. IONESCU despre *«Vechile geometrii româneşti»* şi M. NICOLESCU despre *«Noui contribuţii în teoria funcţiunilor poliarmonice».*

Sporirea Bibliotecii

Le PRINCE GR. STOURDZA. Les lois fondamentales de l'Univers. Paris 1891. Donată de D-l Maior I. LINTEŞ.

B. E. COUSINERY. Le rapporteur de précision. Paris 1845. Donată de I. IONESCU, inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2309. *Să se determine polinoamele* $P_n(x)$ *care satisfac relaţiunea*

(A) $$P_{n+k}\,P_{n-k} - P_n^2 = (-1)^{n-k}\,x^{n-k+1}\,P_{k-1}^2.$$

M. GHERMĂNESCU.

1. Problema trebue considerată din două puncte de vedere, după cum k e fix sau oarecare. Vom începe cu cazul când k poate avea orice valoare întreagă şi pozitivă. In acest caz, polinoamele căutate trebue să satisfacă şi relaţia corespunzătoare lui $k = 1$,

$$(B) \qquad P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^{n-1} x^n P_0^2.$$

Ne vom ocupa dar de această relaţiune, arătând apoi că (A) nu e decât o consecinţă a acesteia.

Pentru $n = 1$, (B) devine

$$(1) \qquad P_2 P_0 - P_1^2 = - x P_0^2,$$

iar dacă punem

$$(2) \qquad P_1 = RP_0$$

ea devine

$$(3) \qquad P_2 = RP_1 + xP_0.$$

Pentru $n = 2$, (B) devine, ţinând seama de (1)

$$P_3 P_1 - P_2^2 = - x^2 P_0^2 = - x (P_2 P_0 - P_1^2)$$

sau

$$P_1 (P_3 - x P_1) = P_2 (P_2 - x P_0)$$

de unde, ţinând seama de (3)

$$(4) \qquad P_3 = RP_2 + xP_1.$$

Zic că avem în general relaţiunea

$$(C) \qquad P_n = RP_{n-1} + xP_{n-2}.$$

In adevăr, presupunând că din aproape în aproape am stabilit-o până la întregul n, să arătăm că e adevărată şi pentru întregul $n + 1$. Pentru aceasta, înlocuim în (B) n prin $n - 2$

$$(B') \qquad P_{n-1} P_{n-3} - P_{n-2}^2 = (-1)^{n-3} x^{n-2} P_0^2;$$

deducem din (B) şi (B')

$$P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2 = x^2 [P_{n-1} P_{n-3} - P_{n-2}^2]$$

sau

$$P_{n-1} [P_{n+1} - x^2 P_{n-3}] = P_n^2 - x^2 P_{n-2}^2 = (P_n + x P_{n-2}) (P_n - x P_{n-2})$$

sau încă, ţinând seamă de (C), presupusă adevărată până la întregul n

$$P_{n+1} - x^2 P_{n-3} = R\,(P_n + xP_{n-2}),$$

sau

$$P_{n+1} = RP_n + x\,(P_{n-2} + xP_{n-3}) = RP_n + xP_{n-1},$$

adică o relaţie de aceeaşi formă cu (C), deci (C) este generală.

Se poate arăta că invers [1]), polinoamele care satisfac relaţiei (C) satisfac şi (B) deci e destul să căutăm polinoamele care satisfac relaţiei (C). Ori aceasta este cunoscut. Dacă u_1 şi u_2 sunt rădăcinile, presupuse distincte, ale ecuaţiei *caracteristice*

$$u^2 = Ru + x \qquad \text{(D)}$$

atunci

$$P_n = Au_1^n + Bu_2^n$$

A, B, fiind independente de n şi determinate aşa fel încât pentru $n = 0, 1$, această relaţiune să ne dea respectiv polinoamele P_0, $P_1 = RP_0$. Găsim astfel formula definitivă

$$P_n = P_0 \frac{u_1^{n+1} - u_2^{n+1}}{u_1 - u_2} \qquad \text{(E)}$$

care arată că polinoamele P_n depind de două polinoame arbitrare $P_0\,(x)$, $R\,(x)$.

Faptul că toate polinoamele P_n sunt divizibile prin polinomul arbitrar P_0 se justifică prin aceea că, e uşor de observat că dacă am găsit un şir de polinoame P_n, satisfăcând relaţiei (A) sau (B), atunci şi polinoamele $P'_n = QP_n$, Q fiind arbitrar, satisfac aceloraşi relaţiuni. Această observaţiune ne-ar fi permis ca dela început să presupunem $P_0 = 1$, iar rezultatul general să-l înmulţim apoi cu un polinom arbitrar.

Ne mai rămâne să arătăm că relaţia (A) este o consecinţă a relaţiei (B) sau, ceeace e tot una, a relaţiei (C). Lucrul acesta l-am arătat însă cu altă ocaziune (loc. cit.) astfel că pentru economie de spaţiu mă dispensez de a-l reproduce.

---

1) M. GHERMĂNESCU „Proprietăţile seriilor recurente", R. M. T. t. III, 1923, p. 116.

Mai adaug numai observația că dacă ecuația caracteristică (D) are rădăcinile egale, atunci polinomul P_n este dat de o relație de forma

$$P_n = (An + B)u_1^n$$

dar se vede că în acest caz trebue să avem $R^2 + 4x = 0$, relație imposibilă dacă R este un polinom. Deci singurele polinoame satisfăcând B, deci (A) sunt cele date de relația (E).

Problema a fost considerată din acest punct de vedere de D-l MIRCEA MĂNESCU, student. Soluția D-sale dă rezultatul (E), dar e puțin incompletă, în ceeace privește raționamentele. Ceeace e însă remarcabil în soluția D-sale, e un punct de vedere foarte original și care l-ar fi condus la soluția problemei pentru k fix, ceeace D-sa nu a observat. Iată în linie generală, ideea D-lui MĂNESCU:

Fiind dată relația (A) să încercăm s'o înlocuim printr'o relație de forma

$$(C_1) \qquad P_{n+k} + AP_n + BP_{n-k} = 0,$$

Pentru aceasta, D-sa înmulțește (C_1) cu P_{n+k}, ține seamă de (A) în care a înlocuit n prin $n + k$ și găsește relația definitivă

$$(C') \qquad P_{n+k} + AP_n + (-1)^k x^k P_{n-k} = 0,$$

cu

$$(C'') \qquad AP_k = -P_{2k} - (-1)^k x^k P_0 \ , \ P_{2k} P_0 - P_k^2 = x P_{k-1}^2 ,$$

în care făcând $k = 1$, regăsește relația (C) și api (E).

2. Să considerăm cazul când k e fix. In acest caz, procedând ca mai sus, găsim că polinoamele P_n satisfac relația lineară

$$(A) \qquad P_{n+2k} + AP_{n+k} + (-1)^k x^k P_n = 0,$$

A fiind determinat în condițiunile de mai sus. Pentru a rezolvi această relațiune, care de fapt este o ecuație funcțională, să căutăm o soluție de forma r^n . Vom găsi că r trebue să fie o rădăcină a ecuației caracteristice

$$(B) \qquad r^{2k} + Ar^k + (-1)^k x^k = 0.$$

Nu putem avea

$$A^2 - 4(-x)^k = 0$$

căci ţinând seamă de expresia lui A această relaţie devine

$$[P_{2k} + (-n)^k P_0]^2 = 4 (-x)^k P_0^2 P_k^2$$

care nu are loc decât dacă k e par. Punând $k = 2k'$ avem

$$P_{4k'} + x^{2k'} P_0 = \pm 2x^{k'} P_0 P_{2k'}$$

sau, ţinând seama de a doua relaţie (C")

$$(P_{2k'} \mp x' P_0)^2 + x P_{2k'-1}^2 = 0,$$

care este imposibilă dacă P sunt polinoame.

Ecuaţia (B) are prin urmare $2k$ rădăcini distincte $r_1\alpha^i$, $r_2\alpha^i$, unde $\alpha^k = 1$, astfel încât soluţia cea mai generală a ecuaţiei funcţionale (A) va fi

$$P_n = r_1^n (A_1 + \alpha A_2 + \alpha^2 A_3 + \ldots + \alpha^{k-1} A_k) + r_2^n (B_1 + \alpha B_2 + \ldots + \alpha^{k-1} B_k)$$

A_i , B_i depinzând de primele $2k$ polinoame arbitrare P_0, P_1, ... P_{2k-1} , ale şirului. Această relaţiune arată însă că între trei polinoame consecutive P_n , P_{n-1} , P_{n-2} , avem relaţiunea

$$P_n - (r_1 + r_2) P_{n-1} + r_1 r_2 P_{n-2} = 0.$$

Din (B) se deduce uşor $r_1 r_2 = -x$, aşa că punând $r_1 + r_2 = R$, ultima relaţiune devine

$$P_n = RP_{n-1} + x P_{n-2}$$

adică aceeaşi ca (C). Cum în acest caz are loc între altele şi relaţia

$$P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^{n-1} x^n P_0^2$$

găsim că $P_1 = RP_0$, deci R trebue să fie un polinom.

In definitiv regăsim aceleaşi rezultate ca în prima ipoteză, ceeace arată că relaţia propusă este, în toate cazurile, o consecinţă a relaţiunii (C).

Notă. Pe vremea când am propus această problemă am primit soluţii dela o mulţime de corespondenţi cari au fost anunţaţi chiar pe copertă. Soluţiile acelora însă aveau o formă stereotipă, făcând analogie între problema propusă şi cele scrise în articolul citat din R. M. T. Evident însă că erau cu totul insuficiente, astfel că mă abţin dela citarea rezolvitorilor respectivi.

M. G.

PROBLEMA 2860. *Să se stabilească identitatea:*

$$\sum_{i=0}^{k}(2i+1)\sin(2i+1)t+\sum_{i=1}^{2k}(2k-i+1)\sin(2k+2i+1)t$$

$$=\frac{\sin^3(2k+1)t}{\sin^2 t}.$$

V. ALACI.

Prima soluţie. Calculăm pe rând cele două sume din primul membru. In adevăr, considerând relaţia cunoscută:

$$\sum_{i=0}^{k}\cos(2i+1)t=\cos t+\cos 3t+\ldots+\cos(2k+1)t$$

$$=\frac{\sin(2k+2)t}{2\sin t},$$

şi derivând-o în raport cu t, deducem:

$$(1)\qquad \sum_{i=0}^{k}(2i+1)\sin(2i+1)t$$

$$=\frac{\sin(2k+2)t\cos t-(2k+2)\cos(2k+2)t\sin t}{2\sin^2 t}$$

$$=\frac{\sin(2k+1)t-(2k+1)\cos(2k+2)t\sin t}{2\sin^2 t}.$$

Avem apoi evident:

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{2k}(2k-i+1)\sin(2k+2i+1)t$$

$$=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2k}[6k+3-(2k+2i+1)]\sin(2k+2i+1)t$$

$$=\frac{6k+3}{2}\sum_{i=1}^{2k}\sin(2k+2i+1)t$$

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2k}(2k+2i+1)\sin(2k+2i+1)t.$$

Pentru efectuarea ultimelor două sume, considerăm relațiile de însumare cunoscute :

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{2k} \sin(2k+2i+1)t = \frac{\sin(4k+2)t \ \sin 2kt}{\sin t}$$

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{2k} \cos(2k+2i+1)t = \frac{\cos(4k+2)t \ \sin 2kt}{\sin t} .$$

Relația (4) derivată în raport cu t, ne dă :

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{2k} (2k+2i+1) \sin(2k+2i+1)t$$

$$\frac{(4k+2)\sin(4k+2)t \sin 2kt \sin t - 2k\cos(4k+2)t \cos 2kt \sin t + \cos(4k+2)t \sin 2kt \cos t}{\sin^2 t}$$

In virtutea relațiilor (3) și (5), relația (2) devine :

$$\sum_{i=0}^{2k} (2k-i+1) \sin(2k+2i+1)t$$

$$= \frac{1}{2\sin^2 t}[(6k+3) \sin(4k+2)t \sin 2kt \sin t$$

$$-(4k+2) \sin(4k+2)t \sin 2kt \sin t + 2k \cos(4k+2)t \cos 2kt \sin t$$

$$- \cos(4k+2)t \sin 2kt \cos t],$$

sau :

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{2k} (2k-i+1) \sin(2k+2i+1)t$$

$$= \frac{1}{2\sin^2 t}[(2k+1) \sin(4k+2)t \sin 2kt \sin t$$

$$+ 2k \cos(4k+2)t \cos 2kt - \cos(4k+2)t \sin 2kt \cos t].$$

Adunând acum relațiile (1) și (6), avem :

$$\sum_{i=0}^{k} (2i+1) \sin(2i+1)t + \sum_{i=1}^{2k} (2k-i+1) \sin(2k+2i+1)t$$

$$= \frac{1}{2\sin^2 t}[\sin(2k+1)t - (2k+1) \cos(2k+2)t \sin t$$

$$+ (2k+1) \sin(4k+2)t \sin 2kt \sin t + 2k \cos(4k+2)t \cos 2kt \sin t$$

$$-\cos(2k+2)t\ \sin 2kt\ \cos t] = \frac{1}{4\sin^2 t}\{2\sin(2k+1)t$$

$$-2(2k+1)\cos(2k+2)t\ \sin t + (2k+1)[\cos(2k+2)t$$

$$-\cos(6k+2)t]\ \sin t + 2k[\cos(2k+2)t + \cos(6k+2)t]\ \sin t$$

$$-[\sin(6k+2)t - \sin(2k+2)t]\ \cos t\} = \frac{1}{4\sin^2 t}[2\sin(2k+1)t$$

$$-\cos(2k+2)t\ \sin t - \cos(6k+2)t\ \sin t - \sin(6k+2)t\ \cos t$$

$$+\sin(2k+2)t\ \cos t],$$

sau încă :

$$(7)\qquad \sum_{i=0}^{k}(2i+1)\sin(2i+1)t + \sum_{i=1}^{2k}(2k-i+1)\sin(2k+2i+1)t$$

$$= \frac{1}{4\sin^2 t}[2\sin(2k+1)t + \sin(2k+1)t - \sin(6k+3)t]$$

$$= \frac{1}{4\sin^2 t}[3\sin(2k+1)t - \sin 3(2k+1)t].$$

In virtutea relației cunoscute :

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

relația (7) devine :

$$\sum_{i=0}^{k}(2i+1)\sin(2i+1)t + \sum_{i=1}^{2k}\sin(2k-i+1)\sin(2k+2i+1)t$$

$$= \frac{\sin(2k+1)t}{\sin^2 t},$$

şi astfel identitatea dată este stabilită.

Soluții analoage date de D-nii : GHEORGHIU TH. GHEORGHE (Liceul Galați) şi POPESCU D. GHEORGHE (Şc. Politehnică, Bucureşti).

A 2-a soluție. In articolul *„Calcularea câtorva integrale definite"* din *„Gazeta Matematică"*, Vol. XXVII, pag. 113, este stabilită identitatea :

$$(1)\qquad \frac{\sin^p(2k+1)t}{\sin^p t} = (p, pk)_{2k} + 2(p, pk-1)_{2k}\cos 2t$$

$$+2(p, pk-2)_{2k}\cos 4t + \ldots + 2(p, 1)_{2k}\cos(2pk-2)t$$

$$+2(p, 0)_{2k}\cos 2pkt,$$

în care coeficienţii sunt daţi de formula :

$$(p\,,u)_{2k} = \Sigma\,(-1)^{\lambda}\, C_p^{\lambda}\, \Gamma_p^{u-\lambda(2k+1)},$$

λ variind dela 0 la câtul întreg a lui n prin $2k+1$, $C_r^s\ \Gamma_r^s$ sunt simbolul combinărilor simple şi a combinărilor cu repetiţie a r obiecte luate câte s.

Dacă în (1) luăm $p = 2$, obţinem :

$$(2)\qquad \frac{\sin^2(2k+1)\,t}{\sin^2 t} = (2k+1) + 2(2k)\cos 2t + 2(2k-1)\cos 4t$$

$$+ 2(2k-2)\cos 6t + \ldots + 2\,.\,3\cos(4k-4)t + 2\,.\,2\cos(4k-2)t + 2\cos 4kt$$

Inmulţind ambii membrii ai acestei egalităţi cu $\sin(2k+1)\,t$, şi observăm că termenii din membrul al 2-lea se descompun după cum urmează :

$$(2k+1)\sin(2k+1)\,t = (2k+1)\sin(2k+1)\,t$$

$$2(2k)\sin(2k+1)\,t\cos 2t = 2k\sin(2k+3)\,t + 2k\sin(2k-1)\,t$$

$$2(2k-1)\sin(2k+1)t\cos 4t = (2k-1)\sin(2k+5)t + (2k-1)\sin(2k-3)t$$

$$2(2k-2)\sin(2k+1)t\cos 6t = (2k-2)\sin(2k+7)t + (2k-2)\sin(2k-5)t$$

. . . . . .

$$2\,.\,3\sin(2k+1)\,t\cos(4k-4)\,t = 3\sin(6k-3)\,t - 3\sin(2k-5)\,t$$

$$2\,.\,2\sin(2k+1)\,t\cos(4k-2)\,t = 2\sin(6k-1)\,t - 2\sin(2k-3)\,t$$

$$2\sin(2k+1)\,t\cos 4kt = \sin(6k+1)\,t - \sin(2k-1)\,t.$$

Adunând aceste egalităţi şi observând cu atenţie, putem scrie :

$$\frac{\sin^3(2k+1)\,t}{\sin^2 t} = \sum_{i=1}^{2k}(2k-i+1)\sin(2\,:+2i+1)\,t$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(2i+1)\sin(2i+1)\,t,$$

care este tocmai identitatea cerută.

Soluţii analoage date de D-nii : FLORESCU B. IOAN (Lic. Carol Craiova) şi GEORGESCU I. C-TIN (Lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).

V. A.

PROBLEMA 4147. *Se consideră ecuaţia:*

$$(1) \qquad f(x) = x^2 + px + q = 0$$

coeficienţii p *şi* q *putând fi numere complexe. Rădăcinile ecuaţiei (1) se reprezintă prin punctele* A *şi* B *în raport cu un sistem de axe rectangulare* O*x*, O*y*. *Se dă apoi un număr* λ, *reprezintat prin punctul* L *şi fie* M *şi* N *punctele corespunzătoare numerilor* $p^2 - 4q$ *şi* $f(\lambda)$. *Să se arate că dacă punctele* A, B, L *sunt colineare, atunci şi punctele* M, N *şi origina* O *a axelor de coordonate sunt colineare. Să se deducă un criteriu pentru a recunoaşte dacă punctul* L *este pe dreapta* AB *de aceeaşi parte a punctelor* A *şi* B *sau între ele.*

Caz particular, când coeficienţii p, q *sunt reali, rădăcinile ecuaţiei (1) fiind de asemenea reale.*

TH. ANGHELUŢĂ.

Au rezolvat problema D-nii: N. N. MIHĂILEANU, IANCU N. SAGER.

Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei (1), presupuse distincte; ele sunt afixele punctelor A şi B, iar numărul λ este afixul punctutui L. Punctele A, B, L fiind colineare, raportul

$$E = \frac{\lambda - x_1}{\lambda - x_2}$$

este real şi invers. Mai precis, dacă

$$E > 0$$

punctul L este de aceeaşi parte a punctelor A şi B, iar dacă

$$E < 0$$

L este situat între aceste puncte.

Rămâne acum să exprimăm această condiţie cu ajutorul coeficienţilor ecuaţiei (1) şi a numărului λ. In acest scop să considerăm expresia următoare, simetrică în raport cu x_1 şi x_2,

$$E_1 = E + \frac{1}{E} = \frac{\lambda - x_1}{\lambda - x_2} + \frac{\lambda - x_2}{\lambda - x_1} = \frac{2\lambda^2 - 2(x_1 + x_2)\lambda + x_1^2 + x_2^2}{(\lambda - x_1)(\lambda - x_2)},$$

sau încă

$$E_1 = 2 + \frac{p^2 - 4q}{f(\lambda)}.$$

Este evident că dacă E este real şi E_1 este real şi deci:

$$\frac{p^2 - 4q}{f(\lambda)}$$

este real. *Prin urmare punctele* M *şi* N, *de afixe respectiv* $p^2 - 4q$ şi $f(\lambda)$, *sunt colineare cu* O.

Deci, dacă punctele A, B, L *sunt colineare, atunci şi punctele* O, M, N *sunt colineare.*

Să cercetăm acuma reciproca acestui rezultat. Presupunem dar că O, M, N sunt colineare adică E, este real. Să punem numărul E sub formă trigonometrică

$$E = re^{i\theta}.$$

$2, \theta$ fiind modulul şi argumentul lui.

Atunci se are

$$E_1 = re^{i\theta} + \frac{1}{r} e^{-i\theta}.$$

E_1 fiind presupus real, trebue să avem

$$\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin\theta = 0.$$

şi deci, sau

$$\theta = k\pi$$

şi în acest caz şi E este real şi prin urmare punctele A, B, L sunt colineare, sau

$$r = 1$$

şi prin urmare avem

$$E = e^{i\theta},$$

aceasta înseamnă că punctul L este aşezat pe perpendiculara ridicată pe mijlocul dreptei AB.

In rezumat dacă E_1 *este real, adică punctele* O, M, N *sunt colineare două cazuri se pot prezinta:*

1°. *Punctele* A, B, L *sunt colineare.* 2°. *Punctul* L *este situat pe perpendiculara ridicată pe mijlocul dreptei* AB.

In discuție vom distinge 3 cazuri.

(a) $\frac{p^2 - 4q}{f(x)} > 0$. Prin urmare punctele O, M, N sunt presupuse colineare, M, și N fiind de aceeași parte a punctului O și *vrem să dovedim că în acest caz punctul* L *este pe dreapta* A B *de aceeași parte a punctelor* A *și* B.

In adevăr nu putem avea

$$E = e^{i\theta}$$

căci ar urma să avem

$$E_1 = 2 + \frac{p^2 - 4q}{f(\lambda)} = 2\cos\theta > 2.$$

Prin urmare E este real și din

$$E + \frac{1}{E} > 2$$

deducem

$$\frac{(E-1)^2}{E} > 0.$$

deci E este positiv.

(b) $$-4 < \frac{p^2 - 4q}{f(\lambda)} < 0.$$

In acest caz punctul L *este așezat pe perpendiculara ridicată pe mijlocul dreptei* AB.

In adevăr E nu poate fi real, căci contrar inegalitatea

$$\frac{p^2 - 4q}{f(\lambda)} < 0$$

sau inegalitatea

$$E + \frac{1}{E} < 2$$

ne arată că avem

$$E < 0;$$

pe de altă parte inegalitatea

$$-4 < \frac{p^2 - 4q}{f(\lambda)}$$

sau inegalitatea

$$-2 < E + \frac{1}{E}$$

ne dă

$$E > 0 .$$

Deci nu putem avea decât

$$E = e^{i\theta}$$

ceeace trebuia dovedit.

(c) $\frac{p^2 - 4q}{f(\lambda)} \leqq -4$. *Să arătăm că punctele* L, A, B *sunt colineare, punctul* L *fiind situat între* A *şi* B. In adevăr E nu poate fi imaginar şi deci de forma

$$E = e^{i\theta}$$

căci ar urma să avem

$$E_1 = 2 + \frac{p^2 - 4q}{f(\lambda)} = 2\cos\theta \leqq -2$$

ceeace este imposibil. Deci E este real şi negativ căci având

$$E + \frac{1}{E} \leqq -2$$

rezultă

$$E < 0 .$$

Observaţii. In discuţia cazurilor (*b*) şi (*c*) intră expresia

$$\frac{p^2 - 4q}{f(\lambda)} + 4 = \frac{4\left(\lambda + \frac{p}{2}\right)^2}{f(\lambda)}$$

care are o interpretare geometrică lesne de văzut unde apare semisuma $-\frac{p}{2}$, a rădăcinilor ecuaţiei (1).

Caz particular. Dacă p, q, x_1, x_2 sunt reali pentru ca numărul λ să fie în afara rădăcinilor, cazul (*a*) ne dă $f(\lambda) > 0$. Deci cazul (*a*) este o generalizare acestei din urmă proprietăţi. Iar pentru ca λ să fie între rădăcini cazul (*c*) ne dă $f(\lambda) < 0$.

Cazul (*c*) este generalizarea acestei proprietăţi.

Corespondenţii noştri au dat criteriul exact numai pentru cazul (*a*).

PROBLEMA 4276. *Ecuația*

$$(\lambda^2 - 1)\, x^2 - (2\alpha + \lambda - 1)\, x - \alpha\,(\alpha - 1) = 0$$

în care $\lambda \geqslant 0$; $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *are totdeauna o rădăcină* $0 \leqslant x' < 1$.

N. C.

Cazurile limită: $\alpha = 0$; $\alpha = 1$; $\lambda = 0$ se pot studia direct și se vede imediat că ele satisfac cerințele din enunț.

Rămâne de cercetat așadar dacă avem o rădăcină $0 \leqslant x' < 1$ în cazul când λ și α satisfac inegalitățile

$$\lambda > 0 \ ; \ 0 < \alpha < 1.$$

Dacă se notează

$$f(x) \equiv (\lambda^2 - 1)\, x^2 - (2\alpha + \lambda - 1)\, x - \alpha\,(\alpha - 1) = 0$$

se obține imediat:

$$f(0) \,.\, f(1) = \alpha\,(1 - \alpha)\,(\lambda + \alpha)\,(\lambda - \alpha - 1).$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIU

Deoarece primii trei factori sunt pozitivi în cazul nostru, se vede că avem de cercetat separat

$$1^0.\ \lambda - \alpha - 1 < 0 \ ; \ 2^0.\ \lambda - \alpha - 1 > 0 \ ; \ 3^0.\ \lambda - \alpha - 1 = 0.$$

Vom cerceta pe rând aceste trei posibilități.

$1^0.\ \lambda - \alpha - 1 < 0$. In cazul acesta $f(0) \,.\, f(1) < 0$ și prin urmare ecuația $f(x) = 0$ admite o singură rădăcină cuprinsă între zero și unu.

$2^0.\ \lambda - \alpha - 1 > 0$. In cazul acesta $f(0) \,.\, f(1) > 0$. Avem însă în același timp $0 \leqslant \dfrac{1}{2\lambda} < 1$.

Calculând $f\left(\dfrac{1}{2\lambda}\right)$ obținem:

$$f\left(\frac{1}{2\lambda}\right) = -\frac{(\lambda - 2\alpha\lambda - 1)^2}{4\lambda^2} \leqslant 0.$$

Rezultă aşa dar că ambele rădăcini sunt cuprinse între zero şi unu.

3^0. $\lambda - \alpha - 1 = 0$. In cazul acesta ecuaţia admite pe lângă rădăcina $x' = 1$ şi rădăcina $x'' = \frac{1-\alpha}{2+\alpha}$ care satisface cerinţele din enunţ.

PANAIT C. MAZILU
Elev inginer Bucureşti.

S'au primit soluţii asemănătoare dela D-nii: S.-LT. AUREL EM. BĂDESCU şi GEORGES SILAŞ (Stud. Cluj). D-nii ALEX. MATEI (Şc. sup. A. M.) şi VARLAM M. PETRE (Elev ing. Buc.) au rezolvat problema direct observând că realizantul este un patrat perfect.

S'au primit soluţii necomplecte dela D-nii: EMIL C. IONESCU, ION LENCO, MARIN PREDOESCU, D. ROTARU, P. R. UNTEA, VASILE V. GHIOCEL şi DIMITRIE MAVRODIN.

Observaţie. Aceeaşi problemă se poate trata şi pentru ecuaţia

$$f(x) \equiv (\lambda - 1)x^2 - (2\alpha + \lambda - 1)x - \alpha(\alpha - 1) = 0.$$

Soluţia se obţine în modul indicat.
Dacă se notează însă cu

$$F(x) \equiv x(1 - x)$$

se observă că avem:

$$f(x) \equiv F(x + \alpha) - \lambda F(x).$$

Scrisă sub forma aceasta, ecuaţia intră într'o clasă de ecuaţiuni cu care s'a ocupat D-l Prof. N. CIORĂNESCU într'un articol din „Buletinul Societăţii Române de Matematici" T. XXXV. Rezultatele obţinute acolo permit să se deducă cele cerute în enunţ.

R. WOINAROSKY.

PROBLEMA 4388. *Fie triunghiul* ABC, A_1, B_1, C_1 *picioarele bisectoarelor interioare şi* A_2, B_2, C_2, *punctele de tangenţă a cercurilor exînscrise cu laturile triunghiului considerat.*

Să se stabilească relaţia:

$$A_1A_2 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}A+B)+B_1B_2 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}B+C)$$
$$+C_1C_2 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}C+A)=4R+r.$$

GH. VASILIU.

Deosebim două cazuri şi anume:

1. $A>B>C$ când ţinând seama că $A+B+C=180^0$ deducem:

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}A+B)=\operatorname{tg}\left(90+\frac{B-C}{2}\right)=-\operatorname{cotg}\frac{C-B}{2}$$

şi analog

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}B+C)=\operatorname{cotg}\frac{A-C}{2} \qquad \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}C+A)=-\operatorname{cotg}\frac{B-A}{2}$$

$\frac{C-B}{2}$ şi semidiferenţele analoage sunt unghiurile formate de bisectoarele interioare şi înălţimile aceluiaşi vârf, şi egale fiecare în parte cu alterne interne cu $\sphericalangle A_1 I_a A_2$ şi analoagele. Deci în fiecare triunghiu dreptunghic $A_1 I_a A_2$, etc., pot scrie că:

$$r_a=-A_1A_2 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}A+B)\ ;\ r_b=B_1B_2 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}B+C)$$

şi

$$r_c=-C_1C_2 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}C+B).$$

Ţinând în fine seamă de relaţia $\Sigma r_a=4R+r$, cunoscută (vezi de ex: Compléments de Trig. par F. G. M. pag. 178); avem că:

$$|-A_1A_2 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}A+B)|+B_1B_2 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}B+C)$$
$$+|-C_1C_2 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}C+A)|=4R+r.$$

2. $A>C>B$ când un raţionament identic şi bazaţi pe absolut aceleaşi formule, ne conduce la o relaţiune de forma:

$$A_1A_2 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}A+B)+B_1B_2 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}B+C)$$
$$+|-C_1C_2 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}C+A)|=4R+r.$$

Observări:

a) Numai în cazul triunghiului echilateral, relaţia este adevărată sub forma pe care au scris'o în enunţul publicat; deşi în acest caz particular termenii sumei se prezintă sub forma nedeterminată $0 \times \infty$, aceasta însă numai algebric; interpretarea geometrică a fiecărui termen fiind finită şi egală în parte cu r_a, r_b şi r_c.

b) In cazul triunghiului isoscel relaţia din enunţ va avea pentru $A > B = C$ numai ultimul termen pus în valoare absolută, iar pentru $A < B = C$ va avea termenul dela mijloc pus în valoare absolută. Şi în acest caz nedeterminarea este aparentă, interpretarea geometrică fiind finită.

c) Evident că putem (dacă ne-am ales un sens) să înlocuim modulul relaţiune pentru cele două cazuri generale sub forma:

$$A_2 A_1 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}A + B) + B_1 B_2 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}B + C) + C_2 C_1 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}C + A) = 4R + r$$

şi

$$A_1 A_2 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}A + B) + B_1 B_2 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}B + C) + C_2 C_1 \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}C + A) = 4R + r.$$

La această problemă s'au primit 16 soluţiuni, toate greşite; numele rezolvitorilor au fost publicate la timp pe coperta gazetei.

D-l ION GH. ŞABAC (elev cl. 7-a, lic. militar N. Filipescu) a arătat că soluţia sub forma în care a fost publicată este valabilă numai pentru $A = B = C$, iar D-l CSEKE WILHELM (stud. mat. în Cluj) rezolvă problema făcând observaţia *c)*; ambii rezolvitori însă nu au discutat problema ci s'au mulţumit cu rezolvirea ei într'un caz particular al figurii.

GH. V.

PROBLEMA 4403. *Se cere patratul* abcdef *ştiind că* cabfde *e tot patrat.*

V. THÉBAULT.

Ultimul grup de 2 cifre al unui patrat fiind

00 ; 01 ; 04 ; 09 ; 16 ; 21 ; 24 ; 25 ; 29 ; 36 ; 41 ; 44 ; 49 ; 56 ; 61 ; 64 ;

69 ; 76 ; 81 ; 84 ; 89 ; 96

(*Culegere de Probleme* Aritmetica XXXIX) se formează uşor următorul tabel al valorilor pe care le pot avea *ef, de, def* şi din care se deduce *fde :*

ef	*de*	*def*	*ef*	*de*	*def*
00	00	00	49	04,24,44 64,84	049,249,449 649,849
01	00	001	56	25	256
04	00	004	61	16,36,56 76,96	161,361,561 761,961
09	00	009			
16	01,21,41 61,81	016,216,416 616,816	64	16,36,56 76,96	164,364,564 764,964
41	04,24,44 64,84	041,241,441 641,841	69	16,36,56 76,96	169,369,569 769,969
44	04,24,44 64,84	044,244,444 644,844	96	09,29,49 69,89	096,296,496 696,896

Dăm lui *def,* pe rând toate valorile înscrise în tabel, observând că pentru valoarea 000 şi cifrele *a, b, c* sunt nule. Pentru a nu repeta, în dauna spaţiului revistei, acelaşi lucru pentru fiecare valoare a lui *def,* vom examina un singur caz, iar pentru celelalte vom da numai rezultatul. Fie deci

$$def = 049 \quad \therefore \quad x^2 = abc\,049.$$

După rezultatele din articolul *Asupra ultimului grup de* p *cifre ale pătratelor perfecte,* publicat de D-l I. V. MĂTIEŞ în *„Gazeta Matematică"* Vol. XXXVII, pag. 366, numerele ale căror patrate se termină în 049 sunt date de

$$(1) \qquad x = 250n \pm 7.$$

Cum x^2 este de 6 cifre, rezultă că vom lua

$$316 < x < 1000$$

din valorile date de (1). Găsim astfel pentru x valorile

$$493 \ , \ 507 \ , \ 743 \ , \ 757 \ , \ 993$$

pe care ridicându-le la patrat şi formând pe *cabfde* găsim

x^2 este . . .	243049	257049	552049	573049	986049
y^2 ar putea fi	324904	725904	255904	357904	698904

Extrăgând rădăcina patrată din numerele şirului y^2 sau descompunându-le în factori primi, găsim că numai 725904 e patrat perfect, deci soluţia

$$1^0 \qquad 507^2 = 257049 \ ; \ 852^2 = 725904.$$

Urmând aceeaşi cale pentru toate valorile lui *def* se mai găsesc următoarele 2 sisteme de soluţiuni:

$$2^0 \qquad 542^2 = 293764 \ ; \ 574^2 = 329476$$

$$3^0 \qquad 887^2 = 786769 \ ; \ 824^2 = 687976.$$

Observaţiuni. 1) D-l M. F. AMĂRĂŞTEANU (Lic. Buzeşti, Craiova) a examinat problema sumar şi a găsit numai soluţiunea 2^0.

2) Dacă se admite ca soluţiuni şi numerele în care una sau mai multe cifre de la începutul lui x^2 sau y^2 sunt nule, atunci se mai găsesc sistemele următoare:

$1^2 = 000001$	$2^2 = 000004$	$3^2 = 000009$	$16^2 = 000256$
$10^2 = 000100$	$20^2 = 000400$	$30^2 = 000900$	$25^2 = 000625$

$21^2 = 000441$	$31^2 = 000961$	$104^2 = 010816$	$413^2 = 170569$
$12^2 = 000144$	$14^2 = 000169$	$41^2 = 001681$	$134^2 = 017956.$

3) Căutând şi alte grupe de patrate de 6 cifre care să difere numai prin ordinea în care sunt scrise cifrele, am găsit pe aceeaşi cale din soluţia problemei 4403 rezultatele din următorul tabel, în care pentru motive de tehnica tiparului am scris întâi grupele de câte 2 numere, şi apoi pe acelea de 3, 4, 5.

$318^2 = 101124$ $348^2 = 121104$	$320^2 = 102400$ $490^2 = 240100$	$321^2 = 103041$ $549^2 = 301401$	$324^2 = 104976$ $843^2 = 710649$
$325^2 = 105625$ $395^2 = 150625$	$326^2 = 106276$ $776^2 = 602176$	$329^2 = 108241$ $491^2 = 241081$	$330^2 = 108900$ $990^2 = 980100$
$332^2 = 110224$ $649^2 = 421201$	$335^2 = 112225$ $461^2 = 212521$	$337^2 = 113569$ $769^2 = 591361$	$340^2 = 115600$ $749^2 = 561001$
$344^2 = 118336$ $619^2 = 383161$	$345^2 = 119025$ $399^2 = 159201$	$347^2 = 120409$ $499^2 = 249001$	$353^2 = 124609$ $403^2 = 162409$
$366^2 = 133956$ $966^2 = 933156$	$370^2 = 136900$ $440^2 = 193600$	$374^2 = 139876$ $626^2 = 391876$	$378^2 = 142884$ $921^2 = 848241$
$384^2 = 147456$ $669^2 = 447561$	$385^2 = 148225$ $722^2 = 521284$	$387^2 = 149769$ $687^2 = 471969$	$393^2 = 154449$ $771^2 = 594441$
$394^2 = 155236$ $596^2 = 355216$	$397^2 = 157609$ $413^2 = 170569$	$401^2 = 160801$ $410^2 = 168100$	$402^2 = 161604$ $801^2 = 641601$
$408^2 = 166464$ $804^2 = 646416$	$409^2 = 167281$ $904^2 = 817216$	$412^2 = 169744$ $988^2 = 976144$	$417^2 = 173889$ $891^2 = 793881$
$418^2 = 174724$ $689^2 = 474721$	$419^2 = 175561$ $869^2 = 755161$	$420^2 = 176400$ $690^2 = 476100$	$425^2 = 180625$ $709^2 = 502681$
$438^2 = 191844$ $441^2 = 194481$	$446^2 = 198916$ $959^2 = 919681$	$449^2 = 201601$ $460^2 = 211600$	$455^2 = 207025$ $860^2 = 722500$
$456^2 = 207936$ $777^2 = 603729$	$457^2 = 208849$ $533^2 = 284089$	$465^2 = 216225$ $789^2 = 622521$	$467^2 = 218089$ $991^2 = 982081$
$474^2 = 224676$ $792^2 = 627264$	$477^2 = 227529$ $723^2 = 522729$	$483^2 = 233289$ $573^2 = 328329$	$486^2 = 236196$ $981^2 = 962361$
$487^2 = 237169$ $854^2 = 729316$	$488^2 = 238144$ $659^2 = 434281$	$495^2 = 245025$ $735^2 = 540225$	$502^2 = 252004$ $650^2 = 422500$
$503^2 = 253009$ $730^2 = 532900$	$506^2 = 256036$ $605^2 = 366025$	$509^2 = 259081$ $905^2 = 819025$	$514^2 = 264196$ $818^2 = 669124$
$539^2 = 290521$ $955^2 = 912025$	$542^2 = 293764$ $574^2 = 619369$	$564^2 = 318096$ $783^2 = 613089$	$566^2 = 320356$ $575^2 = 330625$

$569^2 = 323761$ $844^2 = 712336$	$587^2 = 344569$ $812^2 = 659344$	$588^2 = 345744$ $612^2 = 374544$	$607^2 = 368449$ $706^2 = 498436$
$608^2 = 369664$ $806^2 = 649636$	$615^2 = 378225$ $915^2 = 837225$	$625^2 = 390625$ $797^2 = 635209$	$631^2 = 398161$ $944^2 = 891136$
$637^2 = 405769$ $686^2 = 470596$	$639^2 = 408321$ $651^2 = 423801$	$640^2 = 409600$ $980^2 = 960400$	$652^2 = 425104$ $671^2 = 450241$
$654^2 = 427716$ $879^2 = 772641$	$658^2 = 432964$ $982^2 = 964324$	$678^2 = 459684$ $978^2 = 956484$	$681^3 = 463761$ $858^2 = 736164$
$648^2 = 467856$ $822^2 = 675684$	$693^2 = 480249$ $702^2 = 490824$	$713^2 = 508369$ $916^2 = 839056$	$714^2 = 509796$ $774^2 = 599076$
$739^2 = 546121$ $782^2 = 611524$	$742^2 = 550564$ $752^2 = 565504$	$770^2 = 592900$ $995^2 = 990025$	$809^2 = 654481$ $919^2 = 844561$
$817^2 = 667489$ $974^2 = 948676$	$839^2 = 703921$ $889^2 = 790321$	$871^2 = 758641$ $884^2 = 781456$	$877^2 = 769129$ $986^2 = 972196$
$894^2 = 799236$ $963^2 = 927369$	$898^2 = 806404$ $920^2 = 846400$	$899^2 = 808201$ $910^2 = 828100$	$913^2 = 833569$ $914^2 = 835369$
$933^2 = 870489$ $948^2 = 898704$	$322^2 = 103684$ $901^2 = 813604$ $929^2 = 863041$	$323^2 = 104329$ $352^2 = 123904$ $557^2 = 310249$	$360^2 = 129600$ $540^2 = 291600$ $960^2 = 921600$
$363^2 = 131769$ $414^2 = 171396$ $444^2 = 197136$	$364^2 = 132496$ $463^2 = 213469$ $589^2 = 346921$	$371^2 = 137641$ $376^2 = 141376$ $646^2 = 417316$	$406^2 = 164836$ $604^2 = 364816$ $694^2 = 481636$
$407^2 = 165649$ $704^2 = 495616$ $736^2 = 541696$	$411^2 = 168921$ $531^2 = 281961$ $546^2 = 298116$	$445^2 = 198025$ $509^2 = 259081$ $905^2 = 819025$	$463^2 = 214369$ $589^2 = 346921$ $661^2 = 436921$
$444^2 = 244036$ $602^2 = 362404$ $802^2 = 643204$	$507^2 = 257049$ $705^2 = 497025$ $852^2 = 725904$	$508^2 = 258064$ $778^2 = 605284$ $805^2 = 648025$	$513^2 = 263169$ $519^2 = 269361$ $981^2 = 962361$
$565^2 = 319225$ $961^2 = 923521$ $965^2 = 931225$	$567^2 = 321489$ $591^2 = 349281$ $618^2 = 381924$	$633^2 = 400689$ $897^2 = 804609$ $930^2 = 864900$	$664^2 = 440896$ $803^2 = 644809$ $992^2 = 984604$
$717^2 = 514089$ $741^2 = 549081$ $903^2 = 815409$	$753^2 = 567009$ $837^2 = 700569$ $870^2 = 756900$	$336^2 = 112896$ $411^2 = 168921$ $531^2 = 281961$ $546^2 = 298161$	$442^2 = 195364$ $593^2 = 351649$ $629^2 = 395641$ $737^2 = 543169$

$375^2 = 150625$; $405^2 = 164025$; $504^2 = 254016$; $645^2 = 416025$; $708^2 = 501264$

5) Din acest tabel se pot separa patratele de 6 cifre, care diferă între ele prin ordinea cifrelor şi ale căror rădăcini diferă de asemeni *numai* prin ordinea cifrelor, de exemplu

$$364^2 = 132496 \quad \text{cu} \quad 463^2 = 213469$$

şi altele.

6) Cu ocazia rezolvărei problemei 590, prin care ceream patratele de 3 cifre care diferă numai prin ordinea cifrelor, s'au dat, la pag. 287 *Gazeta Matematică*, Vol. VI, câte-va exemple de cuburi şi bipătrate de 8 şi 9 cifre, care diferă numai prin ordinea cifrelor.

G-RAL GH. B.

PROBLEMA 4431. *Să se găsească cuburile de forma* ABBA, A *şi* B *fiind două numere de câte* m *cifre. Cazuri particulare* m = 1, 2, 3.

M. GHERMĂNESCU.

Fie N unul din cuburile căutate. Putem scrie

$$N = 10^{3m}A + 10^{2m}B + 10^m B + A = (10^{3m}+1)A + 10^m(10^m+1)B$$

$$N = (10^m+1)\,[(10^m+1)^2 A - 10^m(3A - B)].$$

Cum 10^m+1 nu este cub perfect, avem de deosebit două cazuri:

1°. $10^m + 1$ *este un număr prim.* Trebue atunci ca

$$(1) \qquad N_1 = (10^m+1)^2 A - 10^m(3A - B)$$

să se dividă prin $(10^m+1)^2$, ceea ce cere ca $3A - B$, care este mai mic ca $3 \cdot 10^m$, să fie identic nul, adică

$$B = 3A.$$

Cuburile căutate sunt deci

$$(2) \qquad N = (10^m+1)^3 A.$$

A fiind un cub de *m* cifre, astfel ca 3A să aibă tot *m* cifre, deci

$$A < \tfrac{1}{3}\, 10^m.$$

2°. $10^m = 1$ *nu este prim.* In acest caz $10^m + 1$ trebue să aibă divizori comuni cu N_1, ceeace revine, după (1), la a avea divizori comuni cu $3A - B$. Fie *d* un astfel de divizor, $10^m + 1 = da'$,

N_1 trebue să se dividă cu d^3, deci $3A - B = d^3 b'$, aşa că putem scrie

$$N = d^3 a' [A a'^2 - 10^m b'].$$

N fiind cub perfect, trebue ca $A a'^2 - 10^m b'$ să se dividă prin a'^2, deci $b' = a'^2 c$, astfel că $3A - B = d^3 a'^2 c = (10^m + 1)^3 c$, ceea ce e imposibil căci $3A - B < 3 \cdot 10^m$, afară de cazul $c = 0$, cu care regăsim rezultatele dela prima ipoteză.

Soluţia unică a problemei este astfel cuprinsă în formula dată de relaţia (2).

In cazurile particulare $m = 1, 2, 3$ avem respectiv $A = 1$, $B = 3$;

$$A = 27, B = 81; A = 125, 216, B = 375, 648,$$

cu soluţiile

$$1331 = 11^3, 27818127 = 303^3, 125375375125 = 5005^3$$

$$216648648216 = 6006^3.$$

Notă. La această problemă s'au primit foarte multe soluţii (!), în care raţionamentul este cam următorul:

Din

$$N = 10^{3m} A + 10^{2m} B + 10^m B + A = (10^m a + b)^3,$$

se deduce prin identificarea coeficienţilor puterilor lui 10^m

$$A = a^3, B = 3a^2 b, B = 3ab^2, A = b^3,$$

de unde $a = b$, $3A = B$, adică rezultatul de mai sus. Se uită însă că astfel de identificări se fac numai în egalităţile adevărate *oricare ar fi* x, care în cazul nostru evaluarea bine determinată $x = 10^m$. Soluţia dată de noi arată ce departe au fost *pseudorezolvitorii* acestei probleme de adevăratul raţionament.

Credem deci inutil să-i menţionăm aci. Poate că prin asta chiar îi servim!

M. G.

PROBLEMA 4434. *Să se stabilească identitatea:*

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)} + \frac{bc}{(c+a)(a+b)} + \frac{ca}{(a+b)(b+c)} = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr}.$$

CEZAR IVĂNESCU.

1. *Soluție* dată de D-nii: VINTILĂ GRIGORESCU (Liceul Militar Mânăstirea Dealu) și DIMITRIE MAVRODIN (Student).

A stabili identitatea cerută înseamnă a calcula valoarea funcțiunii simetrice

$$\sum \frac{ab}{(b+c)\ (c+a)}$$

a, b, c, laturile unui triunghiu fiind date de ecuația

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)\ x - 4Rrp = 0.$$

(A se vedea G. M. vol. XXXVIII, p. 248 și u.).

Aducând expresiunea dată la același numitor și ținând seama de identitatea *(G. M. loc. cit.)*:

$$\Sigma\, ab\,(a+b) = \Sigma\, a^2 b = 2p\,(p^2 + r^2 - 2Rr)$$

obținem succesiv

$$\sum \frac{ab}{(b+c)\ (c+a)} = \frac{\Sigma\, ab\,(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{\Sigma\, a^2 b}{\Sigma a^2 b + 2abc}$$

$$= \frac{2p\,(p^2 + r^2 - 2Rr)}{2p(p^2+r^2-2Rr)+8Rrp} = \frac{2p\,(p^2 + r^2 - 2Rr)}{2p\,(p^2 + r^2 + 2Rr)} = \frac{p^2+r^2-2Rr}{p^2+r^2+2Rr}.$$

c. c. t. d.

2. Au dat soluții analoage D-nii: MARIN DAN, PAUL DOBRESCU, M. MĂNAC, ION G. ȘABAC și ILIE IOAN ȚIȚEICA (Liceul Militar Mânăstirea Dealu), VASILE CEAUȘESCU (Liceul Militar Tg.-Mureș), TANASACIUC V. GLAUDIUS (Liceul Militar Cernăuți), H. FLORESCU și NICOLAE I. MILLU (Liceul Militar Chișinău) și MIRCEA A. NEGREA (Brăila).

3. Au *stabilit* identitatea, pe alte căi, D-nii: MARCEL F. AMĂRĂȘTEANU (Liceul Craiova), T. STOICESCU și IANCU N. SAGER.

4. D-nii RADU APOSTOL (Liceul Militar Mânăstirea Dealu), C. I. CHIRIAC (Școala Navală), IOAN GR. BOGDAN, VASILE GR. BOGZA, IOAN I. BUZINCU, IORDACHE ENACHE, PETRU P. COJOCARU, C. COTESCU, CĂLIN ION C. DUMITRU, C. N. GAVRILESCU, D. IGNAT și D. ST. MIHALCEA (Liceul Militar Iași), au *verificat* identitatea înlocuind în membrul al doilea

$$r = \frac{S}{p} \qquad R = \frac{abc}{4S} \qquad S^2 = p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)$$

și obținând membrul întâiu.

5. D-nii FLORENTIN G. SAVOVICI (Şc. preg. Ofiţeri de Geniu), MARIN NĂSTASE (Liceul Militar Mânăstirea Dealu), VIRGIL N. BUCUR, C. V. DĂSCĂLESCU şi C. N. GAVRILESCU (Liceul Militar Iaşi) şi CSEKE WILHELM (Student Cluj), au *verificat* identitatea, reducând ambii membri ai ei la aceeaşi expresiune.

I. S. A.

PROBLEMA 4499. *Să se găsească rădăcinile întregi ale ecuaţiei:*

$$\sqrt{x^3+1} = \sqrt[3]{x^2-1}\ .$$

I. IONESCU.

Ridicăm ambii radicali la puterea 6-a şi găsim:

$$(x^3+1)^3 = (x^2-1)^2,$$

$$\therefore\ (x+1)^3\,(x^2-x+1)^3 = (x+1)^2\,(x-1)^2,$$

de unde se vede imediat că $x=-1$ este o rădăcină dublă a acestei ecuaţii. Impărţind ecuaţia cu $(x+1)^2$, ne rămâne:

$$(x+1)\,(x^2-x+1)\,(x^2-x+1)^2 = (x-1)^2,$$

$$\therefore\ (x^3+1)\,(x^4-2x^3+3x^2-2x+1) = (x^2-2x+1),$$

$$\therefore\ x^2\,(x^5-2x^4+3x^3-x^2-x+2) = 0.$$

De aci se vede că $x=0$ este o rădăcină dublă a acestei ecuaţii. Ne rămâne de cercetat ecuaţia:

$$x^5-2x^4+3x^3-x^2-x+2) = 0.$$

Rădăcinile întregi ale acestei ecuaţii nu pot fi decât printre divizorii lui 2. Dar pentru $x=1$, $x=-1$, $x=2$, $x=-2$ prima parte a ecuaţiei devine 6 , — 4 , 20 , — 88.

Deoarece am făcut ridicări la puteri, e de văzut dacă rădăcinile găsite 0 şi — 1 convin ecuaţiei date. Prima convine dacă considerăm primul radical negativ, iar a doua verifică ecuaţia dată ori cum am considera primul radical.

PETRE D. COJOCARU.
(Piatra Neamţ).

Au rezolvat bine problema şi D-nii: NEGREA A. MIRCEA-LEONTE (Brăila), EMIL DE HERBAY (Liceul militar Iaşi), FLORESCU L. VICTOR şi RADU V. APOSTOL (Liceul Militar, Mănăstirea Dealului),

EXERCIŢII

38. Ecuaţia

$$250a^2 - b^2 = 10$$

e imposibilă în numere întregi.

M. G.

R. Se mai poate scrie $10(25a^2 - 1) = b^2$, unde primul membru e divizibil numai cu 10, pe când al doilea cu 100 sau de loc.

39. Ecuaţia

$$10a^2 - b^2 = 12$$

e imposibilă în numere întregi

M. G.

R. Trebue ca b să fie par, $b = 2c$, deci $5a^2 = 2(b^2 + 3)$. Membrul al doilea e divizibil numai cu 2, pe când primul e cu 4 sau cu o putere pară a lui 2. Se poate raţiona şi cu ajutorul divizorului 5.

40. Să se stabilească relaţia:

$$\frac{abc}{(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a)} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C.$$

M. C. POSTELNICESCU.

R. Ţinând seamă de relaţiile cunoscute:

$$r_a = \frac{S}{p-a}\ ;\ S = pr\ ;\ r = (p-a)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A$$

şi analoagele lor, putem scrie:

$$r_a + r_b = \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} = \frac{Sc}{(p-a)(p-b)} = \frac{Sc}{\frac{S^2}{p(p-c)}} = \frac{cp(p-c)}{S}$$

$$= \frac{c(p-c)}{r} = \frac{c(p-c)}{(p-c)\operatorname{tg}\frac{1}{2}C} = \frac{c}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}C}.$$

Tot astfel avem şi:

$$r_b + r_c = \frac{a}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}A}\ ;\ r_c + r_a = \frac{b}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}B}.$$

Făcând acum produsul acestor trei egalităţi, obţinem relaţia propusă.

41. Fie a', a'' rădăcinile ecuaţiei

$$ax^2 + 2bx + c = 0,$$

b', b'' şi c', c'' respectiv rădăcinile ecuaţiilor

$$bx^2 + 2cx + a = 0$$

$$cx^2 + 2ax + b = 0.$$

Dacă

$$a+b+c=0,$$

există relația

$$16[(a'-a'')^2+(b'-b'')^2+(c'-c'')^2]=(a'-a'')^2(b'-b'')^2(c'-c'')^2.$$

C. IONESCU-BUJOR.

$$(a'-a'')^2=\frac{4(b^2-ac)}{a^2},\quad (b'-b'')^2=\frac{4(c^2-ab)}{b^2},\quad (c'-c'')^2=\frac{4(a^2-bc)}{c^2}.$$

Relația impusă coeficienților dă

$$a^2-bc=b^2-ac=c^2-ab=-(ab+bc+ca).$$

(Culegere de Probleme de Algebră, A. G. IOACHIMESCU, Ed. III. Cap. II. Problema 26).

$$16[(a'-a'')^2+(b'-b'')^2+(c'-c'')^2]=\frac{64(b^2-ac)}{a^2b^2c^2}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$=\frac{64(b^2-ac)(ab+bc+ca)^2}{a^2b^2c^2}=\frac{64(a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab)}{a^2b^2c^2}$$

$$=(a'-a'')^2(b'-b'')^2(c'-c'')^2.$$

PROBLEME PROPUSE

4535. Să se găsească trei numere întregi consecutive ale căror pătrate să aibă ca sumă un număr de forma $aa\ldots a$.

G-L GH. BUICLIU.

4536. Fracția $a/b/c$ poate avea două interpretări. In ce caz cele două valori sunt egale?

I. IONESCU.

4537. Câte numere divizibile cu 11 se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 luate o singură dată toate? Care este cel mai mare și care este cel mai mic dintre aceste două numere?

V. THÉBAULT.

4538. Să se construiască un triunghiu înscris într'un cerc dat, cunoscând raportul a două laturi, unghiul lor şi un punct oarecare M de pe latura a treia (sau prelungirea ei).

PETRE TROFIMOV.

4539. Se consideră triunghiul dreptunghiu ABC ($A = 90^0$, $\overline{AC} > \overline{AB}$). Se construesc pe catetele lui segmentele $\overline{BB_1} = \overline{AC}$ (spre exterior) şi $\overline{CC_1} = \overline{AB}$ (spre interior), ce determină triunghiul AB_1C_1.

Să se arate, că avem:

$$\sphericalangle C_1 = 45^0 + \sphericalangle C\,;\ \sphericalangle B_1 = 45^0 - \sphericalangle C,$$

$$\overline{AD_1}\sqrt{2} = \overline{DC} - \overline{AB}\,;\ 2\sqrt{2} \cdot \overline{AD} = \overline{D_1B_1} - \overline{D_1C_1},$$

D şi D_1 fiind respectiv picioarele înălţimilor în cele două triunghiuri.

ALEXANDRU V. NICULESCU.

4540. Se consideră două drepte Δ şi Δ' în acelaşi plan. Se ia un punct A fix pe Δ şi un punct M mobil pe Δ'. Se construeşte triunghiul isoscel AMB, cu vârful în M şi cu baza AB pe Δ.

Se mai consideră punctul N, simetric al lui A în raport cu Δ'. Perpendiculara în N pe AM se întâlneşte cu perpendiculara în B pe BM într'un punct P, al cărui loc se cere.

N. BOTEA.

4541. In pătratul ABCD se înscrie triunghiul AEF (E pe BC şi F pe CD). A_1, E_1, F_1 fiind mijloacele laturilor triunghiului AEF, să se arate că dreptele BF_1, CA_1 şi DE_1 sunt concurente.

THEODOR G. COCEA.

4542. Fie x', x'' rădăcinile ecuaţiunii cu coeficienţi reali

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Să se formeze ecuațiunea în y, care admite ca rădăcini numerele:

$$\frac{x'}{x''}+\frac{x''}{x'} \text{ și } \frac{x'}{x''}-\frac{x''}{x'}.$$

Să se dea condițiunea, necesară și suficientă, ca ecuațiunea formată să aibă rădăcinile reale.

O. N. ȚINO.

4543. Să se rezolve ecuațiunea

$$2\sin x=\cos 3x+\cos 5x=0.$$

IULIU DEAC.

4544. Notațiunile fiind cele obișnuite, să se stabilească relația:

$$\left[\frac{r_a-r_b}{\sin\frac{A-B}{2}}\right]^2+\left[\frac{r_b-r_c}{\sin\frac{B-C}{2}}\right]^2+\left[\frac{r_c-r_a}{\sin\frac{C-A}{2}}\right]^2=8R(4R+r).$$

M. VELEA.

4545. Să se rezolve ecuațiunea:

$$\sin^4x-\sin^3x\cos x-3\sin^2x\cos^2x+3\sin x(\cos 3x+3\cos x\sin^2x)=0.$$

I. CURCHI.

4546. Să se arate, că seria cu termenul general

$$u_n=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}-\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$$

este convergentă.

M. GHERMĂNESCU.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu F. M. (4373); *Antonescu Filofteia* (4519); *Belloiu C.* (4519); *Caracudovici Margareta* (4507); *Cercelaru D.* (4519, 20); *Cojocaru P. P.* (4456, 507, 19); *Cristea Em.* (4519); *Deceanu Gh.* (4519); *Enăşescu V.* (4519); *Florescu V.* (4519); *Gavrilescu N. C.* (4512, 19, 24); *Herbay Emil* (4507); *Lenco I.* (4519); *Mănac M.* (4519); *Mihăileanu N. N.* (4269); *Negrea A. M. Leonte* (2318, 458, 536, 4300, 425, 85, 510, 24, 32); *Petrescu I. Ion* (4456, 520); *Popescu V. Fl.* (4519, 20); *Postelnicescu C. M.* (4434, 67, 524); *Ştefănescu N.* (4519); *Stoica D. Al.* (4456, 524); *Tarasiuc S.* (4491, 502).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe acelaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia V* (sub presă).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogă taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“
Casa Gazeta Matematică
Calea Griviţei No. 158
Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceiaş adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN (Telefon 4-3929).**

complet. 1934-35

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XL

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1935

SUMARUL

1. Sur des triples de cercles associés au triangle . . . . . *R. Goormaghtigh.*
2. Vechile geometrii românești (urmare) *I. Ionescu.*
3. Din geometria triunghiului . . . . . *General Gh. I. Popescu*
4. Note matematice: 50 — 51.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 248.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 1287, 1534, 2360, 2536, 3833, 4366, 4408, 4415, 4421, 4433, 4444.
9. Exerciții: 42 — 43.
10. Probleme propuse: 2446, 4547 — 4558.
11. Tabla de Materii.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1935

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „**Gazeta Matematică**“ având sediul în Bucureşti („Casa *Gazeta Matematică*“, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*“ în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 11, 12, 18, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 70, 80, 84, 89, 91, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 16, 17, 26, 38, 41, 42, 45, 49, 52, 58, 61, 64, 65, 66, 68, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 94, 95, 97, 93, 500, 01, 03, 04, 05, 08, 09, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela „*Gazeta Matematică*“ cu preţul de 12 lei.

SUR DES TRIPLES DE CERCLES ASSOCIES AU TRIANGLE [1])

La question No. 2536 de M. D. PERIEȚEANU (G. M., XL — 478) suggère quelques relations intéressantes relatives à des groupes de trois cercles ayant leurs centres aux sommets d'un triangle donné.

Soient x et X, y et Y, z et Z les rayons de six cercles ayant deux par deux leurs centres aux sommets A, B, C d'un triangle; désignons par P le centre radical des cercles de rayons x, y, z, puis par Q celui des cercles de rayons X, Y, Z, enfin par ω le milieu de PQ.

On a alors

$$\overline{BP}^2 - y^2 = \overline{CP}^2 - z^2,$$

$$\overline{BQ}^2 - Y^2 = \overline{CQ}^2 - Z^2,$$

et dès lors

$$y^2 + Y^2 - (z^2 + Z^2) = \overline{BP}^2 + \overline{BQ}^2 - (\overline{CP}^2 - \overline{CQ}^2) = 2(\overline{B\omega}^2 - \overline{C\omega}^2).$$

1°. Supposons que ω soit le centre du cercle d'EULER et appelons ω_a la projection de ω sur BC et A_m le milieu de BC; on a

$$2(\overline{B\omega}^2 - \overline{C\omega}^2) = 4a \cdot \omega_a A_m = 4a \cdot \frac{c^2 - b^2}{4a} = c^2 - b^2.$$

Par suite,

$$y^2 + Y^2 - (z^2 + Z^2) = c^2 - b^2.$$

Si l'on tient compte de la relation analogue relative aux sommets A et B, on trouve

$$x^2 + X^2 + a^2 = y^2 + Y^2 + b^2 = z^2 + Z^2 + c^2,$$

ce qui est relation de la question No. 2536.

2°. Si ω coincide avec le centre du cercle ABC, on a $B\omega = C\omega$, et l'on trouve

$$x^2 + X^2 = y^2 + Y^2 = z^2 + Z^2.$$

---

1) La 10 Iulie s'a primit dela D-l V. THÉBAULT un articol intitulat *Sphères du Tétraèdre* care se va publica ulterior.

3°. Si ω est l'orthocentre, on a

$$\overline{B\omega}^2 - \overline{C\omega}^2 = \overline{BA}^2 - \overline{CA}^2 = c^2 - b^2,$$

et, par conséquent,

$$y^2 + Y^2 - (z^2 + Z^2) = 2(c^2 - b^2).$$

Tenant encore compte de la relation analogue relative aux sommets A et B, on obtient

$$x^2 + X^2 + 2a^2 = y^2 + Y^2 + 2b^2 = z^2 + Z^2 + 2c^2.$$

4°. Si ω est le centre du cercle inscrit, et si ω_a est la projection de ω sur BC, on a

$$\overline{B\omega}^2 - \overline{C\omega}^2 = \overline{B\omega_a}^2 - \overline{C\omega_a}^2 = (p-b)^2 - (p-c)^2 = a(c-b);$$

on en déduit

$$y^2 + Y^2 - (z^2 + Z^2) = 2ac - 2ab,$$

puis, par analogie,

$$x^2 + Y^2 - 2bc = y^2 + Y^2 - 2ca = z^2 + Z^2 - 2ab.$$

5°. Lorsque ω est le symétrique du centre du cercle d'EULER par rapport au centre O du cercle circonscrit, on aura, d'après le 1°,

$$2(\overline{B\omega}^2 - \overline{C\omega}^2) = b^2 - c^2,$$

et, par conséquent,

$$x^2 + X^2 - a^2 = y^2 + Y^2 - b^2 = z^2 + Z^2 - c^2.$$

6°. En raisonnant de même l'on voit aisément que, si ω est le symétrique de l'orthocentre par rapport à O, l'on a

$$x^2 + X^2 - 2a^2 = y^2 + Y^2 - 2b^2 = z^2 + Z^2 - 2c^2.$$

7°. Enfin, lorsque ω est le symétrique du centre du cercle inscrit par rapport à O, l'on a

$$x^2 + X^2 + 2bc = y^2 + Y^2 + 2ca = z^2 + Z^2 + 2ab.$$

R. GOORMAGHTIGH
Bruges (Belgique).

VECHILE GEOMETRII ROMÂNEȘTI

(Conferință ținută la Societatea Română de Științe, Secțiunea matematică, în ziua de 10 Iunie 1935)

(urmare)

In No. trecut am vorbit despre publicațiunile române de geometrie până la anul 1837, când importanța dată geometriei prin *Regulamentul Organic* a dus la necesitatea de a se tipări cărți de *Geometrie elementară teoretică* și *practică*.

Prima geometrie tipărită în limba română a fost o traducere a renumitei geometrii a lui LEGENDRE, întitulată:

„Elemente de Geometrie după LEGENDRE. *Tipărită cu cheltuiala din casa Schoalelor nationale pentru scholarii ce urmează acest curs în Colegiul din Sf. Sava. Bucuresti în Tipografia lui* ELIAD. *1837"*.

Autorul traducerii nu este nicăeri arătat, azi se știe că el este PETRACHE POIENARU, după cum arată și DEM. YARCU în *„Bibliografia Chronologică română"* din 1873. Aceeași geometrie, cu modificările ei aduse de către BLANCHET, a fost scoasă din nou în 1865, 1868 și 1873 de către I. M. RÂUREANU și E. A. ANGELESCU, fără ca aceștia să vorbească ceva despre ediția din 1837. Geometria lui LEGENDRE era cartea cea mai bună de geometrie elementară franceză de pe vremuri; în ea s'a modernizat știința, căci mai înainte cei mai mulți autori nu făceau decât să traducă cât mai bine pe EUCLIDE. Cartea mai avea faima că conține demonstrația postulatului lui EUCLIDE, găsită insuficientă mai târziu. Traducătorul a făcut o bună alegere oprindu-și atențiunea la această carte, care ulterior a avut 11 ediții noui pe fiecare an.

PETRACHE POIENARU fusese elev al lui LAZĂR, secretar intim al lui TUDOR VLADIMIRESCU la 1821; el a studiat științele și ingineria în străinătate vreo opt ani, fusese elev la Politehnica din Viena, la Școala Politehnică din Paris, lucrase la harta Franței și făcuse excursii științifice prin Anglia. La 1832 vine în țară și este numit profesor de geometrie și fizică la Colegiul Sf. Sava, iar după puțin timp Director al Școalelor naționale și al acelui Colegiu. Pentru necesitățile cursului său a tipărit în românește *Geometria lui* LEGENDRE în 1837.

Nomenclatura lui PETRACHE POIENARU este influențată de a fostului său profesor GHEORGHE LAZĂR. El completează termenii lăsați la o parte de LAZĂR, lasă la o parte pe unii inutili, și românizează pe alții. In această geometrie găsim mai întâiu foarte mulți termeni de matematică generală introduși atunci prima dată în cărți de matematică, ca *definiție, axiomă, propoziție, propietate, ipoteză, demonstrație, rezoluție,* sau *deslegare, rezultat, exemplu, problemă, explicație, expresie, formulă, deslușire, sholie, construcție geometrică, simetrie, rezon,* etc. Găsim calificative noui ca *invers, reciproc.* Sunt însă și multe cuvinte sau expresiuni românești, ca *băgare de seamă* pentru observațiune, *a tălmăci,* pentru a explica, *mincinos* pentru falș, etc.

POIENARU vorbește de *corpuri* sau *solide* care au *întindere, dimensii, suprafețe* și *volume.* Liniile au *punturi* la *extremități,* care au între ele o *distanță, distanția* cu pluralul *distănțiile. Linia* este *dreaptă, frântă,* sau *încovoiată* (curbă). O dreaptă poate fi *orizontală, verticală* sau *oblică* sau *aplecată,* ori *compusă.* La o linie avem partea de *d'asupra* și cea *de desupt.* Două drepte se pot *îmbina* în un punt de întâlnire, două punturi se pot *împreuna* (uni). Pe o linie avem *sensuri,* avem punte *intermediare.* La *unghiuri* găsim calificativele cu *alăturate, adiacente, opuse la vârf, corespondente, alterne interne* și *alterne externe, înscris, ascuțit, teșit, drept;* apoi unghiu *în dreptul* unei laturi, în loc de opus. Unghiului îi mai zice și *căscătură, inclinație* și *aplecare* la oblice. Se introduce apoi cuvântul *cadran.*

La *poligoane* întâlnim cuvintele noui *cuadrilater, pentagon, ecsagon, octogon, decagon, dodecagon, pentedecagon,* apoi calificativele respective *poligonal, patrunghiular, ecsagonal,* etc. Găsim apoi cuvintele *baz, apotemă, diagonală, contur, dreptunghiu,* calificativele *echilateral, isoscelet, convex.*

La chestiuni de asemănarea figurilor găsim cuvintele *proporție, proporțional, de mijloc proporționat, a treia* și *a patra proporțională, în de mijloc și de margine* pentru media și extrema rație. La arii sunt puține cuvinte noui, ca *figuri echivalente, cuadratură.*

La *cerc,* căruia îi zice uneori *circ,* se introduce cuvintele *a atinge, tangent, tangentă, contact, circonferință, semicerc, semicirconferință, sector* cu pluralul *sectori, segment, centru* cu pluralul *centruri,* cercuri *concentrate* și *concentrice,* cerc *scris împrejur* sau *circumscris,* etc.

La geometria în *spaţiu*, găsim *plan* cu pluralul *planuri*, *dungă* în loc de muchie, *osie* în loc de axă, de *suprafeţe curbe*, de *poliedre* şi dă numele celor regulate: *tetraedru*, *ecsaedru*, *octaedru*, *dodecaedru* şi *icosaedru*. La diedre le zice *colţ*. Găsim apoi *secţie*, *faţă laterală*, *solid trunchiat*, suprafeţe *cilindrice* şi *sferice*. La sferă avem cuvintele *pol*, *revoluţie*, *fus* cu pluralul *fuse*. Laturile triunghiurilor sferice sunt *coastele* lor, excesului sferic îi zice *covârşire*, triunghiurile pot fi *birectanglu* şi *trirectanglu*. Se serveşte apoi de cuvântul *volum*.

Ca semne întrebuinţează $=$, $>$, $<$. Intrebuinţează şi notaţia π.

* * *

A doua geometrie apărută în limba română este a lui GHEORGHE ASACHI, intitulată:

„*Elemente de matematică*, de AGA G. ASACHI. *Partea III. Geometria elementară. Eşii. In tipografia Albinei. 1838*".

Se afirmă că ea ar fi fost făcută după cursul lui BÉZOUT; nu am avut la dispoziţiune acel curs pentru a cotrola acest lucru. Influenţa franceză se resimte la nomenclatură, însă cum ASACHI şi-a făcut studiile la Lemberg, Viena şi Roma se resimt şi influenţe din aceste localităţi. In Prefaţă ne spune că a paradosit această geometrie la 1816 la Liceul public, în limba românească.

In cartea lui ASACHI găsim cuvinte neîntrebuinţate mai înainte şi anume ca termeni generali *propunere* pentru chestiune şi teoremă, *prinţipii*, *rezonement*, *dislegare*, *supoziţie*, *reguli*, *problime*, *porţie*, *minimum*, *giosnic* (de jos); apoi expresiuni ca *luare aminte*, *să loveşte* (concordă), *a trânti* şi *a ţinti* idei, a *tractarisi* chestiuni. In loc de geometrie superioară, ASACHI zice *geometrie mai adâncită*.

Ca elemente geometrice găsim *puncturi*, care pot fi *statornice* (fixe), *linie ruptă* şi *curbă*, *trăsătură*, *părticele*, etc. Unghiul e şi *plecarea mutuală a două drepte*, el poate fi *drept-unghiu*, pe care îl scrie în două părţi, *obtus* sau *tâmp*. Vorbeşte de unghiuri *complimentare* şi *suplimentare*, de *cvadrant*, de împărţirea *sexagesimală* şi *centezimală*, *de patrariu unghiular*, etc.

La *poligoni* sau *multunghiu* găsim *triunghiu rectangular*, *isosceles* sau *isoscel*, *ecviangol*, apoi *rectangol*, *patrulaturi*, *şaseunghiu*, *eptagon*, *coastă* pentru latură, *ocol* sau *cercuitoare* pentru perimetru, *transversală*, etc.

La cerc, centrului îi mai zice şi *ţintă* sau *miezul cercului*, iar la plural *centruri; cercular* în loc de circular; *punctul atingerii* sau *contact; pătrariu de cerc, segment capabil, sector cercuitor, semicircul.* Periferiei cercului îi zice *circumpregiurime*, însă uneori scapă şi *circumferenţie;* de asemenea întâlnim *semi-cercumpregiurime* dar şi *semicircumferenţie.* Vorbeşte şi de *elipsă, oval,* etc.

La asemănări găsim *triunghiuri asămănate, similitudine, mijlociu proporţională,* etc.

La geometria în spaţiu găsim *trup* sau *corpos, unghiul plan, unghiu poliedru, triedru, paralelipiped rectangul, soliditate, volum* sau *volumen* şi *volumuri; ţilindrul* are o *osioară,* ce trece prin *centrul bazisei cercuitoare.* A genera este a *plăsnui,* iar generatoarei îi zice *plăsnuitoare.* Vorbeşte de *trunchiu de con,* iar la sferă găsim *cerc mare* şi *mic* cu *poluri, fălie, zonă, scufie sferică* (calotă), *sector* şi *segment sferic.*

La descrierea instrumentelor de desemn şi de arpentagiu găsim cuvintele *lineal,* sau *liniariu,* sau *îndreptariu,* care se verifică punând două alături şi printre ele să nu fie nicio *zare.* Descrie *compasul de proporţie* şi de *reducţie* cu *braţele* lor, şi *raportorul* de măsurat unghiuri. Pentru ridicări pe *teren* întrebuinţează *măsuţa geometrică* (planşeta), pusă pe *tripedă, tripicioare* sau *trii picioare,* un *fir-plumb,* un *alidat cu plane crăpate* (pinulă), o *eşelă;* apoi *grafometru, dioptre, vernier, nivel* sau *cumpănă.* La ridicări întâlnim *punct neapropiitor* (neaccesibil), sau *împedecări* (obstacole), etc. Ecuatorului îi zice *brâul pământului.*

* * *

A treia Geometrie, apărută la un an după a lui ASACHI, este intitulată, pe coperta exterioară: *„Geometrie practică“*, iar pe prima pagină: *„Moş Pătru sau învăţătorul de sat. Convorbiri asupra geometriei. Bucureşti. In tipografia Colegiului Sf. Sava. 1839“.*

Autorul nu este arătat; s'a stabilit însă că a fost ALEXE MARIN, fost elev al Colegiului din Bucureşti, apoi profesor la *Slatina,* la *Craiova,* la *Bucureşti,* bursier pentru studiile fizico-chimice în străinătate şi în urmă profesor la Universitate de Chimie. El a mai tipărit o Aritmetică şi tot sub titlul de mai sus *„Convorbiri despre mecanică“.*

Autorul şi-a închipuit un ţăran ştiutor de carte, *Moş Pătru* care explică consătenilor operaţiile pe care ţăranii le văzuseră făcute

de hotarnicii cari au ridicat planul satului lor. Lui *Moş Pătru* nu i se pare tocmai greu de priceput cum fac inginerii planurile, din contră *„Croitorul, cismarul, adesă au trebuinţă de o Geometrie prea subţire şi mult mai adâncă, de pe cum se crede de obşte, spre a da hainelor, pantofilor ce es din mâinile lor, forma cea mai favorabilă, şi cea mai ticnitoare“*. *Moş Pătru* afirmă chiar că *„toţi meşterii, ca să zic aşa, au trebuinţă de ceva Geometrie“*. *Moş Pătru* nu e pretenţios, căci spune ţăranilor: *„Fără a voi ca să fac din voi niscai învăţaţi, nu-mi voiu pierde vremea a vă demonstra (dovedi) strâşniceşte propietăţile ce vi le voiu desluşi, ci mă voiu mărgini a vă face să simţiţi adevărul acesta, şi câte odată trebuie să vă încredeţi încă şi în zisele mele“*. Moşul a făcut dar şi el ceea ce ilustrul matematician francez CAUCHY a spus unui prinţ căruia îi preda matematicele, şi care la o chestiune spunea într'una că nu pricepe. La un moment dat, CAUCHY plictisit îi zice:

„Îţi declar pe onoarea mea că e aşa cum îţi spun“. Prinţul îi răspunde atunci:

„Dacă făceai această declaraţie dela început, te credeam pe cuvânt şi nu mai erea nevoie de nicio demonstraţie !“.

S'ar părea dar că *Alexe Marin* a căutat numai termeni populari pe care să-i priceapă învăţătorii dela sate. Ideea aceasta însă a realizat-o numai în mică măsură. Astfel găsim *baston* sau *băţ* pentru jalon, *căpătâiu* pentru extremitate, *capră* pentru compas, *cracuri* la liniile unui teu, căruia îi zice simplu T., *linie crâmpeiată* la linia frântă, *dreptar* la echer, *înliniate* în loc de colineare, *însuşire* în loc de proprietate, *întocmiţiune* în loc de exactitate, *linii arcuite* în loc de curbe, *maiag* sau *momâie* la baliza, a *poftori* în loc de a repeta, *răsghinare* pentru distanţa dela piciorul unei perpendiculare la al unei oblice, *scumpătate* la exactitate, *subîntinzătoare* la coardă, *teşit* la obtuz, *ţăruşi* la picheţi, etc. Se resimte însă mult influenţa termenilor din cartea după care a tradus. Astfel aranjând şi aci, ca şi mai sus după alfabet, găsim termenii *alidada, arpentagiu, arpentor, baz, cercuferenţă, compas, dioptră, fişă, mixt, orizontală, prinţip, problem, suprafaţă, volum, zonă,* etc.

Autorul ia probabil după cartea franceză de care s'a servit şi măsurile de lungime ale sistemului metric. Pluralul la metru este *metruri;* subdiviziunile lui sunt *zeceametru, sutametru, mieametru,*

iar pentru multiplii metrului dă *decametrul, ectometrul, kilometrul* şi *miriametrul.* Spune că metrul a fost dedus din măsurarea *rotocolului* pământului şi e cam până la înălţimea buricului unui om de stat mijlociu.

La multe din numiri se resimte nomenclatura lui POIENARU.

Cartea are 95 pagini de 145 × 90 cu 71 planşe în interior în dreptul chestiunilor respective, ceea ce face că sunt multe planşe cu câte o singură figură.

* * *

După aceste trei geometrii apărute una după alta în 1837, 1838 şi 1839 nu s'au mai tipărit altele în româneşte până la 1852.

In ceea ce priveşte Geometriile apărute în Ardeal, după Catalogul D-lui ONISIFOR GHIBU, publicat în *Gazeta Matematică,* Anul XXII (1916 — 1917) pagina 300, niciuna nu ar fi apărut înainte de 1885 în limba română. Poate că cercetări noui să reculeze această dată. Nu avem cunoştinţă de eventuale Geometrii române tipărite în Banat, Bucovina sau Basarabia.

După cum se vede din cele expuse, nomenclatura noastră geometrică elementară erea bine înşghebată încă de pe la 1838, cu apariţiunea Geometriilor lui PETRAKE POIENARU şi GHEORGHE ASACHI. Cei ce au venit după ei au avut puţin de făcut. Dacă ştiinţa geometriei nu le datoreşte nimic original, noi trebue să le fim recunoscători pentru munca care au depus-o de a-i stabili limba şi pentru a o răspândi cât mai mult, punând la îndemâna şcolarilor cărţi bine alese şi folositoare. Aceeaşi recunoştinţă o datoreşte şi învăţământul nostru inferior şi rural lui ALEXE MARIN pentru cărţile lui adresate învăţătorilor de sat.

I. IONESCU.

DIN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

Asupra ortopolului, faţă de un triunghiu şi faţă de triunghiurile formate de laturile unui patrulater

Se consideră triunghiul ABC şi o dreaptă Δ_1. Fie a, b, şi c, proecţiile vârfurilor A, B şi C pe această dreaptă. Perpendicularele duse din a, b şi c pe laturile BC, CA şi AB, concură în un punct ω, numit *ortopolul* dreptei Δ_1, faţă de triunghiul ABC.

La o dreaptă, corespunde un singur ortopol. Voi arăta că la *un punct* ω, *din planul triunghiului* ABC, *luat ca ortopol, corespund trei drepte* Δ.

I. *Proprietăți, în legătură cu ortopolul.* (Fig. 1).

Fie O centrul cercului ABC, și O_1 proecția sa pe Δ_1; A'B'C', triunghiul median și O' centrul cercului EULER.

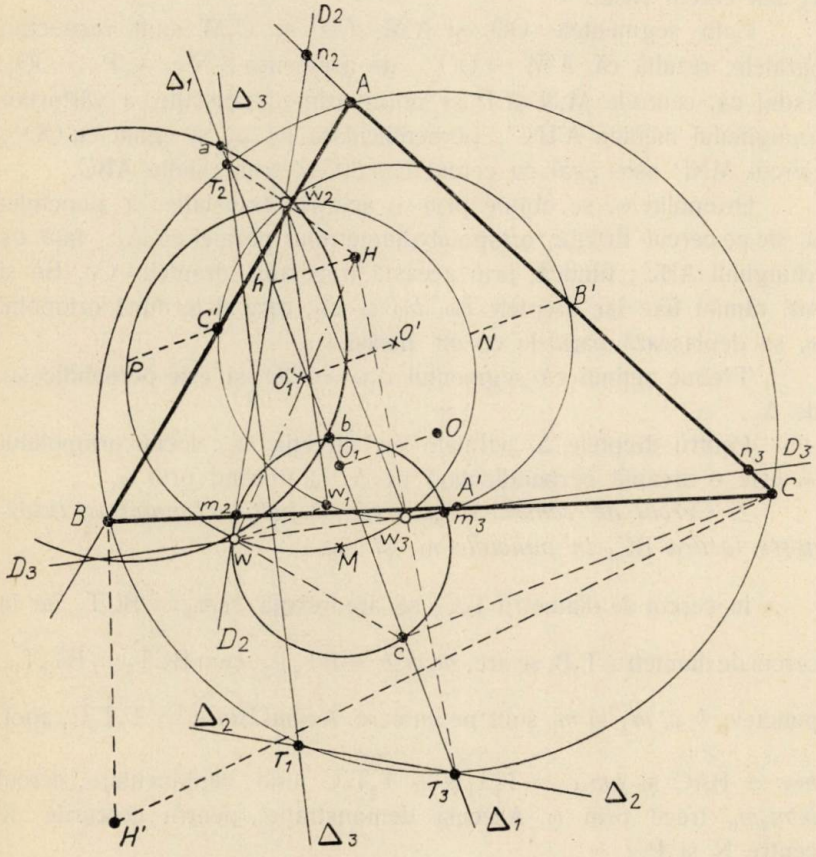


Fig. 1

1. *Ortopolul* ω, *al dreptei* Δ_1, *se obține prin o translație,— perpendiculară pe* Δ_1 *și egală cu depărtarea dela* O *la această dreaptă —, a ortopolului* ω_1, *depe cercul* EULER, *corespunzător diametrului, paralel cu* Δ_1.

Fie M, N şi P, centrele cercurilor $c\omega b$, $c\omega a$ şi $b\omega a$ şi cum aceste cercuri se taie câte două, pe dreapta Δ_1, centrele M, N şi P sunt pe cercul care trece prin ω — reciproca teoremei lui SALMON [1]).

Dreapta A'M este perpendiculară pe Δ_1, în mijlocul segmentului bc iar O_1M, este perpendicular pe BC, în mijlocul segmentului m_2m_3, — punctele m_2 şi m_3 fiind proecţiile punctelor T_2 şi T_3, unde Δ_1 taie cercul ABC.

Cum segmentele OO_1 şi A'M, OA' şi O_1M sunt respectiv, paralele, rezultă că $A'M = OO_1$, de asemenea $B'N = C'P = OO_1$. Astfel că, centrele M,N şi P, se obţin prin o translaţie, a vârfurilor triunghiului median A'B'C', perpendiculară pe Δ_1 şi egală cu OO_1. Cercul MNP este egal cu cercul EULER, al triunghiului ABC.

Ortopolul ω, se obţine prin o aceeaşi translaţie, a punctului ω de pe cercul EULER, ortopolul diametrului paralel cu Δ_1, faţă de triunghiul ABC; fiindcă, prin această translaţie, dreptele Cc, Bb şi Aa, rămân fixe iar dreptele $c\omega$, $b\omega$ şi $a\omega$, care determină ortopolul ω, se deplasează paralele cu ele însăşi.

Trebue reţinut că segmentul $\omega_1\omega = OO_1$ şi este perpendicular de Δ_1.

Pentru dreptele Δ, paralele cu direcţia Δ_1, locul ortopolului ω, este o dreaptă perpendiculară pe Δ_1 şi trecând prin ω_1.

2. *Cercul de centru* M *şi trecând prin ortopolul* ω, *întâlneşte latura* BC, *în punctele* m_2 *şi* m_3.

In cercul de diametru T_3C, se are relaţia $\overset{\frown}{bcm_3} = \overset{\frown}{BCT_3}$ iar în cercul de diametru T_2B, se are, $\overset{\frown}{m_3m_3b} = \overset{\frown}{BT_2T_3}$, cum $\overset{\frown}{BCT_3} = \overset{\frown}{BT_2T_3}$, punctele b, c, m_2 şi m_3 sunt pe un cerc. Având $\overset{\frown}{Bm_3c} = \overset{\frown}{T_2T_3C}$, apoi, $\overset{\frown}{b\omega c} = \overset{\frown}{BAC}$ şi $\overset{\frown}{bm_3c} = \overset{\frown}{T_2T_3B} + \overset{\frown}{T_2T_3C}$ fiind suplimentare, cercul bcm_2m_3 trece prin ω. Aceeaşi demonstraţie, pentru cercurile de centre N şi P.

3. *Dreptele* SIMSON D_2 *şi* D_3, *relative la punctele* T_2 *şi* T_3, *în raport cu triunghiul* ABC, *trec prin ortopolul* ω. (J. NEUBERG).

Trebue să se arate că $\overset{\frown}{m_2m_3\omega} = \overset{\frown}{Bm_3p_3}$, pentru ca dreapta SIMSON D_3, să treacă prin ω. Punctul p_3 este proecţia lui T_3 pe AB.

---

1) F. G. M. *Exercices de gèometrie.* 7e ed. pag. 334 thèorème 170.

In cercul de diametru BT_3, se are $\overset{\frown}{BT_3T_2} = \overset{\frown}{Bm_3b}$, iar în cercul M, $\overset{\frown}{Bm_3b} = \overset{\frown}{T_2cm_2}$.

Rezultă că dreptele cm_2 şi T_3B sunt paralele. Cum dreptele T_3p_3 şi $c\omega$ sunt paralele, ca perpendiculare pe AB, se deduce că $\overset{\frown}{m_2m_3\omega} = \overset{\frown}{m_2c\omega} = \overset{\frown}{Bm_3p_3}$.

4. *Dreptele* SIMSON D_2 *şi* D_3, *trec respectiv prin punctele de intersecţie* ω_2 *şi* ω_3, *ale cercurilor* EULER *şi* MNP.

Fie ω_2 şi ω_3 extremităţile coardei comune cercurilor egale A'B'C' şi MNP, fie h proecţia ortocentrului H pe Δ_1.

Dreptele SIMSON, trec respectiv, prin mijloacele segmentelor HT_2 şi HT_3 şi trebue arătat că segmentul $\omega_2\omega_3$ este perpendicular pe, şi în mijlocul segmentului Hh.

Figura $HhO'O'_1$ este un trapez isoscel, fiindcă $OO' = O'H = hO'_1$. Coarda $\omega_2\omega_3$ este perpendiculară pe $O'O'_1$ şi în mijlocul acestui segment, de unde rezultă că va fi perpendiculară pe, şi în mijlocul segmentului Hh. Coarda $\omega_2\omega_3$ este paralelă cu Δ_1.

5. *Cazuri particulare, ale poziţiei dreptei* Δ_1.

a) Când cercurile EULER şi MNP, devin tangente, punctele lor de intersecţie ω_2 şi ω_3, se confundă, iar dreptele SIMSON D_2 şi D_3 se confundă şi trec prin ortopolul ω şi punctul de tangentă, de mai sus. Tot astfel punctele T_2 şi T_3 se confundă şi deci, dreapta Δ_1, va fi tangentă la cercul ABC.

Cum punctele m_2 şi m_3 se confundă, cercurile de centre M, N şi P, trecând prin ω, devin tangente respectiv, la laturile triunghiului ABC.

b) Când dreapta Δ_1, nu taie cercul ABC, dreptele SIMSON D_2 şi D_3 sunt imaginare, însă ortopolul ω este real, fiindcă Δ_1 este o dreaptă reală.

6. *Ortopolul* ω, *este ortocentru în triunghiul* $\omega_1\omega_2\omega_3$.

Triunghiul $\omega_1\omega_2\omega_3$ este înscris în cercul EULER iar dreapta $\omega\omega_1$ este o înălţime în acest triunghiu, fiindcă $\omega\omega_1$, este perpendiculară pe Δ_1 şi deci pe coarda comună $\omega_2\omega_3$, a cercurilor egale EULER şi MNP.

Cum cercurile simetrice cercului circumscris, faţă de laturile triunghiului, trec prin ortocentru, cercul MNP fiind simetricul cercului EULER faţă de $\omega_2\omega_3$, se deduce că ω, este ortocentrul triunghiului $\omega_1\omega_2\omega_3$.

7. *Ortopolul* ω, *se poate obține prin trei translații, ale cercului* EULER, *pe direcțiile* $\omega_1\omega$, $\omega_2\omega$ *și* $\omega_3\omega$ *și egale respectiv, cu segmentele* $\omega_1\omega$, $\omega_2\omega$ *și* $\omega_3\omega$.

S'a arătat la punctul 1 cum se obține ω din ω_1, cercul EULER devenind cercul MNP. Ori, cum ω este ortocentru în triunghiul $\omega_1\omega_2\omega_3$, cercurile $\omega\omega_2\omega_3$, $\omega\omega_1\omega_3$, $\omega\omega_1\omega_2$ fiind egale cu cercul EULER, circumscris triunghiului $\omega_1\omega_2\omega_3$, ortopolul ω se poate obține, prin translații din punctele ω_1, ω_2 și ω_3, egale respectiv, cu segmentele $\omega\omega_1$, $\omega\omega_2$ și $\omega\omega_3$.

8. *Rezultă că, un punct* ω *considerat ca ortopol, corespunde la trei drepte* Δ_1, Δ_2 *și* Δ_3, *față de un triunghiu* ABC.

Se consideră triunghiul $T_1T_2T_3$ omotetic cu $\omega_1\omega_2\omega_3$ centrul de omoteție fiind ortocentul H (raportul 2/1).

Triunghiul $T_1T_2T_3$ este înscris în cercul ABC, de centru O și proecțiile acestui punct pe laturile triunghiului $T_1T_2T_3$, sunt mijloacele laturilor și din cele arătate la punctul 1, segmentul OO_1, mediatricea referitoare laturei T_2T_3, este egală cu $\omega\omega_1$.

De aici rezultă că, mediatricele triunghiului $T_1T_2T_3$, sunt respectiv, egale cu segmentele $\omega\omega_1$, $\omega\omega_2$ și $\omega\omega_3$.

Ținând seamă de cele arătate la punctul 7, rezultă că dreptele Δ_1, Δ_2 și Δ_3, respectiv, laturile T_2T_3, T_3T_1 și T_1T_2 ale triunghiului $T_1T_2T_3$, *au același ortopol* ω, față de triunghiul dat ABC.

Punctele ω_1, ω_2 și ω_3, de pe cercul EULER, sunt ortopolurile diametrelor paralele cu Δ_1, Δ_2 și Δ_3, față de același triunghiu ABC.

9. *Dreptele* $\omega\omega_1$, $\omega\omega_2$ *și* $\omega\omega_3$ *sau respectiv,* D_1, D_2 *și* D_3 *dreptele* SIMSON, *ale vârfurilor triunghiului* $T_1T_2T_3$, *față de laturile triunghiului* ABC, *sunt tangente la ipocicloida cu trei rebrusmente, având cercul* EULER *al triunghiului* ABC, *ca cerc tritangent.*

Înfășurătoarea dreptelor SIMSON, ale punctelor cercului circumscris, față de laturile triunghiului ABC, este o ipocicloidă cu trei rebrusmente, o curbă de casa 3-a; de unde rezultă că, ducând din un punct ω, cele trei tangente la ipocicloidă, se obțin prin intersecția acestora, cu cercul EULER al triunghiului ABC, ortopolurile ω_1, ω_2 și ω_3.

După cum aceste trei tangente sunt: reale, două confundate sau imaginare, tot astel vor fi și laturile triunghiului T_1T_2 și T_3.

10. *Dreptele* SIMSON, *ale vârfurilor unuia din triunghiurile* ABC *şi* $T_1T_2T_3$, *faţă de laturile celuilalt, sunt concurente în acelaşi punct* ω, *ortopolul laturilor unuia din triunghiuri, faţă de celalt.*

Făcând aceeaşi demonstraţie, punctul ω este ortopolul laturilor BC, CA şi AB, faţă de triunghiul $T_1T_2T_3$, în care dreptele ωa, ωb şi ωc, sunt dreptele SIMSON, ale vârfurilor A, B şi C, faţă de laturile triunghiului $T_1T_2T_3$.

Ortocentrul H' al acestui triunghiu, este simetricul ortocentrului H, faţă de ω.

Cazuri particulare. Când ω este în centrul O, triunghiul $T_1T_2T_3$ este egal cu ABC şi vârfurile corespondente, sunt simetrice faţă de O. Când ω este în H, $T_1T_2T_3$ se confundă cu ABC.

* * *

II. *Proprietăţile ortopolului, faţă de triunghiurile formate de un patrulater.*

Fie patrulaterul complet ABCDEF, în care AD, BE şi CF sunt diagonalele (Fig. 2).

Ortocentrele triunghiurilor ABC, AEF, BDF şi CDE, sunt pe o dreaptă R, coarda comună a cercurilor descrise pe diagonale, ca diametre.

11. *Ortopolurile aceleiaşi drepte* Δ, *faţă de cele patru triunghiuri, formate de un patrulater, sunt pe o dreaptă* K.

Fie a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 şi f_1, proecţiile vârfurilor patrulaterului complet, pe dreapta Δ.

Dacă ω'_1, ω'_2, ω'_3 şi ω'_4 sunt ortopolurile acestei drepte, faţă de triunghiurile ABC, AEF, BDF şi CDE, este suficient să se arate, că trei dintre aceste ortopoluri, de exemplu, ω'_4, ω'_1 şi ω'_3 sunt în linie dreaptă.

Ţinând seamă de construcţia ortopolului, razele ω'_4c_1, ω'_4d_1 şi ω'_1c_1, respectiv, paralele cu razele ω'_3b_1, ω'_1b_1 şi ω'_3d_1, formează un exagon $c_1d_1b_1\omega'_3\omega'_1\omega'_4c_1$ având vârfurile b_1, d_1 şi c_1 pe dreapta Δ iar laturile numerotate din patru în patru, în acelaşi sens, fiind paralele, rezultă că vârfurile ω'_4, ω'_1 şi ω'_3, sunt pe o dreaptă K, pe care se va găsi şi ortopolul ω'_2.

Când dreapta Δ, este paralelă cu una din laturile patrulaterului complet (cazul Fig. 2), dreapta ortopolurilor K, este paralelă cu dreapta ortocentrelor R.

In cazul patrulaterului simplu, format din ortocentrul şi cele trei vârfuri ale unui triunghiu, dreapta K, divine perpendiculară pe Δ.

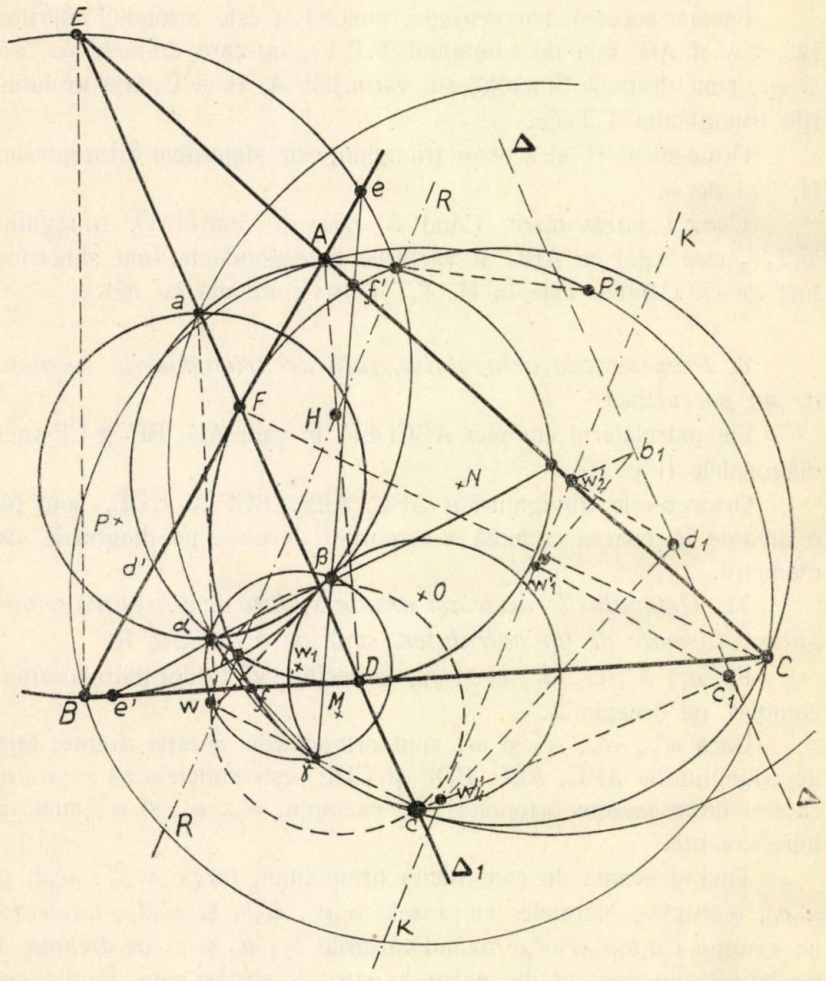


Fig 2

In continuare notez cu Δ, dreapta EFD şi fie *d* şi *d'*, *e* şi *e'*, *f* şi *f'*, picioarele înălţimilor ce pleacă din vârfurile D, E şi F, pe laturile opuse în triunghiurile DBF, EAF, ECD, adică pe laturile triunghiului ABC.

Când dreapta Δ, se confundă cu Δ_1, față de această dreaptă, ortopolul ω'_1 se confundă cu ω, iar ω'_2, ω_3 și ω'_4 se confundă respectiv cu ortocentrele triunghiurilor, considerate mai sus.

Ortopolul ω se găsește deci, pe dreapta ortocentrelor R. Se vor păstra notațiile din partea I, relative la triunghiul ABC și ω ortopolul dreptei Δ_1 și se va ține seamă, de proprietățile găsite.

Dreptele *ef'*, *fd'* și *de'* formează triunghiul $\alpha\beta\delta$.

12. *Triunghiurile* $\alpha\beta\delta$ *și* ABC, *sunt invers asemenea și ortologice.*

Dreptele *ef'*, *fd'* și *de'* sunt antiparalelele dreptei Δ_1, respectiv, față de laturile unghiurilor C, A, și B, ale triunghiului ABC.

Isogonalele dreptelor A*a*, B*b* și C*c*, perpendiculare pe Δ_1, față de aceleași unghiuri, trec prin punctul P_1, de pe cercul ABC.

Astfel că, laturile $\delta\beta$, $\delta\alpha$ și $\alpha\delta$ ale triunghiului $\alpha\beta\delta$, sunt respectiv perperdiculare pe dreptele P_1A, P_1B și P_1C.

Punctul P_1 fiind pe cercul ABC, razele vectorii ce pleacă din acest punct la vârfurile triunghiului ABC, făcând unghiuri egale sau suplimentare cu unghiurile acestui triunghiu, rezultă din toate cele arătate că, triunghiul $\alpha\beta\delta$ este invers asemenea și ortologic, cu ABC.

13. *Cercul* $\alpha\beta\delta$, *trece prin* ω, *ortopolul dreptei* Δ_1 *iar centrul acestui cerc, este* ω_1 *ortopolul diametrului, paralel cu* Δ_1.

Cercurile având ca diametru diagonalele CF și BE taie, respectiv, dreptele ωb și ωc în punctele *b* și β', *c* și δ'.

Dreapta *ef'*, trece prin punctele β' și δ', fiindcă $\widehat{\delta' cC}$ și $\widehat{\beta' bB}$ sunt respectiv suplimentare cu $\widehat{AFE}$ și $\widehat{FEA}$ iar dreapta *ef'* este antiparalela dreptei Δ_1, față de dreptele AF și AE.

Cercul de diametru AD, taie dreapta ωa în *a* și α', astfel că dreptele *de'* și *fd'* trec respectiv, prin α' și β'; α' și δ' și rezultă că, punctele α', β' și δ' se confundă cu α, β și δ.

Punctele *c*, δ, *b* și β sunt pe cercul de centru A', fiindcă perpendicularele din mijloacele coardelor $c\delta$ și $b\beta$ trec prin A' iar $\widehat{\delta cb} = \widehat{b\beta\delta}$.

Centrul cercului $\alpha\beta\delta$, este la intersecția perpendicularelor duse din A', B' și C', respectiv pe $\beta\delta$, $\delta\alpha$ și $\alpha\beta$. Trebue arătat că acest centru, este punctul ω_1, ortopolul diametrului paralel cu Δ_1.

In triunghiul $\widehat{\omega bc}$, dreptele $\omega\omega_1$ şi ωM sunt isogonale, — M este centrul cercului ωbc şi $\omega\omega_1$ înălţime.

Cum $\beta\delta$ şi bc sunt antiparalele în $\widehat{b\omega c}$, rezultă că ωM este perpendiculară pe $\beta\delta$.

Cum segmentul ωM este egal şi paralel cu segmentul $\omega_1 A'$, urmează că centrul cercului circumscris triunghiului $\alpha\beta\delta$ este ortopolul ω_1.

Având $\widehat{a\omega b} = \widehat{\alpha\delta\beta}$, cercul $\alpha\beta\delta$ trece prin ω.

14. *Ortopolul* ω, *luat ca centru de inversiune: Cercul* $\alpha\beta\delta$ *este inversul dreptei* Δ_1, *cercurile de centre* M, N şi P, *trecând prin* ω, *sunt inversele laturilor triunghiului* $\alpha\beta\delta$ *iar cercul* MNP, *este inversul dreptei, simetrica faţă de* ω, *a dreptei* SIMSON *relativă la ortopolul* ω, *în triunghiul* $\alpha\beta\delta$.

Faţă de cele arătate la punctele 12) şi 13), ortopolul ω, este centrul radical a şease cercuri, formând patru grupe de câte trei cercuri şi determinând patru axe radicale ωH, ωa, ωb şi ωc.

Pe ultimele trei axe, se găsesc vârfurile α, β, δ şi respectiv, punctele a, b şi δ ale dreptei Δ_1.

Prin ω trec patru cercuri: $\omega\alpha\beta\delta$, ωbc, ωba şi ωac, respectiv de centre ω_1, M, P şi N, în plus, mai trece cercul MNp.

Cele 4 cercuri sunt respectiv, inversele dreptei Δ_1 şi ale laturilor triunghiului $\rho\beta\delta$.

Inversul centrului M, în cercul ωbc, este simetricul punctului ω, faţă de latura $\beta\delta$ de unde se deduce că inversul cercului MNP, este o dreaptă simetrică faţă de ω, a dreptei SIMSON, a punctului ω, relativă la triunghiul $\alpha\beta\delta$.

15. *Triunghiurile* $\alpha\beta\delta$ *şi* MNP *sunt polare reciproce, faţă de un cerc, cu centrul în ortopolul* ω.

In cercul de centru M şi trecând prin ω, raza ωM este perpendiculară pe latura $\beta\delta$ — punctul 13 —; prin urmare triunghiurile $\alpha\beta\delta$ şi MNP sunt ortologice. Patrunghiurile complete $\omega\alpha\beta\delta$ şi ωMNP, având două vârfuri care coincid în ω, iar laturile opuse perpendiculare, rezultă că triunghiurile $\alpha\beta\delta$ şi MNP, sunt polare reciproce, în raport cu cercul de centru ω şi având ca rază $\frac{\mu}{\sqrt{2}}$, dacă μ^2 este puterea de inversiune a lui ω, faţă de cele şease cercuri arătate la punctul 14.

16. *In cazul, când dreapta* Δ_1, *este un diametru al cercului* ABC, *cercul* $\alpha\beta\delta$ *se reduce la ortopolul* ω_1, *de pe cercul* EULER.

Raza cercului $\alpha\beta\delta$ este egală cu zero, când ω se confundă cu ω_1.

Puterea de inversiune μ^2, devenind egală cu zero, unul din punctele de intersecţie, al fiecărui din cele patru grupuri de câte trei cercuri — punctul 14 — se va găsi în ortopolul ω_1 de pe cercul EULER; printre aceste puncte de intersecţie este şi al celor trei cercuri, descrise pe diagonale ca diametre.

Cercurile de centre M, N şi P se confundă cu cercurile de centre A', B' şi C', care vor trece prin ortopolul ω_1.

Cercul MNP se va confunda cu cercul EULER.

GENERAL GH. I. POPESCU.

NOTE MATEMATICE

50. *Carrés parfaits et nombres premiers.* Dans un *Supplément* à **Mathesis,** 1934, nous avons donné la liste des carrés formés de chiffres *tous* différents.

1. Voici ceux de ces carrés curieux dont la racine est un nombre *premier absolu.*

Carrés de trois chiffres.

$13^2 = 169$ $17^2 = 289$ $19^2 = 361$ $23^2 = 529$ $29^2 = 841$ $31^2 = 961$.

Carrés de quatre chiffres.

$37^2 = 1369$ $43^2 = 1849$ $53^2 = 2809$ $59^2 = 3481$ $61^2 = 3721$

$71^2 = 5041$ $73^2 = 5329$ $79^2 = 6241$ $89^2 = 7921$.

Carrés de cinq chiffres.

$113^2 = 12769$ $137^2 = 18769$ $179^2 = 32041$ $181^2 = 32761$

$191^2 = 36481$ $193^2 = 37249$ $199^2 = 39601$ $233^2 = 54289$

$269^2 = 72361$ $281^2 = 78961$ $311^2 = 96721$.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ACADEMIA R.P.R.

Carrés de six chiffres.

$353^2 = 124609$ $367^2 = 134689$ $397^2 = 157609$ $463^2 = 214369$
$487^2 = 237169$ $509^2 = 259081$ $557^2 = 310249$ $571^2 = 326041$
$593^2 = 351649$ $647^2 = 418609$ $661^2 = 436921$ $677^2 = 458329$
$709^2 = 502681$ $733^2 = 537289$ $757^2 = 573049$ $797^2 = 635209$
$829^2 = 687241$ $839^2 = 703921$ $929^2 = 863041$.

Carrés de sept chiffres.

$1039^2 = 1079521$ $1117^2 = 1247689$ $1277^2 = 1630729$
$1307^2 = 1708249$ $1433^2 = 2053489$ $1873^2 = 3508129$
$1949^2 = 3798601$ $2027^2 = 4108729$ $2069^2 = 4280761$
$2203^2 = 4853209$ $2311^2 = 5240271$ $2339^2 = 5470921$
$2557^2 = 6538249$ $2699^2 = 7284601$ $2711^2 = 7349521$
$2731^2 = 7458361$ $2801^2 = 7845601$ $2927^2 = 8567329$
$3041^2 = 9247681$.

Carrés de huit chiffres.

$4157^2 = 17280649$ $4663^2 = 21743569$ $4967^2 = 24671089$
$4987^2 = 24870169$ $6043^2 = 36517849$ $6199^2 = 38427601$
$6737^2 = 45387169$ $6763^2 = 45738169$ $6899^2 = 47596201$
$7237^2 = 52374169$ $7549^2 = 56987401$ $7621^2 = 58079641$
$8191^2 = 67092481$ $8599^2 = 73942801$ $8623^2 = 74356129$
$9181^2 = 84290761$.

Carrés de neuf chiffres.

$13147^2 = 172843609$ $20089^2 = 403567921$
$21397^2 = 457831609$.

2. *Remarques.* 1°. Avec les chiffres

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

pris une fois, nous avons trouvé [1]) 86 carrés parfaits qui sont des multiples de 9, puisque

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 = \mathcal{M}9.$$

1) *Mathesis*, loc. cit.

Leur racine carrée est donc un nombre *composé*. Par suite, les carrés formés de chiffres différents, dont la racine est un nombre premier, ne peuvent avoir que 2, 3, 4, . . . , 8 ou 9 chiffres.

2°. Tout nombre premier est de la forme $\mathcal{M}6 + 1$ est son carré se termine, à droite, par 1 ou 9.

3°. Les chiffres

2, 5, 8 sont de la forme $\mathcal{M}3 - 1$

0, 3, 6, 9 — $\mathcal{M}3$

1, 4, 7 — $\mathcal{M}3 + 1$.

Cette remarque conduit aisément aux suivantes :

Les chiffres 2, 5, 8 et 0, 3, 6, 9 puis 1, 4, 7 et 0, 3, 6, 9 et enfin 1, 2, 4, 5 et 0, 3, 6, . . . , ne peuvent *tous* être exclus dans l'écriture des carrés ci-dessus de *trois* chiffres, car le nombre formé des trois chiffres restant serait $\mathcal{M}3$.

Pour la même raison, les trois chiffres 2, 5, 8 ou 1, 4, 7 combinés chacun avec trois des chiffres 0, 3, 6, 9, ne peuvent être tous exclus dans l'écriture des carrés de *quatre* chiffres.

Il en est ainsi des trois chiffres 2, 5, 8 ou 1, 4, 7, combinés avec deux des chiffres 0, 3, 6, 9, pour les carrés de *cinq* chiffres, puis des quatre chiffres 0, 3, 6, 9 dans les carrés de *six* chiffres, ou bien de deux des chiffres 2, 5, 8 combinés avec deux des chiffres 1, 4, 7, dans les mêmes carrés.

Pour les carrés de *sept* chiffres, on ne peut écarter tous les chiffres 2, 5, 8 ou 1, 4, 7 ou encore les chiffres 0, 3, 6, 9, pris trois par trois.

Pour les carrés de *huit* chiffres, on ne peut négliger tous les chiffres 0, 3, 6, 9, pris deux à deux pas plus que les chiffres 2, 5, 8 et 1, 4, 7 combinés deux par deux. Ainsi, *trois* des chiffres 0, 3, 6, 9, au moins, figurent dans les carrés ci-dessus de huit chiffres.

Enfin, les chiffres 0, 3, 6, 9 sont compris à la fois dans les carrés de *neuf* chiffres dont la racine est un nombre premier.

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

51. *Rezolvarea problemei propuse la lucrarea scrisă la trigonometrie de la concursul „Gazetei Matematice" din 1935.*

La lucrarea scrisă de trigonometrie, a fost propusă următoarea problemă:

Un inginer trebue să construiască o linie electrică peste o vale adâncă în munte. Cei doi stâlpi A *şi* B, *susţinători ai liniei peste această vale, au înălţimile* h_A *şi* h_B *şi se găsesc situaţi respectiv la cotele* k_A *şi* k_B, *stâlpul* B *fiind aşezat pe o creastă având lungimea* l.

Lungimea sârmei necesare acestei linii se calculează cu ajutorul formulei

$$L = a_0\left[l + \frac{a^2 \cos^2\gamma}{24\,\xi^2}\right],$$

în care

L *este lungimea sârmei*
a_0 *este distanţa între vârfurile celor 2 stâlpi*
a *este distanţa orizontală între cei 2 stâlpi*
γ *este unghiul făcut de aceste direcţii*
ξ *este un parametru dat.*

Cum îşi va determina inginerul elementele necesare calculării lungimii firului ce trebue să întindă peste vale?

Aplicaţiune. Să se calculeze, cu ajutorul logaritmilor, lungimea firului în următoarea situaţie:

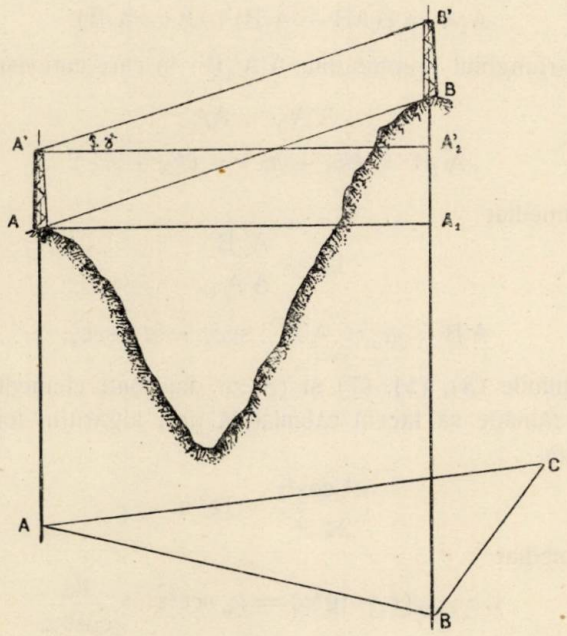
$$h_A = 20\text{ m.} \quad h_B = 22\text{ m.} \quad k_A = 1130\text{ m.} \quad k_B = 1215\text{ m.}$$

$$l = 60\text{ m.} \quad \hat{B} = 90^0 \quad \hat{C} = 83^0\,47' \quad \xi = 600.$$

Elementele care trebuesc determinate sunt distanţele a_0 şi a şi unghiul γ, făcut de aceste direcţii. Dacă facem figura care să ne redea situaţia celor 2 stâlpi, vedem că este suficient a determina numai distanţa dintre bazele lor pentruca celelalte elemente să se determine imediat prin simple calcule. Determinarea acestei distanţe este o problemă cunoscută şi rezolvată în toate cursurile de trigonometrie pentru liceu şi constă în a determina distanţa între 2 puncte inaccesibile. (In cazul nostru între punctele A şi B). Pentru aceasta măsurăm pe pământ o bază BC, care să treacă prin punctul B; apoi cu un instrument de măsurat unghiurile se măsoară unghiurile B şi C; triunghiul ABC, în care cunoaştem o latură (BC) şi unghiurile

adiacente ($\hat{B}$ şi $\hat{C}$) ne va da distanţa căutată AB, printr'un calcul simplu (Cazul I. de rezolvare a triunghiurilor oarecare).

Din enunţ s'a dat că *„stâlpul* B *este aşezat pe o creastă având lungimea l"*. In consecinţă, inginerul va lua această creastă drept bază şi din extremităţile ei va viza cu ajutorul unui aparat de măsurat unghiurile către stâlpul A, măsurând astfel unghiurile B şi C. Apoi, cu ajutorul relaţiilor cunoscute



$$A + B + C = 180^0 \qquad (1)$$

şi

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \qquad (2)$$

va determina lungimea

$$AB = \frac{l \sin C}{\sin A} \qquad (3)$$

căci

$$BC = l.$$

Cunoscând distanța AB, poate determina *distanța orizontală* a dintre cei 2 stâlpi. In adevăr, în triunghiul dreptunghiu AA_1B cunoaștem ipotenuza AB, determinată mai sus și cateta A_1B, egală cu diferența celor două cote

$$A_1 B = k_B - k_A \tag{4}$$

deci se poate determina imediat cateta A_1A.

Vom avea:

$$A_1A = \sqrt{(AB + A_1B)\,(AB - A_1B)} \tag{5}$$

Din triunghiul dreptunghiu $A'A'_1B'$, în care cunoaștem catetele

$$A'A'_1 = AA_1$$

$$A'_1B' = (k_B + h_B) - (k_A + h_A) \tag{6}$$

deducem imediat

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{A'_1B'}{A'A'_1} \tag{7}$$

$$A'B' = a_0 = A'A'_1 \,,\ \sec\gamma = a \,.\, \sec\gamma \tag{8}$$

Relațiunile (3), (5), (7) și (8) ne dau toate elementele căutate.

Mai rămâne să facem calculabilă prin logaritmi formula dată. Dacă notăm

$$\frac{a^2 \cos^2\gamma}{24\,\xi^2} = \operatorname{tg}^2\varphi \tag{9}$$

obținem imediat

$$L = a_0\,(l + \operatorname{tg}^2\varphi) = a_0 \sec^2\varphi = \frac{a_0}{\cos^2\varphi} \tag{10}$$

Aplicație. Relațiunea (1) ne dă

$$A = 180^0 - (B + C) = 6^0\,13'$$

iar relațiunea (3)

$$AB = \frac{60 \sin 83^0 47'}{\sin 6^0 13'}\,.$$

Aplicând logaritmii, avem

$$\log AB = \log 60 + \log \sin 83^0 47' + \operatorname{colog} \sin 6^0 13'$$

$$= 1{,}77815 + \bar{1}{,}99744 + 0{,}96542 = 2{,}74101$$

$$\therefore\ AB = 550{,}825 \text{ m.} \cong 551 \text{ m.}$$

Relațiunea (4) ne dă

$$A_1B = 1215 - 1130 = 85 \text{ m.}$$

deci

$$AB + A_1B = 551 + 85 = 636 \text{ m.}$$

$$AB - A_1B = 551 - 85 = 466 \text{ m.}$$

Din (5) vom obține deci

$$A_1A = a = \sqrt{636 \times 466}$$

care calculată cu ajutorul logaritmilor ne va da

$$\log a = \tfrac{1}{2}(\log 636 + \log 466) = 2{,}735925$$

$$\therefore \quad a = 544{,}306 \text{ m.} \cong 544 \text{ m.}$$

Din (6) deducem

$$A_1'B = (1215 + 22) - (1130 + 20) = 87 \text{ m.}$$

iar din (7)

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{87}{544}$$

calculând cu ajutorul logaritmilor

$$\log \operatorname{tg} \gamma = \log 87 + \operatorname{colog} 544 = \bar{1}{,}20392$$

$$\therefore \quad \gamma = 9^0 5' 4'', 6 = 9^0 5' 50''.$$

Relația (8) ne dă

$$a_0 = 544 \sec 9^0 5' 50''$$

calculând cu logaritmii obținem

$$\log a_0 = \log 544 + \operatorname{colog} \cos 9^0 5' 50'' = 2{,}73560 + 0{,}00548 = 2{,}74108$$

$$\therefore \quad a_0 = 550\,,913 \text{ m} \cong 551 \text{ m.}$$

Cunoaștem acum toate elementele necesare calculului lungimii firului. Din relațiunea (9), cu ajutorul logaritmilor, deducem:

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \tfrac{1}{2}[2 \log 544 + 2 \log \cos 9^0 5' 50'' + \operatorname{colog} 24$$

$$+ 2 \operatorname{colog} 600] = \bar{1}{,}26187$$

$$\therefore \quad \varphi = 10^0 21' 24'', 6 = 10^0 21' 25''.$$

In sfârşit relaţia (10) ne va da, tot cu ajutorul logaritmilor

$$\log L = \log 551 + 2\,\text{colog}\,10'21'25'' = 2{,}75539$$

$$\therefore \quad L = 569{,}363 \cong 570 \text{ m.}$$

Observaţiuni. 1°. In calculul nostru am presupus

$$k_B > k_A \text{ şi } h_B > h_A$$

este evident că am fi obţinut acelaşi rezultat şi dacă

$$k_B < k_A \text{ şi } h_B < h_A .$$

2°. Această problemă, atât de simplă şi care nu necesită, pentru rezolvarea ei, decât aplicarea noţiunilor elementare de trigonometrie, n'a fost rezolvată de niciunul din cei 22 de candidaţi. Numai unul singur, D-l M. NĂSTASE din clasa VI a liceului Militar „N. Filipescu" dela Mânăstirea Dealului, a înţeles chestiunea schiţând soluţiunea; totuşi nu a dus-o până la capăt.

ING. ION S. ANTONIU.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XLI. No. 5. Mai 1935. New-York. Sympsosium din Pittsburgh asupra teoriei grupurilor şi mecanicei cantice, de J. R. KLINE. Adunarea din Februarie la New-York, de J. R. KLINE. Adunarea din Aprilie dela Unversitatea Stanford, de T. M. PUTMAN. Sumare de memorii.

Mathesis. Tomul XLIX. No. 5. Mai 1935. Gembloux. Asupra suprafeţelor strâmbe, de CL. SERVAIS. Asupra geometriei triunghiului, de J. LEEMANS. Asupra poligoanelor convexe de $(4n+2)$ laturi regulate, de J. MAHRENHOLZ. Câteva proprietăţi ale unui triunghiu oarecare ale cărui laturi sunt împărţite în medie şi extrema raţie, de CL. THIRY. Asupra legii generale a ecarturilor fortuite, de C. LURQUIN.

Journal de Mathématiques élémentaires. Anul 59. No. 19. Iulie 1935. Paris.

Idem. No, 20. Iulie 1935.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXVIII. Fascicola VI. Decemvrie 1934. Buenos Aires.

Boletin Matematico. Anul VIII. No. 3. Mai 1935. Buenos Aires. Calculul unor integrale definite, de G. G. CONSTANTINESCU. Notă pe marginea homotetiei şi inversiunii, de B. I. BAIDAFF.

Numerus. Volumul I. Caietul II. Iunie 1925. Bucureşti. Geometria triunghiului, de TR. LALESCU. (urmare).

V. THÉBAULT. *Cuţitul lui* ARCHIMEDE. (Extras din *Annales de la Société scientifique de Bruxelles.* Supliment la *Mathesis).* Louvain 1935.

V. THÉBAULT. *Asupra geometriei triunghiului.* (Extras din *Annales de la Société scientifique de Bruxelles.* Supliment la *Mathesis).* Louvain 1935.

JOSE GONZALEZ GALE. *Matematicas financiarias.* Primera Parte. Intereses y anualidades ciertas. Tercera edition. Buenos Aires 1935.

Autorul a tipărit o primă ediţie în 1910 sub titlul *Algebra financiară.* Această nouă ediţie tratează despre dobânzi şi sconturi, şi anume Cap. I dobânzile simple; Cap. II dobânzi compuse şi continuie; Cap. III sconturile comercial, raţional, şi compus, cu scadenţele comune şi medii.

Partea II-a se ocupă de anuităţile sigure, şi anume Cap. IV anuităţile cu dobândă compusă; Cap. V cele cu dobândă simplă; Cap. VI cu amortismentele; Cap. VII cu rentele; Cap. VIII cu anuităţile variabile; Cap. IX cu împrumuturile cu obligaţiuni.

Volumul se termină cu un Apendice în care se dau noţiuni de calculul probabilităţilor şi de calculul diferenţelor finite.

Cartea are 208 pagini de 185×115.

Chestiunile sunt tratate cu toată desvoltarea necesară, cu explicarea tabelelor de calcul, şi cu exemple de aplicaţiuni.

Autorul este un bun cunoscător al chestiunilor de ordin financiar, astfel că acest volum este folositor celor ce se ocupă de operaţiuni financiare. Limba spaniolă, pentru cărţile de matematice nu constitue o dificultate serioasă pentru Români de a o pricepe.

I. I.

CERERI

248. Care este cea mai veche aritmetică tipărită în limba română, în Bucovina ?

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIV.
Donată de *Comitetul Revistei.*

J. HOÜEL. Sur le calcul des Equipollences. Paris 1869.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

CONST. GRAUR. Cu privire la Franz Ferdinand. Bucureşti 1935.
Donată de *« Adevărul »*; Societate Anonimă, Bucureşti.

* * *

Cărţile ce urmează au fost donate de *Institutul Naţional Român pentru studiul amenajării şi folosirii isvoarelor de energie. (I. R. E.)* prin D-l Inginer C. BUŞILĂ.:

1 — 8. *Buletinul I. R. E.* Anul I. No. 1 — 4. Anul II. No. 1 — 4.

9 — 10. *Buletinul C. E. R.* Vol. I. Fasc. 1. Anul 1933. Vol. II. Fasc. 2 Anul 1934.

11. Comité d'études pour l'amélioration du facteur de puissance. Tome I. Bucureşti 1928.

12. Comité pour la participation de la Roumanie à la Conférence mondiale de l'énergie. Raports présentés par le Comité National Roumain pour la session spéciale de la Conférence mondiale qui a eu lieu à Londres en 1928. Bucarest 1929.

13. L'électrification de la Roumanie. (Les travaux de 1926 de la Commission d'électrification de la Roumanie). Bucarest 1931.

14 — 16. Mijloace de tracţiune pe căile ferate. (Comunicări şi discuţiuni) Vol. I — III. Bucureşti 1933.

17. Norme pentru recepţionarea şi aprecierea combustibililor solizi: cărbuni, coks, brichete. Bucureşti 1934.

18. Prescripţiuni pentru motoare de tracţiune. Bucureşti 1934.

19. Prescripţiuni pentru reglementarea raporturilor dintre liniile electrice de energie şi cele de transmisiune. Bucureşti 1934.

20. Prescripţiuni privitoare la liniile aeriene pentru curenţi intenşi. Bucureşti 1932.

21. Prescripţiuni pentru turbinele cu aburi. Bucureşti 1931.

22. Prescripţiuni pentru transformatorii de măsură. Bucureşti 1931.

23. Prescripţiuni pentru contorii de energie de curent alternativ. Bucureşti 1931.

24. Prescripţiuni pentru executarea instalaţiunilor electrice interioare. Bucureşti.

25. Prescripţiuni pentru maşini electrice. Bucureşti 1931.

26 — 27. Referate şi rapoarte technice Vol. III şi IV. Bucureşti.

28. Rapports préparés par le Comité National Roumain pour la deuxième Session plèniere de la Conférence mondiale de l'énergie qui a eu lieu à Berlin en 1930. Bucarest 1930.

29. Simboli grafici pentru instalaţiuni electrice de curent tare. Bucureşti 1931.

30. Trafication de l'énergie électrique. Bucureşti 1932.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1287. *Fie* $az^2 + 2bz + c = 0$ (1) *o ecuaţie cu coeficienţi reali sau complecşi;* z' *şi* z'' *două numere reale sau complexe legate prin relaţia* $a\,z'\,z'' + b\,(z' + z'') + c = 0$ (2); M′ *şi* M″ *două puncte din plan, corespunzătoare (după modul de reprezentaţie obişnuit) numerelor* z' *şi* z''. *Să se arate că cele două rădăcini ale ecuaţiei* (1) *nu pot fi niciodată de aceeaşi parte a dreptei* M′ M″.

A. G. IOACHIMESCU.

Voiu presupune mai întâiu că toate cantităţile ce figurează în formulele (1) şi (2) sunt complexe, urmând a vedea la urmă ce se întmâplă când unele din ele devin reale.

Relaţia (2) reprezintă o substituţie liniară simetrică, iar rădăcinile ecuaţiei (1) reprezintă punctele duble ale substituţiei. Să simplificăm mai întâiu relaţiile (1) şi (2), făcând o schimbare originii axelor. Punând

$$z = z_1 + Z\ ,\ z' = z_1 + Z'\ ,\ z'' = z_1 + Z''$$

şi luând $z_1 = -\dfrac{b}{a}$ relaţiile (1) şi (2) devin:

$$a\,Z^2 - \frac{b^2}{a} + c = 0$$

sau

$$Z^2 = m = \frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a} \quad (1'),$$

şi

$$a\left(Z' - \frac{b}{a}\right)\left(Z'' - \frac{b}{a}\right) + b\left(Z' + Z'' - \frac{2b}{a}\right) + c = 0$$

sau

$$a\,Z'\,Z'' - \frac{b^2}{a} + c = 0$$

sau $Z'\,Z'' = m$ (2′). Fie r, α; r', α'; r'', α'' modulele şi argumentele cantităţilor complexe Z, Z′ şi Z″, relaţiile (1′) şi (2′) ne dau

$$r^2\,e^{2\alpha i} = m = r'\,r''\,e^{(\alpha' + \alpha'')i}.$$

$$\therefore\quad (3)\ r^2 = r'r'',\ 2\alpha = \alpha' + \alpha'' + 2k\pi\,;$$

relaţiile precedente ne arată: 1) punctele A′ şi A″, corespunzătoare rădăcinilor ecuaţiei (1) sau (1′), sunt simetrice faţă cu noua origine O_1 a axelor; 2) dreapta A′ A″ e bisectoarea unghiului $M'O_1M''$. Insemnând cu D punctul unde bisectoarea unghiului $M'O_1M''$ întâlneşte pe M′M″, avem, după o formulă cunoscută din trigonometrie:

$$\overline{O_1D} = \frac{2\,\overline{O_1M'}\cdot\overline{O_1M''}\cdot\cos\frac{M'O_1M''}{2}}{O_1M'+O_1M''} = \frac{2r'r''\cos\frac{\alpha'-\alpha''}{2}}{r'+r''},$$

dar $r'r'' = r^2$ deci $r'+r'' \geqslant 2r$, relaţia precedentă ne dă

$$\overline{O_1D} \leqslant r\cos\frac{\alpha'-\alpha''}{2} \leqslant r:$$

prin urmare unul din punctele A′ sau A″ va fi dincolo de dreapta M′M″ faţă de O_1, iar celălalt de partea opusă, sau ambele pe dreapta M′M″, nici într'un caz ambele de aceeaşi parte a dreptei M′M″.

In cazul când cantităţile *a*, *b*, *c* sunt reale, constanta *m* este de asemenea reală; pentru *m* pozitiv dreapta A′A″ se confundă cu axa reală, iar pentru *m* negativ cu axa imaginară. In cazul când toate cantităţile din formule, *a*, *b*, *c*, Z′ şi Z″, sunt reale, dacă $m < 0$, punctele A′ şi A″ sunt pe axa imaginară, simetrică în raport cu originea O_1; iar dacă $m > 0$, A′ şi A″ sunt şi ele pe axa reală, unul între M′ şi M″, altul în afară de acest interval, dar nici în acest caz particular ele nu pot fi *de aceeaşi parte* a dreptei M′M″.

JUSTIN AURIAN BLĂJANI.

PROBLEMA 1534. *Fie* AB *un segment de dreaptă de lungime dată; în* A *se ridică o perpendiculară pe* AB. *Să se determine pe această perpendiculară un punct* C, *aşa fel că ducând dela* C *spre* B *o lungime* $\overline{CD} = a$, *proiectând după aceea pe* D *în* D′ *pe perpendiculara* AC, *apoi pe* D′ *în* E *pe* BC *să avem* $\overline{CE} = \overline{BD}$. *Să se discute.*

A. G. IOACHIMESCU.

Voiu lua ca necunoscută $\sphericalangle ABC = \theta$; avem

$$\overline{AC} = \overline{AB}\,\mathrm{tg}\,\theta = b\,\mathrm{tg}\,\theta\ ,\ b = \overline{AB}\ ,\ \overline{CD'} = a\sin\theta,$$

$$\overline{CE} = \frac{\overline{CD'}^2}{CD} = a\sin^2\theta,$$

în ceea ce privește lungimea $\overline{BD}$ ea va fi $BC - CD$ sau $CD - BC$, după cum punctul D este între B și C sau dincolo de B,

$$\overline{BC} = \frac{b}{\cos\theta}, \quad \overline{CD} = a.$$

Condițiunea impusă prin enunț $\overline{CE} = \overline{BD}$, revine la

$$a \sin^2\theta = \frac{b}{\cos\theta} - a$$

sau

$$a \sin^2\theta = a - \frac{b}{\cos\theta}.$$

Vom examina mai întâiu ultimul caz, care e mai simplu. Ecuația de condiție revine la

$$\frac{b}{\cos\theta} = a - a \sin^2\theta = a\cos^2\theta \quad \therefore \quad \cos\theta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}},$$

soluție admisibilă și unică căci $b < a$.

In cazul când punctul D este între B și C ecuația problemei este:

$$a \sin^2\theta = \frac{b}{\cos\theta} - a$$

sau

$$2a\cos\theta - a\cos^3\theta - b = 0$$

sau

$$(1) \qquad u^3 - 2u + k = 0\ ,\ u = \cos\theta\ ,\ k = \frac{b}{a}.$$

Ecuația (1) are totdeauna o rădăcină reală negativă, care nu interesează; ea poate avea și 2 rădăcini reale pozitive, ca să fie admisibile trebue să fie cuprinse între 0 și 1. Ecuația derivată din (1) este $3u^2 - 2 = 0$ ale cărei rădăcini sunt $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; ca ecuația (1) să aibă rădăcini reale pozitive, cuprinse între 0 și 1, trebue $u(u^2 - 2) + k < 0$ pentru

$$u = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ adică } k < \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9}\sqrt{6} \sim 1{,}08\ldots,$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

în acest caz avem o soluție admisibilă

$$u' = \cos\theta' < \sqrt{\frac{2}{3}};$$

ca cea de a doua soluție să fie admisibilă trebue ca pentru $u = 1$ prima parte a ecuației (1) să fie pozitivă, adică $k > 1$, în acest caz vom avea o a doua soluție admisibilă $u'' = \cos\theta''$ cuprinsă între

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ și } +1.$$

In rezumat: $b < a$, două soluții, una cu D coprins între B și C și alta D dincolo de B; $a < b < 1{,}08\ldots a$, două soluții, în ambele D este cuprins între B și C; $b > 1{,}08\ldots a$, nici o soluție.

D-l GHEORGHE T. GHEORGHIU a găsit numai prima soluție.

PROBLEMA 2360. *Să se stabilească convergența seriei:*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{ak\pi}{\alpha n^2} \cos\frac{k^2\pi}{\alpha n^2} \cos\frac{bk\pi}{\alpha n^2},$$

și să se calculeze suma ei, știind că a *și* b *sunt două numere întregi date.*

V. ALACI.

Dacă în formula cunoscută, de însumare a sinusurilor unor arce în progresie aritmetică, anume:

$$\sin\beta + \sin(\beta + h) + \ldots + \sin[\beta + (n-1)h] = \frac{\sin\left(\beta + \frac{n-1}{2}h\right)\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}},$$

luăm

$$\beta = h = \frac{a\pi}{\alpha n^2},$$

avem:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{ak\pi}{\alpha n^2} = \frac{\sin\frac{(n+1)a\pi}{2\alpha n^2}\sin\frac{a\pi}{2\alpha n}}{\sin\frac{a\pi}{2\alpha n^2}}.$$

Trecând la limită pentru $n = \infty$ şi observând că sinusurile din membrul al 2-lea sunt nişte infiniţi mici, că deci se pot înlocui cu arcele corespunzătoare, obţinem:

$$(1)\quad \lim_{n=\infty} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{ak\pi}{\alpha n^2} = \lim_{n=\infty} \cdot \frac{\frac{(n+1)a\pi}{2\alpha n^2} \cdot \frac{a\pi}{2\alpha n}}{\frac{a\pi}{2\alpha n^2}}$$

$$= \lim_{n=\infty} \cdot \frac{(n+1)a\pi}{2\alpha n} = \frac{a\pi}{2\alpha} \cdot$$

Seria (1) având o sumă finită, este convergentă, deci şi seria dată ai cărei termeni se obţin din acei ai seriei (1) multiplicaţi respectiv cu factori de forma

$$\cos^2 \frac{k^2\pi}{\alpha n^2} \cos \frac{bk\pi}{\alpha n^2} \leqslant 1,$$

este convergentă. Rămâne să aflăm suma seriei date, pe care s'o notăm cu S.

Avem:

$$\sin \frac{ak\pi}{\alpha n^2} \cos \frac{bk\pi}{\alpha n^2} = \tfrac{1}{2}\left[\sin \frac{k(a+b)\pi}{\alpha n^2} + \sin \frac{k(a-b)\pi}{\alpha n^2}\right].$$

De aci rezultă:

$$(2)\quad S = \tfrac{1}{2} \lim_{n=\infty} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k(a+b)\pi}{\alpha n^2} \cos \frac{k^2\pi}{\alpha n^2}$$

$$+ \tfrac{1}{2} \lim_{n=\infty} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k(a-b)\pi}{\alpha n^2} \cos \frac{k^2\pi}{\alpha n^2} \cdot$$

Inainte de a efectua cele două limite, observăm că putem scrie succesiv, A fiind un întreg oarecare:

$$(3)\quad \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{Ak\pi}{\alpha n^2} \cos \frac{k^2\pi}{\alpha n^2} = \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k(k+A)\pi}{\alpha n^2}$$

$$- \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k(k-A)\pi}{\alpha n^2} = \tfrac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n-A} \sin \frac{k(k+A)\pi}{\alpha n^2}\right.$$

$$+\sum_{k=n-A+1}^{n}\sin\frac{k(k+A)\pi}{\alpha n^2}-\sum_{k=1}^{A}\sin\frac{k(k-A)\pi}{\alpha n^2}$$

$$-\sum_{k=A+1}^{n}\sin\frac{k(k-A)\pi}{\alpha n^2}\Big].$$

Insă avem:

$$\sum_{k=1}^{n-A}\sin\frac{k(k+A)\pi}{\alpha n^2}-\sum_{k=A+1}^{n}\sin\frac{k(k-A)\pi}{\alpha n^2}=0,$$

apoi:

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{A}\sin\frac{k(k-A)\pi}{\alpha n^2}=0,\ \lim_{n=\infty}.\sum_{k=n-A+1}^{n}\sin\frac{k(k+A)\pi}{\alpha n^2}=A\sin\frac{\pi}{\alpha},$$

astfel că luând limita pentru $n=\infty$ în relația (3) obținem:

$$(4)\qquad \lim_{n=\infty}.\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{Ak\pi}{\alpha n^2}\cos\frac{k^2\pi}{\alpha n^2}=\frac{A}{2}\sin\frac{\pi}{\alpha}\cdot$$

Dacă în loc de A, luăm $a+b$ sau $a-b$, relațiunea (3) în virtutea identității (4) devine:

$$S=\frac{a+b}{4}\sin\frac{\pi}{\alpha}+\frac{a-b}{4}\sin\frac{\pi}{\alpha}=\frac{a}{2}\sin\frac{\pi}{\alpha}\cdot$$

Am aflat astfel suma seriei date.

Soluții analoage date de D-nii: VIRGIL COȘNIȚĂ (lic. Bârlad), GHERMĂNESCU MIHAIL (student), KAUFMAN SEBASTIAN (lic. Focșani).

Observări: 1°. D-l KAUFMAN SEBASTIAN, observă că suma seriei date este independentă de *b*, ceeace se explică prin faptul că toți termenii conțin factori respectivi de forma,

$$\cos\frac{bk\pi}{\alpha n^2}\qquad (k=1,2,\ldots n),$$

cari pentru $n=\infty$ se reduc la, $\cos 0=1$.

2°. D-l VIRGIL COȘNIȚĂ, a însumat o serie mai generală ca cea din enunț, stabilind că avem:

$$\lim_{n=\infty}.\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\frac{ak\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}\cos\frac{k^2\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}\prod_{i=0}^{p}\cos\frac{bik\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}\right]=\frac{a}{2}\sin\frac{\pi}{\alpha}.$$

V. A.

PROBLEMA 2536. *Din vârfurile* A, B, C *ale unui triunghiu, ca centre descriem câte două cercuri cu raze respectiv* x, X; y, Y; z, Z. *Să se arate că dacă centrele radicale ale cercurilor* x, y, z *şi* X, Y, Z *sunt simetrice faţă de centrul cercului* EULER, *atunci avem relaţiunea:*

$$x^2 + X^2 + a^2 = y^2 + Y^2 + b^2 = z^2 + Z^2 + c^2.$$

D. PERIEŢEANU.

Soluţie dată de D-l M. L. A. NEGREA (Brăila).

Consider $AC > AB$ şi fie O' centrul cercului lui EULER al triunghiului ABC; $O'x'$, $O'y'$ un sistem de axe dreptunghiulare, din care $O'x'$ paralelă cu BC. Dacă, faţă de acest sistem, se notează cu (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3) respectiv coordonatele punctelor A, B, C atunci se găseşte uşor pe o figură că

$$\alpha_1 = -\frac{R\sin(B-C)}{2} \quad \alpha_2 = \frac{R\sin(B-C)}{2} - \frac{a}{2} \quad \alpha_3 = \frac{a}{2} + \frac{R\sin(B-C)}{2};$$

$$\beta_1 = h_a - \frac{R}{2}\cos(B-C) \quad \beta_2 = -\frac{R\cos(B-C)}{2} \quad \beta_3 = \beta_2.$$

Scriind ecuaţiile cercurilor de raze x, y, z şi deducând după regula cunoscută axa radicală a 2 din ele se găseşte că coordonatele (X_M, Y_M) ale centrului radical M al celor 3 cercuri sunt date de

$$(1)\quad 2(\alpha_2 - \alpha_3)X_M = z^2 - y^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2$$

$$(2)\quad 2(\alpha_1 - \alpha_2)X_M + 2(\beta_1 - \beta_2)Y_M = y^2 - x^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2.$$

La fel, coordonatele X_N, Y_N ale centrului radical N al cercurilor de raze X, Y, Z vor fi date de ecuaţiile

$$(3)\quad 2(\alpha_2 - \alpha_3)X_N = Z^2 - Y^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2$$

$$(4)\quad 2(\alpha_1 - \alpha_2)X_N + 2(\beta_1 - \beta_2)Y_N = Y^2 - X^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2.$$

Pentru ca M şi N să fie simetrice faţă de O' este necesar şi suficient să avem

$$(5)\qquad X_M + X_N = 0$$

$$(6)\qquad Y_M + Y_N = 0.$$

Adunând (1) cu (3) şi ţinând seamă de (5) găsim

$$z^2 - y^2 + Z^2 - Y^2 + 2(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) = 0. \tag{7}$$

La fel din (2), (4) şi (6) se deduce

$$x^2 + X^2 - 2(\alpha_1^2 + \beta_1^2) = y^2 + Y^2 - 2(\alpha_2^2 + \beta_2^2). \tag{8}$$

Din valorile lui α_2, α_3 se deduce uşor

$$\alpha_2^2 - \alpha_3^2 = \frac{c^2 - b^2}{2} \tag{9}$$

ţinând seamă de diferitele relaţiuni metrice între elementele unui triunghiu. Ducând pe (9) în (7), avem

$$y^2 + Y^2 + b^2 = z^2 + Z^2 + c^2. \tag{10}$$

Calculând la fel pe $\alpha_1^2 + \beta_1^2$ şi $\alpha_2^2 + \beta_2^2$ se deduce din (8):

$$x^2 + X^2 + a^2 = y^2 + Y^2 + b^2. \tag{11}$$

Comparând (10) cu (11) se vede că rezultă relaţiunile de demonstrat.

Notă 1°. D-l M. L. A. NEGREA a dat în soluţia d-sale toate calculele care conduc la aflarea sumelor de forma $\alpha_1^2 + \beta_1^2$ sau $\alpha_1^2 + \alpha_2^2$ în funcţie de laturile *a*, *b*, *c*.

2°. Asupra acestei probleme a se vedea interesantul articol al D-lui R. GOORMAGHTIGH, care se publică în acest număr la pagina 529.

3°. Problema se poate rezolva geometric pe cale elementară. In această privinţă, după cum arătăm în nota din josul paginei 529, vom publica ulterior un extrem de interesant articol al D-lui V. THÉBAULT care generalizează proprietatea pentru tetraedre. Articolul D-lui V. THÉBAULT s'a primit în acelaşi timp cu al D-lui R. GOORMAGHTIGH. Facem menţiune de acest lucru pentru a stabili drepturile de prioritate a fiecăruia din cei doi autori asupra felului cum au tratat problema.

G-L GH. B.

PROBLEMA 3833. *Să se demonstreze că dacă* $\varphi(N)$ *este numărul numerelor prime şi inferioare lui* N *atunci expresiunea*

$$E = 160^{\varphi(N)} + 96^{\varphi(N)} - 5^{\varphi(N)} - 3^{\varphi(N)}$$

se divide prin 62N, *dacă* N *este nepereche şi prim cu 31.*

Să se modifice enunţul pentru cazul când N *este pereche,*

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nul P. I. GHIŞOIU (Şcoala Politechnică, Bucureşti).

Observ că

$$160 = 5 \times 2^5 \ , \ 96 = 3 \times 2^5$$

$$E = 2^{5\varphi(N)}[5^{\varphi(N)} + 3^{\varphi(N)}] - [5^{\varphi(N)} + 3^{\varphi(N)}]$$

$$\therefore \quad E = [5^{\varphi(N)} + 3^{\varphi(N)}][32^{\varphi(N)} - 1] = p \times q$$

N fiind nepereche este prim cu 32 şi deci conform teoremei lui FERMAT generalizată, q se divide prin N. Dar q fiind de forma $32^n - 1$ se divide şi prin 31 şi cum N e prim cu 31 rezultă că q se divide prin $31 \times N$. Pe de altă parte p este pereche, rezultă deci că E se divide prin $62 \times N$.

Când N este pereche, q nu se mai divide prin N, iar asupra lui p nu se poate spune decât că este pereche. Deci *când* N *este pereche* E *se divide prin* 62.

Notă. După cum se vede din soluţia precedentă, problema 3833 este o aplicaţiune foarte simplă a teoremei lui FERMAT: *dacă numerele* A *şi* N *sunt prime între ele, atunci* $A^{\varphi(N)} - 1$ *se divide prin* N.

Prin urmare dacă la un număr, sau la o sumă B se poate pune în evidenţă un factor constant p atunci se poate spune cu siguranţă că

$$B[A^{(\varphi N)} - 1]$$

se divide prin $p \times N$, iar dacă N este prim şi cu $A - 1$, atunci produsul precedent se divide prin pN$(A - 1)$. Dacă a, b, c sunt numere prime între ele şi dacă N este prim cu $c^m - 1$ atunci

$$[a^{\varphi(N)} + b^{\varphi(N)}][c^{m\varphi(N)} - 1]$$

se divide prin $(c^m - 1)$N, iar dacă a şi b sunt de aceeaşi paritate, produsul precedent se divide prin $2 \times (c^m - 1)$N. Acesta este tocmai cazul problemei 3833 în care am luat

$$a = 5 \ , \ b = 3 \ , \ c = 2 \ , \ m = 5.$$

Se mai poate observa că dacă φ (N) se înlocueşte prin un număr oarecare n prim cu c atunci expresiunea

$$E = [a^n + b^n][c^n - 1].$$

se divide prin $2 \times n$, sau prin $2(c - 1)n$ când n este pereche şi a, b sunt de aceeaşi paritate; prin $(a + b)n$ sau prin $(a + b)(c - 1)n$ când n este nepereche.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4366. *Dacă într'un patrulater* ABCD *diagonala* AC *e simediană comună a triunghiurilor* ABD , BCD, *atunci patrulaterul e inscriptibil, în care caz şi diagonala* BD *e simediană comună a triunghiurilor* ABC , CDA.

MIRON NICOLESCU.

Fie N punctul de întâlnire al diagonalelor AC , BD. Proprietatea simedianelor, aplicată la triunghiul ABD ne dă:

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}^2} ;$$

deasemenea aplicată triunghiului BCD:

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AD}^2} \quad \therefore \text{ (1) } \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{BA} \cdot \overline{CD} ,$$

proprietate caracteristică patrulaterelor armonice, despre care ştim că sunt inscriptibile. Din triunghiurile asemenea AND , BNC scoatem

$$\frac{\overline{ND}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} ;$$

iar din triunghiurile ANB , CND:

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \quad \therefore \quad \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{CD} \cdot \overline{BC}} .$$

Ţinând seamă de relaţia (1), avem

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} , \text{ deci } \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{CD}^2} ,$$

adică BD e simediană comună în triunghiurile ABC , CDA.

c. c. t. d.

MARIUS MARGULIUS
Bucureşti.

PROBLEMA 4408. *Paralelele duse prin vârfurile* B, C, *ale triunghiului* ABC, *la bisectoarea interioară a unghiului* A *intersectează respectiv laturile* CA , BA *în punctele* B_a , C_a . *Axul radical al cercurilor* ABC , $AB_a\,C_a$ *intersectează pe* BC *în punctul* A_1 . *Analog se obţin punctele* B_1 , C_1 .

Să se arate că punctele A_1 , B_1 , C_1 *sunt în linie dreaptă.*

THEODOR GH. COCEA.

Soluţie dată de D-nii : S-LT. CONST. AVRAM (Versailles), S-LT. AUREL BĂDESCU (Fontainbleau), I. GR. BOGDAN (Lic. militar Iaşi), M. MÂNAC, I. ŞABAC, I. I. ŢIŢEICA (elevi Lic. militar N. Filipescu), M. MARGULIUS (Bucureşti) şi IANCU SAGER.

Observăm că:

$$\sphericalangle ABB_a = \sphericalangle AB_a B = \sphericalangle \frac{A}{2}$$

$$\sphericalangle ACC_a = \sphericalangle AC_a C = \sphericalangle \frac{A}{2} \cdot$$

Rezultă că triunghiurile ABB_a şi ACC_a sunt isoscele, iar figura $BCB_a\,C_a$ este un trapez isoscel în care perpendicularele în A pe direcţia bisectoarei este axa de simetrie. Axa radicală a cercurilor egale ABC , $AB_a\,C_a$ este această bisectoare exterioară AA_1 . Se ştie că picioarele bisectoarelor exterioare A_1 , B_1 , C_1 , se găsesc pe o dreaptă. *(Culegerea de probleme de Geometrie XII. 12).*

N. B.

PROBLEMA 4415. *Să se găsească fracţiile ordinare astfel încât, micşorându-le ambii termeni cu acelaşi întreg, să găsim pătratele acelor fracţii.*

M. GHERMĂNESCU.

Fie $\frac{a}{b}$ una din fracţiile căutate, iar k întregul cu care trebuesc micşoraţi cei doi termeni. Avem egalitatea

$$\frac{a-k}{b-k} = \frac{a^2}{b^2},$$

din care deducem

$$(1) \qquad k = \frac{ab}{a+b},$$

presupunând, bineînţeles, $a \neq b$, căci altfel dăm peste fracţiile echiunitare ce constituesc soluţii banale ale problemei.

Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b, adică

$$a = d\alpha \ , \ b = d\beta ;$$

egalitatea (1) devine

$$k = \frac{d\alpha\beta}{\alpha+\beta} .$$

Cum α şi β sunt prime între ele, k este întreg când d se divide prin $\alpha+\beta$, adică $d = m\ (\alpha+\beta)$. Vom avea deci

$$(2) \quad a = m\alpha\ (\alpha+\beta) \ , \ b = m\beta\ (\alpha+\beta) \ , \ k = m\alpha\beta,$$

formule care rezolvă problema. Avem, în adevăr,

$$\frac{a-k}{b-k} = \frac{m\alpha\ (\alpha+\beta) - m\alpha\beta}{m\beta\ (\alpha+\beta) - m\alpha\beta} = \frac{m\alpha^2}{m\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{a^2}{b^2} .$$

Notă. La această problemă s'au primit multe soluţii incomplete. D-nii V. CEAUŞESCU şi I. PETRESCU au rezolvat ecuaţia (1) bazându-se pe cele spuse cu ocazia rezolvirei problemei 4033 (G. M. XXXVIII, pag 152), unde se dă o soluţie diferită de cea de mai sus. D-nul V. GRIGORESCU a găsit formulele (2) pe o cale incidentală. Ceilalţi rezolvitori s'au oprit la ecuaţia (1)

M. G.

PROBLEMA 4421. *Se pune*

$$v = \frac{au+b}{cu+d} \ , \ w = \frac{av+b}{cv+d} .$$

Să se determine cantităţile a, b, c, d, *astfel încât să avem*

$$u = \frac{aw+b}{cw+d} .$$

MIRON NICOLESCU.

Soluţie. Introducând pe u din prima relaţie în a doua, obţinem

$$w = \frac{(a^2 + bc)\,u + b\,(a + d)}{c\,(a + d)\,u + bc + d^2}\,.$$

Din ultima relaţie scoatem

$$w = \frac{-\,du + b}{cu - a}\,,$$

de unde

$$\frac{(a^2 + bc)\,u + b\,(a + d)}{c\,(a + d)\,u + bc + d^2} = \frac{-\,du + b}{cu - a}\,,$$

sau, sub formă întreagă,

$$Au^2 + Bu + C \equiv 0, \tag{1}$$

unde

$$A = c\,(bc + a^2 + ad + d^2)$$

$$B = (d - a)\,(bc + a^2 + ad + d^2)$$

$$C = b\,(bc + a^2 + ad + d^2).$$

Relaţia (1) trebue să aibă loc identic în u, de unde condiţiile necesare şi suficiente

$$A = 0\,,\ B = 0\,,\ C = 0. \tag{2}$$

Deosebim două cazuri:

1) Dacă avem

$$bc + a^2 + ad + d^2 = 0, \tag{3}$$

toate relaţiile (2) sunt satisfăcute.

2) Dacă

$$bc + a^2 + ad + d^2 \neq 0,$$

relaţiile (2) nu pot fi verificate decât de valorile

$$c = 0\,,\ a = d\,,\ b = 0$$

care ne duc la substituţia identică:

$$v = u.$$

A rezolvat complet problema D-ra ANGELA BĂLĂCEANU (studentă, Bucureşti). D-l DIMITRIE MAVRODIN a găsit condiţia (3), a lăsat însă să-i scape substituţia identică.

M. N.

PROBLEMA 4433. *Să se demonstreze că în orice triunghiu avem relaţia*

$$\frac{R^2 - l_a^2}{h_a^2} + \frac{R^2 - l_b^2}{h_b^2} + \frac{R^2 - l_c^2}{h_c^2} = 1,$$

l_a, l_b, l_c fiind distanţele dela centrul cercului circumscris triunghiului la picioarele înălţimilor, h_a, h_b, h_c înălţimile, iar R *raza cercului circumscris.*

ST. OLTEANU.

1. *Soluţie* dată de Domnul ALEXANDRU D. STOICA (Liceul Marele Voevod Mihai, Bucureşti).

Fie A'A'' diametrul cercului circumscris triunghiului, trecând prin A_1, piciorul înălţimii scoborîte din A, A_2 intersecţia acestei înălţimi cu cercul şi H ortocentrul triunghiului.

Se observă uşor că

$$R + l_a = A_1A'' \; ; \; R - l_a = A_1A' \; ; \; A_1A_2 = A_1H.$$

Vom avea deci succesiv

$$\frac{R^2 - l_a^2}{h_a^2} = \frac{(R + l_a)(R - l_a)}{h_a^2} = \frac{A_1A'' \cdot A_1A'}{h^2} = \frac{h_a \cdot A_1A_2}{h_a^2} = \frac{A_1H}{h_a}$$

căci triunghiurile A_1A_2A' şi AA_1A'' sunt asemenea.

Dacă înmulţim numărătorul şi numitorul ultimei fracţiuni cu $\frac{1}{2}$ BC, obţinem

$$\frac{R^2 - l_a^2}{h_a^2} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot A_1H}{\frac{1}{2} BC \cdot h_a} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$$

Analog obţinem

$$\frac{R^2 - l_b^2}{h_b^2} = \frac{S_{HCA}}{S_{ABC}} \quad \text{şi} \quad \frac{R^2 - l_c^2}{h_c^2} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} .$$

Adunând aceste egalităţi membru cu membru, obţinem

$$\frac{R^2 - l_a^2}{h_a^2} + \frac{R^2 - l_b^2}{h_b^2} + \frac{R^2 - l_c^2}{h_c^2} = \frac{S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1.$$

Relațiile stabilite sunt valabile și în cazul unui triunghiu obtuzunghiu. In acest caz, se poate vedea ușor că vom avea

$$\frac{R^2 - l_a^2}{h_a^2} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}, \quad \frac{R^2 - l_b^2}{h_b^2} = -\frac{S_{HCA}}{S_{ABC}}, \quad \frac{R^2 - l_c}{h_c} = -\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$$

și

$$S_{HBC} - S_{HCA} - S_{HAB} = S_{ABC}.$$

2. *Soluție* dată de Domnul FLORENTIN GH. SAVOVICI (Școala pregătitoare de Ofițeri de Geniu).

Fie A' piciorul perpendicularei scoborîtă din A, M mijlocul laturei BC și O centrul cercului circumscris. Avem imediat pe figură

$$BA' = h_a \operatorname{cot} B$$

$$A'M = \frac{a}{2} - ha \operatorname{cot} B$$

$$\overline{OM}^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$$

și

$$\overline{OA'}^2 = l_a^2 = R^2 - \frac{a^2}{4} + \left(\frac{a}{2} - h_a \operatorname{cot} B\right)^2 = R^2 - h_a \operatorname{cot} B\,(a - h_a \operatorname{cot} B)$$

deci

$$\frac{R^2 - l_a^2}{h_a^2} = \frac{h_a \operatorname{cot} B\,(a - h_a \operatorname{cot} B)}{h_a^2} = \operatorname{cot} B \operatorname{cot} C$$

căci

$$a - h_a \operatorname{cot} B = A'C = h_a \operatorname{cot} C.$$

Analog obținem

$$\frac{R^2 - l_b^2}{h_b^2} = \operatorname{cot} C \operatorname{cot} A, \quad \frac{R^2 - l_c^2}{h_c^2} = \operatorname{cot} A \operatorname{cot} B.$$

Adunând obținem

$$\sum \frac{R^2 - l_a^2}{h_a^2} = \Sigma \operatorname{cot} B \operatorname{cot} C = l.$$

c. c. t. d.

3. Alte soluţii dela D-nii: VASILE CEAUŞESCU (Liceul Militar Tg.-Mureş), PAUL DOBRESCU (Liceul Militar M-rea Dealu), CONSTANTIN N. GAVRILESCU (Liceul Militar Iaşi), VINTILĂ GRIGORESCU (Liceul Militar M-rea Dealu), DIMITRIE MAVRODIN, MIRCEA A. NEGREA (Brăila), IANCU N. SAGER, NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU şi ILIE IOAN ŢIŢEICA (Liceul Militar M-rea Dealu).

I. S. A.

PROBLEMA 4444. *In trapezul* ABCD, *cu bazele paralele* AD *şi* BC, *se ia pe latura* AB *un punct oarecare* M. *Paralela dusă prin* A *la* CD *întâlneşte dreapta* MC *în* N, *iar paralela dusă prin* B *la* CD *întâlneşte dreapta* MD *în* P. *Să se arate că:*

1°. *Suma* $\overline{AN}+\overline{BP}$ *este constantă, oricare ar fi* M *pe* AB.

2°. *Paralelele duse prin* A *şi* B, *respectiv dreptelor* MC *şi* MD, *se întâlnesc într'un punct pe dreapta* CD.

N. BOTEA.

Să considerăm punctele: $E \equiv (AB\ ,\ CD)$; $F \equiv (BP\ ,\ MC)$; $G \equiv (AN\ ,\ BC)$; $Q \equiv (AN\ ,\ DM)$.

Paralela dusă prin M la CD întâlneşte dreptele paralele BC , AD respectiv în M' şi M", iar paralelele duse prin A şi B respectiv dreptelor MC şi MD întâlnesc dreapta CD în punctele H_a , H_b .

1°. *Soluţia I* dată de D-nii: RADU V. APOSTOL (cl. V-a Lic. militar N. Filipescu) şi V. CEAUŞESCU (cl. VII-a Lic. militar Tg.-Mureş).

Triunghiurile asemenea:

$$FMP \sim CMD\ ,\quad EBC \sim EAD.$$

$$CEB \sim DEA\ ,\quad FBC \sim NGC.$$

dau:

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{NG}}.$$

Deci

$$\overline{PB} = \overline{NG}$$

şi

$$\overline{AN}+\overline{BP} = \overline{AN}+\overline{NG} = \overline{AG} = \overline{CD} = \text{constant}.$$

Soluția II dată de D-l ANDREI VALENTIN BUZESCU (cl. VI-a Lic. «Aurel Vlaicu» Bucureşti).

Triunghiurile asemenea:

$$DAQ \sim DM''N \ , \quad MQN \sim MDC \ , \quad CNG \sim CMM'$$

dau:

$$\frac{\overline{MM''}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{QD}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{MM'}}{\overline{NG}} .$$

Din aceste relații şi din asemănarea triunghiurilor:

$$MM''A \sim MM'B \ , \quad MAQ \sim MBP$$

deducem:

$$\frac{\overline{NG}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{MM'}}{\overline{MM''}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{AQ}}$$

din care scoatem egalând numărătorii rapoartelor cu numitorul comun

$$\overline{AQ} : \overline{NG} = \overline{BP}.$$

2°. *Soluția I* dată de D-nii: V. CEAUŞESCU şi ARNO HILF.

Triunghiurile asemenea:

$$EAH_a \sim EMC \ , \quad EBH_b \sim EMD \ , \quad EAD \sim EBC$$

dau:

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EM}} = \frac{\overline{EH_a}}{\overline{EC}} \ ; \quad \frac{\overline{EM}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{EH_b}} \ ; \quad \frac{\overline{EB}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{ED}}$$

şi înmulțind parte cu parte aceste egalități obținem:

$$\overline{EH_a} = \overline{EH_b}.$$

Deci H_a şi H_b se confundă.

Soluția II dată de D-ra FILOFTEIA ANTONESCU şi D-nii: RADU APOSTOL, VALENTIN ANDREI BUZESCU, PANAIT MAZILU, IANCU SAGER, GH. NIȚESCU (Cluj), ENACHE IORDAGHE (Mărăşeşti), GH. BOIANGIU, GH. MIHĂILESCU, M. NĂSTASE, M. POSTELNICESCU, I. I. ȚIȚEICA, (Lic. militar «N. Filipescu»), I. GH. BOGDAN, A. CORNĂȚEANU, P. COJOCARU, I. STREDER, GH. VASILACHE (Lic. militar Iaşi).

Avem:

$$\overline{CH_a} = \overline{AN} \text{ şi } \overline{DH_b} = \overline{BP},$$

ca paralele cuprinse între paralele. Cum s'a arătat în prima parte că $\overline{AN} + \overline{BP} = \overline{CD}$, se deduce că punctele H_a şi H_b sunt confundate.

Observaţiuni. 1°. Au rezolvat prima parte a problemei cu ajutorul teoriei transversalelor D-nii: ION BOGDAN, GH. BOIANGIU, PETRU COJOCARU, AUREL CORNĂŢEANU, ARNO HILF, ENACHE IORDACHE, GH. MIHĂILESCU, M. NĂSTASE, M. POSTELNICESCU, ION STREDER, ILIE I. ŢIŢEICA, GH. VASILACHE.

2°. D-l PANAIT MAZILU a dat o altă soluţie geometrică.

3°. D-l GH. NIŢESCU (cl. V-a Lic. „Gh. Barițiu", Cluj), a dat o bună soluţie algebrică.

4°. D-l IANCU N. SAGER a rezolvat problema analitic.

N. B.

EXERCIŢII

42. Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghiu oarecare, iar a_1, a_2, şi a_3 laturile triunghiului său ortic, să se arate că avem:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a_1^2 b^2 c^2 \\ 1 & b^2 & a^2 b_1^2 c^2 \\ 1 & c^2 & a^2 b^2 c_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU.

R. Ţinând seama că $a = 2R \sin A$ şi $a_1 = a \cos A$ (Compléments de Trigonométrie par F. G. M. pag. 201), avem:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4R^2 \sin^2 A & a^2 b^2 c^2 \cos^2 A \\ 1 & 4R^2 \sin^2 B & a^2 b^2 c^2 \cos^2 B \\ 1 & 4R^2 \sin^2 C & a^2 b^2 c^2 \cos^2 C \end{vmatrix} = 4R^2 a^2 b^2 c^2 \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 A & \cos^2 A \\ 1 & \sin^2 B & \cos^2 B \\ 1 & \sin^2 C & \cos^2 C \end{vmatrix} =$$

$$4R^2 a^2 b^2 c^2 \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 A + \cos^2 A & \cos^2 A \\ 1 & \sin^2 B + \cos^2 B & \cos^2 B \\ 1 & \sin^2 C + \cos^2 C & \cos^2 C \end{vmatrix} = 4R^2 a^2 b^2 c^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cos^2 A \\ 1 & 1 & \cos^2 B \\ 1 & 1 & \cos^2 C \end{vmatrix} = 0.$$

43. Dacă

$$\frac{\sin 2a}{\sin 2b} = \frac{\sin 2c}{\sin 2d}$$

există egalitatea

$$\sin^2 (a - d) + \cos^2 (a + d) = \sin^2 (b - c) + \cos^2 (b + c).$$

C. IONESCU-BUJOR.

Condiția conduce la

$$\frac{\cos a \cos d}{\cos b \cos c} = \frac{\sin b \sin c}{\sin a \sin d}$$

sau

$$\frac{\cos(a-d)+\cos(a+d)}{\cos(b-c)+\cos(b+c)} = \frac{\cos(b+c)-\cos(b+c)}{\cos(a-d)-\cos(a+d)}$$

de unde,

$$\cos^2(a-d) - \cos^2(a+d) = \cos^2(b-c) - \cos^2(b+c) \text{ etc.}$$

PROBLEME PROPUSE

2446 [1]). Cercurile O şi O_1 sunt tangente interior în T. Coardele AB , AC ale cercului O sunt tangente cercului O_1.

Dreptele TB , TC taie cercul O_1 în B' şi C'. Să se demonstreze că B' C' este paralelă cu BC.

C. H. NICOLAU.

4547. Să se scrie câte una din cifrele 0, 1, 2,...9 în vârfurile unui decagon regulat aşa ca centrul de greutate al lor, reprezentând unităţi de greutate, să cadă cât mai aproape: 1) de centru; 2) de o latură; 3) de un vârf.

I. IONESCU.

4548. Cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4 şi apoi 5, 6, 7, 8, 9, luate câte odată, să se determine două numere, scrise unul după altul, care să formeze un pătrat.

V. THÉBAULT.

4549. Să se formeze un număr şi pătratul său utilizând de câte două ori pe fiecare din cifrele 1, 2, 4 şi 8.

G-L GH. BUICLIU.

1) Se publică din nou enunţul problemei 2446 căreia nu i s'a publicat încă soluţia. Problema rezolvată la pag. 282 Vol. XXIII şi 43 Vol. XXV sub No. 2446 a fost anulată prin erata dela pag. 240 Vol. XXIII şi înlocuită prin cea de faţă.

4550. Să se găsească două cuburi scrise cu toate cifrele 1, 2, . . . , 9 luate câte o singură dată, astfel ca acele două cuburi să nu aibă nicio cifră comună.

M. GHERMĂNESCU.

4551. Fie B'D' o paralelă la diagonala BD a paralelogramului ABCD. Prin B' şi D' se duc dreptele Δ_b şi Δ_d. Se consideră punctele:

$B_1 \equiv (\Delta_b , AD)$; $D_1 \equiv (\Delta_d , AB)$; $B_2 \equiv (\Delta_b , BC)$; $D_2 \equiv (\Delta_d , CD)$.

Perpendicularele duse prin B_1 şi D_1 respectiv pe AD şi AB se intersectează în M, iar perpendicularele duse prin B_2 şi D_2 respectiv pe BC şi CD se intersectează în N. Să se arate că dreapta MN trece printr'un punct fix, când dreptele Δ_b şi Δ_d variază.

THEODOR GH. COCEA.

4552. Intr'un tetraedru VABC, a cărui faţă ABC este egal înclinată pe celelalte feţe, există relaţia

$$\overline{VB}^2 + \overline{BC} \cdot \overline{CA} = \overline{VC}^2 + \overline{CB} \cdot \overline{BA}$$

şi alte două relaţii, obţinute din aceasta permutând circular literele A, B, C.

C. IONESCU-BUJOR.

4553. Ştiind că a şi b sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$x^2 + px + q = 0,$$

în ce caz rădăcinile ecuaţiunii

$$x^2 + ax + b = 0$$

sunt reale?

MAIOR I. LINTEŞ.

4554. x_1 şi x_2 fiind rădăcinile ecuaţiunii

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

să se formeze ecuațiunea în y, care are ca rădăcini:

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}, \quad y_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}.$$

Să se arate că rădăcinile ecuațiunii formate sunt reale când rădăcinile ecuațiunii date sunt reale și *reciproc.*

In ce caz avem $y_1 = y_2$?

Să se generalizeze pentru

$$y_1 = x_1^p + \frac{1}{x_1^p}, \quad y_2 = x_2^p + \frac{1}{x_2^p},$$

rezolvându-se complet când

$$p = 2 \text{ și } p = 3.$$

O. N. ȚINO.

4555. Să se rezolve ecuațiunea

$$\sin x + \cos 2x - \cos x \operatorname{tg} 3x = 0.$$

IULIU DEAC.

4556. Să se stabilească că între unghiurile unui triunghiu avem relația:

$$1 - 3 \operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cotg} C \cdot \operatorname{cosec} A \cdot \operatorname{cosec} B \cdot \operatorname{cosec} C.$$

$$= \Sigma \operatorname{cotg}^3 A \cdot \operatorname{cotg}^3 B.$$

N. DONCIU.

4557. Care este minimul expresiunii:

$$(k - x)^3 + (k - y)^3 + (k - z)^3$$

știind că:

$$x + y + z = 2k = \text{constant}.$$

L-T. COMANDOR GR. ZAPAN.

4558. Să se studieze seria:

$$f(1) \cdot x - \frac{f(3)}{3!} x^3 + \frac{f(5)}{5!} x^5 - \ldots + (-1)^n \frac{f(2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \ldots$$

unde $f(x)$ este un polinom de gradul m în x:

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 .$$

Să se arate că în cazul convergenţii, suma acestei serii este de forma:

$$S_m = P_m(x) \sin x + Q_m(x) \cos x$$

unde $P_m(x)$ este un polinom par, iar $Q_m(x)$ un polinom impar, de gradul m cel mult.

Să se determine aceste polinoame.

Să se studieze problema analoagă pentru seria:

$$f(0) - \frac{f(2)}{2!} x^2 + \frac{f(4)}{4!} x^4 \ldots + (-1)^n \frac{f(2n)}{(2n)!} x^{2n} + \ldots$$

N. BOTEA.

ERATĂ. 1°. Page 437, 4e ligne, il faut lire

$$\Sigma a(b-a)(c-a) = 4S(R-2r)^2.$$

6e ligne il faut lire

$$64 \overline{O_9 I}^2 \cdot S^2 = 16 S^2 (R-2r)^2.$$

2°. Dans notre question 4425, **G. M.** XL — 190, les rapports

$$\frac{(b+c)(R-r_a)}{d_a}, \ldots,$$

doivent être séparés par le signe + :

$$\frac{(b+c)(R-r_a)}{d_a} + \frac{(c+a)(R-r_a)}{d_b} + \frac{(a+b)(R-r_c)}{d_c} = 4.$$

3°. Problema rezolvată la pag. 500 şi următoarele din numărul trecut, poartă numărul 3209, iar nu 2309 cum s'a imprimat din eroare.

4°. In enunţul problemei 4467 — propusă la pag. 239, termenul mijlociu parantezei a 2-a este $\sqrt{3}\, R\, l_9$, iar nu $\sqrt{3}\, R\, l_9^2$ cum eronat a apărut.

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE

Aritmetica şi Teoria numerelor

		Pag.
Col. Gh. Buicliu	Pătrate berce	104
V. Thébault	Sur les nombres cycliques	385
Maior I. Linteş	Neegalităţi cu indicatori de ordin superior	439

Geometria

V. Thébault	Sur le triangle isoscèle	16
V. Thébault	Cercles associés à un triangle	49
B. I. Baidaff	O altă demonstraţie a unei teoreme de geometrie din spaţiu	58
V. Thébault	Sur le cercle de Taylor	101
V. Thébault	Sur les bissectrices du triangle	145
Locot. M. I. Focşeneanu	Asupra teoremei lui Salmon	164
V. Thébault	Sur le tetraèdre orthocentrique	289
C. Ionescu-Bujor	Asupra unor tetraedre	295
Locot. M. I. Focşeneanu	Despre ortopol	346
C. Ivănescu	Proprietăţi ale triunghiului	397
V. Thébault	Sur le théorème de Feuerbach	435
V. Thébault	Triangle bordé de triangles équilatéraux	482
R. Goormaghtigh	Sur des triples de cercles associés au triangle	529
General Gh. I. Popescu	Din Geometria triunghiului	536

Algebra

N. Ciorănescu	Câţiva determinanţi	151
N. Ciorănescu	Asupra unor determinanţi	196
Gh. D. Simionescu	Asupra sumei unor serii	340
Gh. Th. Gheorghiu	Suma unei serii	395

Trigonometrie

I. V. Mătieş	Asupra unor sume trigonometrice	351

Mecanică

		Pag.
Maior I. Linteş	Rezistenţa aerului asupra unui mobil care se deplasează cu viteze foarte mari	111
Maior I. Linteş	Calculul teoretic al vieţii ţevilor de arme şi tunuri	203
Maior I. Linteş	Despre eforturi dinamice	293

Analiza

T. Popoviciu	Asupra mediilor aritmetice şi geometrice	155
D. Georgescu	O problemă de calculul variaţiunilor	160

Istoria Matematicelor

I. Ionescu	Cărţi vechi de matematice	52, 97, 148, 193, 338, 392, 437
I. Ionescu	Vechile geometrii româneşti	486, 531
I. Ionescu	Un curs forestier de matematice	291
A. Myller	Formule de M. Botesu de Jassy	337

Diverse

I. Ionescu	Biblioteca „Gazeta Matematică“	20
Gh. Ţiţeica	Congresul interbalcanic al matematicienilor	59
M. Ghermănescu	Al optulea congres al asociaţiei române pentru inaintarea ştiinţelor	62
A. G. Ioachimescu	Spiru C. Haret	481

Chestiuni referitoare la Societatea „Gazeta Matematică“

***	Lista membrilor Societăţii „Gazeta Matematică“	5
***	Membri decedaţi	15
Delegaţia Societăţii	Concursul „Gazetei Matematice“	18
Ing. I. Buşilă, Gh. Iliescu	Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice“ pentru cursul anului 1934—1935	22
Delegaţia Societăţii	Programa analitică hotărîtă pentru concursul „Gazetei Matematice“ din anul 1935	65
Col. Gh. Buicliu, Col. Gh. Liteanu, Lt. C-dor Gh. Niculescu	Raportul comisiunii pentru acordarea premiului „General Sc. Panaitescu“ pe anul 1933—1934	67
Delegaţia Societăţii	Premiul „Vasile Conta“	114
Delegaţia Societăţii	Premiul „Inginer H. Capriel“	166
N. Botea, Al. A. Roşu, O. Ţino	Premiul „Inginer Al. Roşu“	166
Al. D. Bunescu	Inaugurarea casei „Gazeta Matematică“	241
***	Cuvântarea S. S. Preotului C. Moise	244
***	„ d-lui I. Ionescu	244
***	„ „ Col. Gh. Buicliu	253
***	„ „ Gh. Ţiţeica	256
***	Contract de vânzare-cumpărare	258

		Pag.
Delegaţia Societăţii	Concursul „Gazetei Matematice"	262
Delegaţia Societăţii	Premiu pentru concursul „Gazetei Matematice"	304
G-l Gh. Buicliu, Ing. A. Ioanovici, Al. A. Roşu	Premiul „Inginer Al. Roşu"	356
Gh. Ţiţeica	Rezultatul concursului „Gazetei Matematice"	433
N. Botea, G-l Gh. Buicliu, Lt. C-dor Gh. Niculescu	Raportul comisiunei pentru acordarea premiului „V. Cristescu"	442
A. Pantazi, O. Ţino, I. Buşilă	Premiul bienal „Inginer H. Capriel"	443

B. NOTE MATEMATICE

Aritmetică şi Teoria Numerelor

14 [1]). *V. Thébault*	Carrés parfaits remarquables	115
19. *Col. Gh. Buicliu*	Pătrate cu toate cifrele consecutive	169
22. *Maior I. Linteş*	O neegalitate cu numere întregi	206
25. *V. Thébault*	A propos du problème 4372	264
27. *Col. Gh. Buicliu*	Cuburi formate din cifre diferite între ele	305
28. *Col. Gh. Buicliu*	O extindere a exerciţiului 22	306
32. *G-l Gh. Buicliu*	Pătrate şi rădăcinile lor cu cifre diferite	359
33. *Maior I. Linteş*	Asupra unor divizibilităţi	360
34. *Maior I. Linteş*	Asupra unor exerciţii	361
40. *Maior I. Linteş*	Asupra problemei 4392	402
43. *G-l Gh. Buicliu*	Rectificarea soluţiei exerciţiului 24	444
46. *G-l Gh. Buicliu*	Asupra problemei 4123	491
47. *Maior I. Linteş*	O problemă cu 1935	492
50. *V. Thébault*	Carrés parfaits et nombres premiers	545

Geometria

4. *Col. Gh. Buicliu*	Soluţia geometrică a generalizării din nota precedentă	28
8. *V. Thébault*	Sur un tedraèdre spécial	68
9. *V. Thébautt*	Sur le triangle automédian	70
10. *R. Goormaghtigh*	Sur un triangle spécial	71
12. *N. N. Mihăileanu*	Asupra articolului *«Relaţii în legătură cu punctele lui Feuerbach»*	73
15. *V. Thébault*	Sur le triangle isoscèle	116
17. *A. Dobrescu*	Asupra problemei 3825	119
23. *Th. Gh. Cocea*	Asupra problemei 4293	207
26. *V. Thébault*	Géometrie et mécanique	305
31. *V. Thébault*	Sur les medianes du triangle	357
38. *Al. V. Niculescu*	Asupra problemei 3977	400
39. *G-l Gh. Buicliu*	O proprietate a figurii lui VECTEN	401

1) Numerele din această coloană indică numărul de ordine al notei matematice în Volumul XL.

		Pag.
45. *C. Ivănescu*	Asupra teoremei lui STEINER generalizată	446
„ *N. Botea*	„ „ „ „ „	447
48. *D. V. Stoica*	Asupra problemei 3785	494

Algebra

11. *O. N. Ţino*	Asupra problemei 4168	72
16. *M. Ghermănescu*	Asupra poslbilităţii ecuaţiei $x^4 + y^4 = z^4$ în corpurile pătratice	117
21. *Maior I. Linteş*	Asupra exerciţiului No. 5	172
35. *Grişa Margulis*	Demonstraţia regulii lui HÔPITAL	361
44. *M. Ghermănescu*	Asupra unei chestiuni de examen	445
49. *M. Ghermănescu*	Asupra combinărilor cu repetiţie	496

Trigonometria

5. *Lt. C-dor Gh. Niculescu*	Asupra problemei 4348	29
6. *N. Zaharia*	Relaţiuni trigonometrice	30
24. *C. Ivănescu*	Relaţii într'un triunghiu semidreptunghic	209
41. *Gh. Th. Gheorghiu*	Asupra articolului „Asupra unor sume trigonometrice“	402
51. *I. S. Antoniu*	Rezolvarea problemei propuse la lucrarea scrisă la trigonometrie dela concursul „Gazetei Matematice“ din 1935	548

Analitica

3. *C. Coşniţă*	O generalizare a problemei 3825	27
29. *D. Barbilian*	Demonstraţie stereometrică a teoremei lui Pascal	306

Istoria Matematicelor

1. *I. Ionescu*	Revistele matematice elementare în Argentina	25
42. *I. Ionescu*	Cum se hotărnicea în secolul XVIII la noi	443

Diverse

2. *Col. Gh. Buicliu*	Soluţiile întregi ale ecuaţiei $xx' + yy' = zz'$	27
7. *I. Ionescu*	Congresul matematicienilor slavi în Praga	67
13. *I. Ionescu*	Congresul matematicienilor slavi dela Praga	114
18. *I. Ionescu*	Geometria triunghiului de T. LALESCU	167
20. *Lt. C-dor Gh. Niculescu*	Asupra notei Nr. 10 G. M. XL	172
30. ***	Scrisori dela *«Revista Matematică din Timişoara»* şi dela *Societatea ştiinţifică dela Şcoala Politechnică din Timişoara*	357
36. *I. Ionescu*	Asupra geometriei descriptive	399
37. *I. Ionescu*	Asupra geometriei analitice de T. LALESCU	400

C. CHESTIUNI DE EXAMEN

		Pag.
Concursul «Gazetei Matematice»	Chestiunile date la probele scrise la concursul din Mai 1935	402
Examenul de capacitate pentru profesorii secundari	Probele scrise	447
Şcoala ofiţeri de aviaţie «Regele Carol II»	Examenul de admitere Iulie 1934	73
Şcoala Politechnică «Regele Carol II»	Concursul de admitere în ciclul I. 1934	120
	Anul I. Sesiunea Septemvrie 1934 (Geometria Analitică)	123

D. BIBLIOGRAFII

Lucrări recenzate

I. Ionescu	COLLINS. *The (r, x) system of coordinates and its place in analytic geometry and calculs*	32
I. Ionescu	R. ESTÈVE & H. MITAULT. Eléments de géométrie plane à l'usage des classes de 4-e et 3-e de l'enseignement secondaire. Tome I.	32
I. Ionescu	N. ABRAMESCU. Noţiuni de algebră financiară	75
I. Ionescu	N. ABRAMESCU. Lecţiuni elementare de algebră superioară	76
I. Ionescu	N. ABRAMESCU. Aplicaţiunile trigonometriei la agrimensură	76
I. Ionescu	N. CIORĂNESCU. Curs elementar de algebră superioară	76
A. G. Ioachimescu	N. M. GUNTER. La théorie du potentiel	77
I. Ionescu	J. H. M. WEDDEBURN. Lectures on matrices	125
I. Ionescu	„Gazeta Matematică". Supliment de exerciţii	126
I. Ionescu	C. NOICA. Mathesis sau bucuriile simple	126
I. Ionescu	PROF. ISIS WEISS. Divizibilitatea unui număr decadic prin 7	175
I. Ionescu	PROF. S. DE GLASENAPP. Tables de logaritmes des nombres et des fonctions trigonométriques à quatre décimales	175
I. Ionescu	R. ESTÈVE & H. MITAULT. Eléments de géométrie plane. Tome II.	176
I. Ionescu	R. ESTÈVE & H. MITAULT. Cours de géométrie. Tome I.	308
I. Ionescu	GUSTAVE JUVET. Leçons d'analyse vectorielle. Seconde partie	409
I. Ionescu	MAURICE LECAT. Erreurs de mathématiciens des origines à nos jours	410
I. Ionescu	J. B. TOURRIOL. Chaleur	451

Pag

G. Ţiţeica — G. JULIA. Leçons sur la réprésentation conforme des aires multiplement connexes 451

G. Ţiţeica — NORBERT WIENER. *Fourier* transformes in the complex domain 451

I. Ionescu — JOSE GONZALEZ GALE. Matematicas financiarias 553

Lucrări nerecenzate

I. T. Andreian — $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Cercetări, consideraţiuni geometrice, consecinţe algebrice 309

Gh. Em. Filipescu — Statistica construcţiunilor şi Rezistenţa materialelor. Vol. I, II, III 498

T. Lalescu — Culegere de probleme de geometrie descriptivă . 363

Maior I. Linteş — Practica rezolvării problemelor de Balistică interioară 125

Maior I. Linteş — Caracteristicile şi posibilităţile aviaţiei în legătură cu A. c. A. 499

H. Myer — Microscopul electronic 211

R. E. A. Palay & N. Wiener — *Fourier* transforms in the complex domain . . 266

J. R. Pastor — Boletin del Seminario Matematico 451

P. Sergescu — Aperçu sur les mathématiques en Roumanie au XX-e siècle 125

P. Sergescu — Sur l'organisation de l'enseignement mathématique en Roumanie 125

P. Sergescu — Matematica la Români 174, 499

M. Simonoff — Electricidad y Magnetismo 450

V. Vâlcovici — Conferinţe ţinute la postul de Radiodifuziune din Bucureşti 309

I. Weiser — Noua aritmetică analitică. Almetria 266

Reviste

American Mathematical Society 174

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina 124, 211, 265, 308, 362, 408, 499, 552

Boletin Matematico 75, 125, 211, 266, 308, 363, 450, 498, 552

Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine 173, 498

Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquée de l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II" 175

Bulletin of the American Mathematical Society 31, 124, 174, 307, 362, 449, 552

Bulletin Scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara 363

Gazeta Matematică. Supliment de exerciţii . 126, 176, 266, 309, 363, 451, 499

Journal de Mathématiques élémentaires 125, 174, 211, 266, 308, 362, 408, 450, 498, 552

Mathematica 362

Mathesis 32, 176, 211, 265, 362, 450, 552

Pag.

Natura 125, 174
Numerus 498, 552
Revista Matematică din Timişoara . . 32, 75, 125, 174, 211, 266, 363, 409, 450
Revista ştiinţifică „V. Adamachi" 211, 363, 498
Societatea licenţiaţilor în matematici dela Universitatea din Cluj. Chestiuni de examen 410
Ştiinţă şi Progres 125, 174, 211, 266, 308, 363, 408, 450, 498
The Mathematical Gazete 125, 211, 308, 450
Universidad Nacional de la Plata. Anuario para el ano 1934 174

Extrase, Suplimente şi Teze

D. Barbilian Die Bewegungstheorie der Septuoren 126
M. St. Botez Sur la projection bicentrale 211
C. I. Budeanu Sur le frotement d'un appareil déformant . . . 363
N. Ciorănescu Une propriété caractéristique des fonctions polyharmoniques 408
N. Ciorănescu Quelques propriétés de moyenne des fonctions continues et des fonctions sommables . . . 408
N. Ciorănescu Sur l'équation intégrale à limites fixes et à un paramètre 408
N. Ciorănescu Sur une classe de polynomes à un paramètre généralisant les polynomes de LÉGENDRE . . 408
N. Ciorănescu Sur une equation intégrale linéaire à la limite fixe et à un paramètre 408
N. Ciorănescu Sur le développement d'une fonction analitique de fonction analytique et sur quelques conséquences 408
N. Ciorănescu Sur une propriété générale des courbes planes fermées et ses applications 408
N. Ciorănescu L'équation intégrale linéaire à limites variables et à un paramètre 409
G. G. Constantinescu La réfraction astronomique 363
Gh. Th. Gheorghiu Sur les polynomes associés aux fonctions méthasphériques 76
Gh. Th. Gheorghiu Sur les fonctions métasphériques 126, 139
Gh. Th. Gheorghiu Sur un cas spécial des fonctions métasphériques 309
Gh. Th. Gheorghiu Sur certaines fonctions attachées aux fonctions métasphériques 409
Gh. Th. Gheorghiu Fonctions métasphériques et leur extension . . 409
M. Ghermănescu Sur le troisième théorème de FREDHOLM . . . 175
M. Ghermănescu Sur le théorème de PICARD 212
M. Ghermănescu Sur les équations fonctionnelles linéaires d'ordre infinis 212
M. Ghermănescu Sur les moyennes successives des fonctions . . 309

		Pag.
M. Ghermănescu	Sur les équations aux différences finies	451
G. Gricercsik	Die Kombinierte Ausgleichung der unmittelbaren Beobachtungen	175
C. Jacob	Sur un problème de DIRICHLET-NEUMANN pour les fonctions de deux variables complexes .	211
C. Jacob	Sur le problème de DIRICHLET pour les fonctions de plusieures variables complexes	211
C. Jacob	Sur un problème concernant les jets gazeux . .	212
C. Jacob	Sur quelques problèmes généralisés de DIRICHLET-NEUMANN pour les aires multiplement connexes	212
C. Jacob	Asupra unei probleme din teoria vânelor lichide .	498
C. Jacob	Asupra câtorva proprietăţi ale soluţiei generale a unei probleme a D-lor H. VILLAT şi B. THIRY .	499
L. Lecmans	Applications diverses au triangle et au tetraèdre .	451
Maior I. Linteş	Sur les effets dynamiques	408
Maior I. Linteş	Quelques questions de „Balistique extérieure" .	408
A. Myller	Secţia învăţământului matematic la universitatea din Iaşi	451
M. Nicolesco	Deux remarques sur l'unicité de la solution du problème de DIRICHLET pour les équations différentielles linéaires du second ordre . . .	176
M. Nicolesco	Représentation des fonctions continues de plusieures variables par des séries uniformément convergentes de fonctions polyharmoniques .	176
M. Nicolesco	Sur une propriété caractéristique des fonctions harmoniques d'ordre *p* et sur l'existence des laplaciens de divers ordres	176
M. Nicolesco	Sur l'unicité de la représentation des fonctions harmoniques d'ordres *p* au moyen des fonctions harmoniques d'ordre un	176
Al. Pantazi	Sur certaines propriétés projectives des familles de surfaces	409, 410
Al. Pantazi	Sur la déformation le long de trajectoires orthogonales	409
Al. Pantazi	Sur les couples de congruences stratifiables	409, 410
Al. Pantazi	Sur certaines congruences spéciales	410
Al. Pantazi	Sur les couples de congruences stratifiables par familles de surfaces reglées	410
I. I. Popa	Géométrie centro-affine des courbes gauches . .	76
I. I. Popa	Contribution à la géométrie centro-affine différentielle	309
P. Sergescu	Sur une classe particulière d'équations	174
P. Sergescu	Sur l'organisation de l'enseignement des mathématiques en Roumanie	498

		Pag.
P. Sergescu	Compléments à ma communication du Congrès de Chambéry	498
P. Sergescu	Aperçu sur les mathématiques en Roumanie	499
Cl. Servais	Sur la géométrie du tétraèdre	33, 363
C. C. Teodorescu	Relations statiques entre la résistance, l'allongement et la contraction d'une bare d'acier	266
V. Thébault	Sur les points de contact du cercle des neuf points d'un triangle avec les cercles tangents aux trois côtés	33
V. Thébault	Sur les carrés parfaits	176
V. Thébault	Asupra tablei lui Pitagora	363
V. Thébault	Sur les nombres curieux	451
V. Thébault	Cuțitul lui Archimede	553
V. Thébault	Asupra geometriei triunghiului	553
W. Wilkosz	Une question concernant les fondements de la théorie des déformations continues	498
Gh. Zapan	Deformările psichice	499

E. CERERI *)

Nr. Cererii	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul
1	24 (XXI)	?
4	24 „	?
5	24 „	?
7	59 „	?
8	59 „	?
10	91 „	?
11	144 „	?
12	145 „	?
13	145 „	219 (XXI) ?
14	183 „	?
15	219 „	?
16	254 „	?
17	294 „	264 (XXXVIII) ?
20	420 „	?
23	17 (XXII)	?
24	75 „	?
26	161 „	?
27	187 „	?
28	213 „	?
29	231 „	?
30	258 „	?
31	277 „	?
32	277 „	259 (XXIII) 39, 186 (XXIV)?
33	308 „	?
34	40 (XXIII)	?
35	40 „	?
36	65 „	?
37	86 „	211 (XXIII) ?
38	112 „	?
39	137 „	?
40	157 „	?
41	185 „	?
42	211 „	?
43	235 „	?
44	259 „	?
45	275 „	?
46	13 (XXIV)	?
49	57 „	?
50	70 „	?
51	88 „	?
52	103 „	?
55	152 „	?
56	168 „	?
58	16 (XXV)	?
59	36 „	?
60	58 „	?
61	58 „	?
62	71 „	?
63	71 „	?
64	122 „	?
65	122 „	?

*) In această tabelă semnul ? arată că nu s'a primit răspuns sau că se mai așteaptă răspuns dacă e pus după răspuns. Litera A arată că răspunsul se trimite autorului.

Nr. Cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
66	155 (XXV)	?
67	175 „	?
68	199 „	?
70	223 „	?
71	251 „	?
73	45 (XXVI)	?
74	45 „	?
75	94 „	?
77	198 „	?
78	227 „	?
80	263 „	?
81	27 (XXVII)	?
82	27 „	160 (XXVII)?
83	160 „	?
84	197 „	?
85	197 „	?
86	240 „	?
87	283 „	?
88	329 „	?
89	361 „	?
91	26 (XXVIII)	?
92	57 „	?
93	57 „	?
94	103 „	?
95	136 „	?
96	136 „	?
97	213 „	?
98	213 „	?
99	256 „	?
100	297 „	?
101	342 „	?
102	458 „	?
103	458 „	?
104	24 (XXIX)	?
105	58 „	?
107	145 „	?
108	226 „	?
109	298 „	?
112	419 „	?
113	454 „	?
115	22 (XXX)	?
116	102 „	?
117	102 „	?
118	140 „	?
119	218 „	?
120	261 „	?
122	306 „	?
123	337 „	?
124	383 „	?
126	423 „	?

Nr. Cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
128	33 (XXXI)	?
129	55 „	?
130	56 „	?
131	100 „	?
134	184 „	?
142	53 (XXXII)	?
143	102 „	?
144	142 „	?
146	216 „	?
148	296 „	?
149	343 „	?
152	19 (XXXIII)	19(XXXIII)?
153	51 „	?
154	51 „	?
157	146 „	?
158	185 „	?
159	217 „	?
162	295 „	?
163	341 „	?
166	457 „	?
179	385 (XXXIV)	?
181	24 (XXXV)	?
186	216 „	?
193	466 „	?
196	57 (XXXVI)	?
201	221 „	?
207	414 „	?
208	462 „	?
210	62 (XXXVII)	?
211	98 „	?
212	137 „	?
214	217 „	?
215	260 „	?
219	425 „	?
220	448 „	?
221	24 (XXXVIII)	33, 77
223	94 „	?
227	57 (XXXIX)	?
235	222 „	?
237	360 „	?
238	409 „	?
239	458 „	?
241	126 (XL)	?
242	176 „	414, 452
243	212 „	?
244	266 „	?
245	309 „	?
246	364 „	452
247	499 „	?
248	553 „	?

F. DIVERSE

Pag.

1) Sporirea bibliotecii „Gazeta Matematică“ . . . 33, 78, 127, 177, 212, 267, 310, 365, 415, 454, 500

2) Şedinţele Societăţii române de Ştiinţe, secţia matematică . 127, 177, 212, 267, 309, 364, 453, 500

Pag.

3) Proclamarea D-lui Prof. P. MONTEL, *Doctor Honoris Causa*, al Universităţii din Cluj 500
4) Cursuri ţinute de D-l Prof. P. MONTEL 500

G. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE

a) Repartizarea problemelor propuse după materii

Aritmetica şi teoria numerelor 4415, 4417, 4427, 4428, 4429, 4431, 4439, 4440, 4441, 4442, 4451, 4465, 4466, 4476, 4477, 4488, 4501, 4512, 4513, 4523, 4535, 4536, 4537, 4548, 4549, 4550.

Geometria 2446, 2536, 4045, 4418, 4419, 4424, 4432, 4433, 4434, 4435, 4443, 4444, 4445, 4446, 4452, 4453, 4454, 4455, 4456, 4461, 4464, 4467, 4468, 4469, 4470, 4474, 4475, 4478, 4479, 4480, 4481, 4484, 4487, 4489, 4490, 4491, 4500, 4502, 4503, 4510, 4511, 4514, 4515, 4516, 4524, 4525, 4526, 4527, 4528, 4538, 4539, 4540, 4541, 4551, 4552.

Algebra 4416, 4420, 4421, 4426, 4430, 4447, 4457, 4458, 4462, 4471, 4472, 4482, 4483, 4486, 4492, 4496, 4497, 4499, 4504, 4505, 4507, 4508, 4517, 4518, 4519, 4520, 4529, 4530, 4532, 4542, 4546, 4553, 4554, 4557, 4558.

Trigonometrie 4422, 4423, 4436, 4448, 4459, 4460, 4463, 4485, 4493, 4494, 4495, 4506, 4531, 4543, 4544, 4545. 4555, 4556.

Analitica 4425, 4438, 4449, 4498, 4522.

Analiza 4437, 4473, 4521, 4533.

Astronomia 4450.

Mecanica 4509, 4534, 4547.

b) Repartizarea problemelor propuse pe autori

N. Abramescu 4481
M. Amărăşteanu 4457
Th. Angheluţă 4482, 96
C. N. Avram 4443
N. Botea . . . . . 4419, 30, 44, 55, 71, 89, 504, 18, 27, 40, 58.
G-l Gh. Buicliu . 4427, 48, 65, 77, 510, 4, 33, 5, 49
M. Chiriţă 4529
N. Ciorănescu . . 4424, 36, 62, 92
Th. Gh. Cocea . . 4469, 526, 41, 51
I. Curchi 4545
I. Deac 4543, 55
Donciu N. 4556
M. I. Focşeneanu . . 4438, 98, 522
Gh. Th. Gheorghiu 4423, 35, 46, 73, 95
Şerb. A. Gheorghiu . . . 4453, 68
M. Ghermănescu 4415, 31, 41, 72, 83, 97, 501, 21, 30, 46, 50
D. V. Ionescu 4425
I. Ionescu . . 4416. 28, 39, 51, 63, 75, 87, 99, 511, 23, 36, 47
C. Ionescu Bujor . . 4418, 32, 45, 60, 7, 85, 91, 502, 15, 52
C. Ivănescu 4434, 70
Maior I. Linteş . 4466, 80, 503, 53
P. Mirescu 4456, 78, 519
Nicolau H. C. 2446
M. Nicolau 4449
M. Nicolescu 4045, 421
Al V. Niculescu 4539
Lt. C-dor Gh. Niculescu . . . 4474
Şt. Olteanu 4433
D. Perieţeanu 2536
G-l Gh. I. Popescu 4528
T. Popoviciu . 4420, 42, 86, 508, 32
R. Racliş 4426
Al. A. Roşu . . . 4450, 8,93, 513
I. C. Schileru 4509
Gh. D. Simionescu 4461, 79, 90, 505
T. Stoicescu 4459, 507
V. Thébault . . . 4417, 29, 40, 52, 64, 76, 88, 500, 12, 24, 37, 38
O. N. Ţino . 4422, 506, 17, 42, 54
P. Trofimov 4525, 38
Gh. Vasiliu . 4437, 47, 54, 84, 94, 516, 31
M. Velea 4544
R. Woinaroski 4534
Lt. C-dor Gr. Zapan . . 4520, 57

c) Indicarea paginei la care a fost propusă sau rezolvată

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
171	76 (II), 198 (XVI)	
485	104 (V), 198 (XVI)	NR
585 *)	172 (VI), 238 (XVI)	
676	148 (VII)	
691	196 „, 278 (XVI)	NR
766	124 (VIII), 319 (XVI), 372 (XXX)	NR
825	288 (VIII), 358 (XVI)	268
887	172 (IX), 358 (XVI)	
914	267 (IX)	
944 **)	52 (X)	
1000 ***)	220 „, 438 (XVI)	NR
1008	244 (X), 462 (XVI)	NR
1056	100 (XI)	NR
1058	100 „	NR
1092	196 „	
1146	76 (XII)	NR
1156	100 „	
1178	172 „	NR
1180	172 „	
1188	228 „	
1214	296 „	
1236	64 (XIII)	
1270	192 „	NR
1271	192 „	NR
1287	256 „	555
1297	288 „	NR
1299	319 „	NR
1307	320 „	454
1310	352 „, 372 (XXXI)	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
1342	64 (XIV)	
1367	128 „	NR
1379	160 „	
1384	191 „	NR
1386	192 „	311
1398	224 „	
1399	224 „, 200 (XVI)	NR
1412	256 (XIV)	NR
1424	228 „	
1450	352 „	NR
1497	128 (XV)	
1533	224 „	
1534	224 „	556
1553	228 „	NR
1563	320 „	
1576	352 „	
1577	352 „	
1591	39 (XVI)	
1632	159 „	
1637	160 „	
1650	200 „	NR
1656	239 „	
1676	279 „	
1679	280 „	NR
1690	320 „	
1702	360 „	
1711	399 „, 372 (XXXI)	NR
1729	440 (XVI)	492 ****)
1734	463 „	
1735	464 „	
1753	80 (XVII)	
1764	120 „	NR
1773	160 „	
1778	199 „	
1790	240 „	
1823	400 „	
1831	439 „	
1835	440 „	

1) Numărul latin din paranteză indică volumul în care problema este propusă. Problemele care au în coloana a doua mai multe numere au fost publicate sau rectificate de mai multe ori.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru acelea în dreptul cărora nu scrie niciun număr, redacția posedă soluțiuni bune care nu au fost publicate.

*) Soluția problemei 585 s'a publicat la pag. 88 Vol. VII. Se mai așteaptă discuția la punctele cerute în nota de la finele acelei soluții.

**) A se vedea pag. 292 Vol. XXXI.

***) A se vedea pag. 291 Vol. XXXI.

****) Rezolvată, a se vedea pag. 492 Vol. XXXIX.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
1840	466 (XVII)	
1858	78 (XVIII)	
1876	119 „	NR
1882	120 „	
1892	160 „	457
1898	199 „	
1906	200 „	NR
1911	239 „	
1914	239 „	NR
	280 „	
1922	278 „	
1929	279 „	NR
1934	280 „	
	320 „	
1944	319 „	
1945	320 „	
	360 „	
1948	358 „	
1958	359 „	
1959	360 „	NR
1969	399 „	
1976	431 „	
1987	462 „	NR
2003	40 (XIX)	365
2004	40 „	NR
2016	79 „	
2017	80 „	NR
2018	80 „	
2024	118 „	
2025	119 „	
2032	120 „	
2035	159 „	
2038	159 „	
2048	198 „	
2055	200 „	
2056	200 „	
2058	200 „	
2063	238 „	
	280 „	
2065	239 „	
2070	240 „	NR
	280 „	
2074	278 „	NR
2079	279 „	
2083	280 „	
2091	319 „	
2106	358 „	
2108	359 „	
2110	359 „	
2111	360 „	459
2112	360 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
2116	398 (XIX)	
2118	399 „	
2129	438 „	
2130	460 „	
2133	439 „	
2144	461 „	
2145	462 „	
2147	462 „	
2170	119 (XX)	NR
2176	120 „	
2187	160 „	
2194	197 „	
2197	198 „	
2217	239 „	
2222	240 „	
2227	279 „	
2233	280 „	303 *)
	422 (XXXI)	
2235	280 (XX)	
2240	318 „	
2247	320 „	
2248	320 „	
2249	320 „	
2250	320 „	
2263	359 „	
2264	360 „	
2265	360 „	
2266	360 „	
2274	398 „	
2281	400 „	
2284	439 „	
2289	439 „	
2290	439 „	
2295	461 „	
2298	462 „	
2301	462 „	
2302	462 „	
2311	40 (XXI)	
2318	79 „	
	160 „	
2329	118 „	77 **)
2330	118 „	
2332	119 „	
2337	120 „	
2338	122 „	NR
	422 (XXXI)	
2343	157 (XXI)	
2344	158 „	
2346	158 „	213
2353	159 „	
2354	198 „	

*) Pag. 303 Vol. XXXVI unde i s'a publicat soluția sub numărul greșit 2223.
**) „ 77 „ XXIV „ „ „ „ „ „ „ „ 2324.

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
2356	199 (XXI)	
2357	199 „	
2360	199 „	558
2365	200 „	
2370	239 „	
2375	240 „	
2381	278 „	
2390	280 „	
2392	280 „	380 *)
2394	318 „	
2397	319 „	
2398	319 „	
2402	320 „	
2405	320 „ / 423 (XXXI)	NR
2408	359 (XXI)	
2421	399 „	
2422	399 „	
2423	399 „	
2430	439 „	NR
2435	440 „	
2436	440 „	
2439	440 „	NR
2446	240 (XXIII) / 573 (XL)	
2456	31 (XXII)	
2458	32 „	
2461	32 „	
2462	62 „	
2466	63 „	NR
2469	63 „	
2477	95 „	NR
2481	96 „	127
2489	120 „	116 **)
2497	144 „	
2500	144 „	
2502	167 „	NR
2503	167 „ / 333 (XXXI)	NR
2510	191 (XXII)	
2529	262 „	
2536 ***)	478 (XL)	561
2537	287 (XXII)	
2539	288 „	
2545	312 „	
2552	47 (XXIII)	
2553	47 „	
2556	48 „	NR
2560	72 „	

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
2566	120 (XXIII)	
2569	120 „	
2573	144 „	
2575	168 „	
2577	168 „	NR
2578	168 „	
2585	215 „	
2586	216 „	
2587	216 „	NR
2591	240 „	
2593	264 „	
2598	288 „	
2599	288 „	
2602	318 (XXXI)	
2607	31 (XXIV)	NR
2623	80 „	
2631	112 „	
2638	127 „	NR
2640	128 „	
2643	128 „	270
2645	143 „	
2647	143 „	
2655	191 „	NR
2660	191 „	
2661	192 „	
2664	24 (XXV)	
2665	24 „	NR
2671	48 „	313
2675	63 „	
2682	64 „	
2683	79 „	79
2684	80 „	NR
2688	80 „	
2689	80 „	
2692	108 „	
2694	108 „	
2701	141 „	
2706	142 „	
2709	142 „	NR
2713	143 „	NR
2717	143 „	NR
2727	168 „	
2731	191 „	
2735	192 „	NR
2752	264 „	
2758	56 (XXVI)	
2769	79 „	NR
2778	104 „	
2780	104 „	NR

*) Pag. 380 Vol. XXXVIII unde i s'a publicat soluția. Până acum nu a fost anunțată ca publicată, la tabla de materii a volumelor anterioare.

**) Pag. 116 Vol. XXIII unde i s'a publicat soluția sub numărul greșit 2480.

***) A se vedea erata pag. 478 Vol. XL.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
2789	135 (XXVI)	
2795	159 „	
2803	160 „	
2814	192 „	NR
2818	216 „	
2820	216 „	
2822	216 „	
2827	247 „	
2828	248 „	
2837	279 „	462
2850	335 „	
2851	335 „	
2860	39 (XXVII)	505
2861	40 „	
2865	70 „	NR
2886	104 „	NR
2888	104 „	
2889	104 „	311
2895	143 „	
2906	184 „	
2909	221 „	NR
2912	222 „	NR
2913	222 „	34
2920	262 „	
2922	263 „	
2926	264 „	NR
2936	343 „	NR
2947	376 „	NR
2953	416 „	
2955	416 „	
2959	448 „	
2960	448 „	
2969	39 (XXVIII)	
2971	39 „	
2972	40 „	
2980	79 „	
2983	79 „	
2985	80 „	
2986	80 „	315
2993	119 „	
2996	120 „	
2999	120 „	
3000	120 „	
3003	159 „	
3005	159 „	
3013	199 „	
3019	200 „	
3041	319 „	
3045	319 „	NR
3052	359 „	
3054	360 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
3059	360 (XXVIII)	
3069	400 „	NR
3070	400 „	
3071	439 „	
3073	439 „	
3075	439 „	
3081	479 „	
	454 (XXXI)	NR
3085	480 (XXVIII)	
3086	480 „	
3090	480 „	
3091	39 (XXIX)	
3095	40 „	
3096	40 „	
3108	80 „	
3109	80 „	
3114	119 „	35 *)
3118	120 „	
3127	159 „	NR
3134	199 „	
3150	240 „	
3160	280 „	
3161	318 „	NR
3167	320 „	
3169	320 „	465
3173	358 „	
3177	359 „	
3178	360 „	
3180	360 „	
3189	400 „	
3198	440 „	
3208	480 „	NR
3209	480 „	500
3210	480 „	
3220	40 (XXX)	
3227	80 „	
3228	80 „	
3230	80 „	NR
3232	119 „	
3236	119 „	
3239	120 „	
3245	160 „	
3248	160 „	
3249	160 „	
3251 **)	198 „	
3253	199 „	
3255	199 „	NR
3260	200 „	NR
3267	239 „	
3277	280 „	
3279	280 „	

*) I s'a dat soluția sub numărul greșit de 3144 la pag. 35 Vol. XXXI.

**) Un început de soluție s'a dat la pag. 314 Vol. XXX. Se mai așteaptă soluția.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3282	318 (XXX)	130
3287	320 „	
3288	320 „	
3290	320 „	
3291	358 „	
3296	359 „	
3298	359 „	NR
3299	360 „	
3300	360 „	NR
3304	399 „	NR
3308	400 „	
3309	400 „	
3310	400 „	NR
3311	438 „	
3312	439 „	
3313	439 „	
3316	439 „	NR
3318	440 „	NR
3319	440 „	
3320	440 „	
3330	480 „	
3332	119 (XXXI)	
3335 *)	40 „ 158 (XXXVII)	
3340	40 (XXXI)	
3341	79 „	
3343	79 „	
3350	80 „	NR
3354	120 „	178
3356	120 „	179
3360	120 „	
3365	159 „	
3368	160 „	
3389	240 „	
3390	240 „	132
3396	280 „	
3404	318 „	
3405	319 „	NR
3412	358 „	NR
3419	360 „	
3424	399 „	NR
3425	399 „	NR
3429	400 „	
3430	400 „	
3439	440 „	
3445	479 „	
3448	479 „	
3450	480 „	181
3456	119 (XXXIII)	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3457	39 (XXXII)	
3459	40 „	
3467 **)	79 „	
3468	80 „	
3472	80 „	NR
3474	119 „	
3477	119 „	
3488	159 „	
3489	159 „	NR
3493	160 „	NR
3495	199 „	
3497	199 „	
3499	199 „	
3503	200 „	
3504	200 „	
3506	239 „	
3509	239 „	
3512	240 „	
3513	240 „	
3521	279 „	
3522	280 „	NR
3523	280 „	NR
3524	280 „	NR
3533	320 „	NR
3534	320 „	
3535	359 „	
3536 ***)	438 „	
3542	360 „	NR
3545	398 „	NR
3546	399 „	NR
3547	399 „	
3551	39 (XXXIII)	
3554	400 (XXXII)	
3557	438 „	
3562	440 „	NR
3563	440 „	
3565	479 „	
3572	480 „	NR
3573	480 „	NR
3574	480 „	215
3584	79 (XXXIII)	
3588	80 „	
3589	80 „	
3593	119 „	
3597	120 „	
3600	120 „	
3607 ****)	159 „	
3608	159 „	NR
3610	160 „	

*) O soluție incompletă a acestei probleme s'a publicat la pag. 182 Vol. XXXVII.

**) Vezi pag. 120 Vol. XXII.

***) Vezi pag. 40 Vol. XXXIII.

****) Vezi erata pag. 240 Vol. XXXIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3620	199 (XXXIII)	
3622	239 „	
3625	239 „	
3627	278 „	NR
3630	240 „	
3632	279 „	NR
3635	279 „	
3636	279 „	218
3639	280 „	
3640	280 „	
3644	319 „	
3646	320 „	221
3647	320 „	NR
3650	320 „	
3653	359 „	
3657	359 „	NR
3658	360 „	
3659	360 „	
3660	360 „	
3664	399 „	
3665	399 „	NR
3675	439 „	
3677	440 „	
3681	478 „	NR
3682	478 „	NR
3684	479 „	NR
3689	480 „	
3692	39 (XXXIV)	
3693	39 „	
3699	40 „	NR
3700	40 „	NR
3702	79 „	
3703	79 „	NR
3705	79 „	
3706	79 „	
3713	119 „	
3714	119 „	
3720	120 „	
3725	160 „	
3732	199 „	
3733	119 (XXXV)	NR
3736	200 (XXXIV)	NR
3749	240 „	
3755	279 „	
3760	280 „	
3762	319 „	
3763	319 „	
3764	319 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3765	320 (XXXIV)	
3766	320 „	
3768	320 „	
3772	359 „	
3775	360 „	
3776	360 „	
3780	360 „	
3784	399 „	
3785 *)	399 „	71
3787	400 „	
3790	400 „	
3792	439 „	
3793	439 „	NR
3802	479 „	
3804	479 „	NR
3807	480 „	
3808 **)	480 „	NR
3810	480 „	
3817	40 (XXXV)	
3819	40 „	
3820	40 „	
3823	79 „	
3824	79 „	
3829	80 „	NR
3832	119 „	
3833	119 „	562
3836	120 „	NR
3837	120 „	
3839	120 „	
3840	120 „	
3844	159 „	NR
3845	159 „	
3849	160 „	
3853	199 „	NR
3863	239 „	
3864	239 „	NR
3867	240 „	
3872	279 „	194 ***)
3873	279 „	
3874	38 (XXXVIII)	
3876	279 (XXXV)	
3878	280 „	367
3880	280 „	NR
3883	319 „	
3896	360 „	NR
3900	360 „	
3902	398 „	
3906	399 „	

*) O soluție necomplectă i s'a dat la pag. 464 Vol. XXXIX. A se vedea nota 1) dela pag. 71 și nota 20 dela pag. 122 Vol. XL.

**) A se vedea complectarea enunțului la pag. 288 Vol. XL.

***) Pag. 194 Vol. XXXVIII unde i s'a dat soluția, ceeace nu a fost menționat în tabla de materii respectivă.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3909	400 (XXXV)	NR
3911 *)	439 „	
3913	439 „	NR
3915	439 „	NR
3916	439 „	NR
3919	440 „	81
3920	440 „	NR
3924	479 „	
3926 **)	480 „	
3928	480 „	35
3933	39 (XXXVI)	NR
3934	39 „	
3939	40 „	
3944	79 „	NR
3945	79 „	
3948	80 „	
3950	80 „	
3958	119 „	
3961	159 „	
3965	159 „	
3975	200 „	
3976	200 „	
3977	200 „	224
3983	238	NR
3985	239 „	
3988	240 „	
3999	280 „	
4000	280 „	
4005	319 „	
4010	320 „	NR
4013	359 „	NR
4021 ***)	398 „	
4022	398 „	
4024	399 „	
4028	400 „	
4029	400 „	
4030	400 „	NR
4031	439 „	225
4034	439 „	NR
4035	440 „	
4038	440 „	
4041	38 (XXXVIII)	
4044	479 (XXXVI)	
4045	142 (XL)	NR
4046	480 (XXXVI)	
4053	39 (XXXVII) 120 (XXXVIII)	NR
4055	39 (XXXVII)	
4056	79 (XXXVII)	
4059	40 „	NR
4060	40 „	
4061	79 „	227
4062	79 „	NR
4066	80 „	
4067	80 „	
4068	80 „	NR
4070	80 „	NR
4073	119 „	NR
4074	119 „	
4075	120 „	
4080	120 „	
4083	159 „	
4084	159 „	
4085	159 „	NR
4088	160 „	
4091	199 „	
4093	199 „	
4096	200 „	
4097	200 „	
4098	200 „	
4102	239 „	NR
4103	239 „ 120 (XXXVIII)	
4104	239 (XXXVII)	
4105	240 „	
4107	240 „	
4108	240 „	317
4111	279 „	NR
4112	279 „	NR
4118	280 „	NR
4120	280 „	230
4121	318 „	
4123	319 „	470
4125	319 „	
4126	319 „	
4127	320 „	
4132	359 „	NR
4134	359 „	33
4135	359 „	
4146	399 „	
4147 ****)	399 „	509
4148	400 „	NR
4150	400 „	NR
4151	438 „	NR
4154	438 „	
4155	439 „	

*) Inceputul soluției acestei probleme a fost dat la pag. 468 Vol. XXXVI.

**) Vezi rectificarea pag. 40 Vol. XXXVI.

***) O soluție parțială a acestei probleme a fost dată la pag. 233 Vol. XXXVII.

****) Vezi erata pag. 440 Vol. XXXVII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4156	439 (XXXVII)	368
4157	439 „	
4158	440 „	272
4161	478 „	182
4162	478 „	
4163	478 „	NR
4165	479 „	
4166	479 „	
4167	479 „	NR
4168	480 „	38
4169	480 „	NR
4170	480 „	84
4172	39 (XXXVIII)	
4173	39 „	
4175	39 „	
4177	40 „	
4178	40 „	133
4180	40 „	232
4181	78 „	
4184	79 „	
4185	79 „	
4186	80 „	
4187	80 „	
4190 *)	80 „	
4191	118 „	
4192	118 „	NR
4194	119 „	
4196	119 „	
4199	120 „	
4200	120 „	319
4203	159 „	NR
4205	160 „	
4206	160 „	NR
4210	160 „	NR
4213	198 „	NR
4214	198 „	
4215	199 „	
4218	199 „	272
4224	239 „	234
4225	239 „	
4226	240 „	
4227	240 „	
4228	240 „	416
4230	240 „	NR
4232	279 „	
4234	279 „	
4235	279 „	325
4236	280 „	NR
4238	280 „	
4239	280 „	85
4240	280 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4243	319 (XXXVIII)	
4244	319 „	
4245	319 „	
4246	320 „	326
4247	320 „	
4248	320 „	
4249	320 „	NR
4250	383 (XXXIX)	
4251	359 (XXXVIII)	
4252	359 „	NR
4254	359 „	417
4255	359 „	
4256	359 „	NR
4257	359 „	
4258	360 „	472
4261	399 „	418
4266	400 „	
4269	400 „	
4270	400 „	
4271	439 „	
4273	439 „	273
4274	439 „	
4275	439 „	NR
4276	439 „	513
4277	440 „	NR
4278	440 „	40
4279	118 (XXXIX)	
4280	440 (XXXVIII)	NR
4281	479 „	NR
4282	479 „	371
4283	479 „	NR
4285 **)	479 „	
4286	480 „	
4287	480 „	NR
4288	480 „	NR
4289	480 „	NR
4290	383 (XXXIX)	NR
4294	39 „	88
4296	198 „	185
4297	40 „	
4298	40 „	
4299	40 „	
4300	40 „	
4301	78 „	NR
4302	78 „	
4303	78 „	NR
4304	79 „	372
4305	79 „	374
4306	79 „	
4307	79 „	
4308	80 „	

*) Vezi erata pag. 120 Vol. XXXVIII.

**) Vezi erata pag. 40 Vol. XXXIX.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4310	80 (XXXIX)	274
4312	119 „	276
4313	119 „	
4314	119 „	
4315	120 „	NR
4316	120 „	
4317	120 „	375
4318	120 „	
4319	120 „	NR
4320	120 „	NR
4321	159 „	
4322	159 „	41
4325	159 „	278
4326	159 „	
4328	160 „	137
4329	160 „	
4330	160 „	
4331	198 „	224 *)
4332	198 „	NR
4333	198 „	NR
4335	199 „	
4336	199 „	279
4337	200 „	NR
4338	200 „	
4339	200 „	
4340	200 „	NR
4341	239 „	NR
4342	239 „	NR
4343	240 „	
4344	240 „	NR
4345	240 „	281
4347	240 „	328
4349	240 „	
4350	240 „	
4351	286 „	376
4352	286 „	NR
4353	286 „	378
4354	287 „	
4355	287 „	
4356	287 „	NR
4357	288 „	NR
4358	288 „	NR
4359	288 „	42
4360	334 „	NR
4361	334 „	
4362	334 „	NR
4363	335 „	NR
4364	335 „	421
4365	335 „	
4366	335 (XXXIX)	564
4367	336 „	
4368	336 „	
4369	336 „	
4370	336 „	NR
4372	383 „	140
4373	383 „	
4374	383 „	
4375	383 „	
4376	384 „	
4377	384 „	
4378	384 „	
4379	384 „	
4380	384 „	NR
4381	430 „	90
4382	431 „	
4383	431 „	
4384	431 „	NR
4385	431 „	
4386	431 „	
4387	432 „	
4388	432 „	514
4389	432 „	NR
4390	432 „	330
4391	478 „	NR
4392	478 „	187
4393	478 „	NR
4394	479 „	
4395 **)	479 „	NR
4396	479 „	NR
4397	479 „	188
4398	480 „	
4399	480 „	NR
4400	480 „	
4401	480 „	
4402	480 „	
4403	526 „	516
4404	526 „	NR
4405	526 „	
4406	526 „	
4407	527 „	
4408	527 „	565
4409	527 „	
4410	527 „	
4411	528 „	
4412	528 „	NR
4413	528 „	
4414	528 „	
4415	46 (XL)	565

*) Pag. 224 Vol. XXXIX unde i s'a publicat soluția, ceea ce nu a fost menționat în tabla de materii respectivă.

**) A se vedea erata pag. 48 Vol. XL.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4416 . . .	46 XL	NR
4417 . . .	46 „	NR
4418 *) . .	47 „	
4419 . . .	47 „	
4420 . . .	47 „	
4421 . . .	47 „	566
4422 . . .	48 „	
4423 . . .	48 „	
4424 . . .	48 „	
4425 **) . .	48 „	
4426 . . .	48 „	NR
4427 . . .	94 „	
4428 . . .	95 „	
4429 . . .	95 „	333
4430 . . .	65 „	
4431 . . .	95 „	521
4432 . . .	95 „	
4433 . . .	95 „	568
4434 . . .	95 „	522
4435 . . .	96 „	
4436 . . .	96 „	
4437 . . .	96 „	
4438 . . .	96 „	NR
4439 . . .	142 „	379
4440 . . .	142 „	
4441 . . .	143 „	NR
4442 . . .	143 „	NR
4443 . . .	143 „	
4444 . . .	143 „	570
4445 . . .	143 „	NR
4446 . . .	143 „	
4447 . . .	144 „	
4448 . . .	144 „	
4449 . . .	144 „	NR
4450 . . .	144 „	
4451 . . .	190 „	475
4452 . . .	190 „	NR
4453 . . .	190 „	
4454 . . .	191 „	
4455 . . .	191 „	
4456 . . .	191 „	
4457 . . .	191 „	426
4458 . . .	191 „	NR
4459 . . .	192 „	
4460 . . .	192 „	
4461 . . .	192 „	NR
4462 . . .	192 „	
4463 . . .	238 „	428
4464 . . .	238 „	NR
4465 . . .	238 (XL)	NR
4466 . . .	239 „	NR
4467 ***) .	239 „	
4468 . . .	239 „	NR
4469 . . .	239 „	
4470 . . .	240 „	
4471 . . .	240 „	
4472 . . .	240 „	
4473 . . .	240 „	NR
4474 . . .	240 „	NR
4475 . . .	285 „	379
4476 . . .	285 „	NR
4477 . . .	285 „	NR
4478 ****) .	285 „	NR
4479 . . .	285 „	NR
4480 . . .	286 „	NR
4481 . . .	286 „	NR
4482 . . .	287 „	NR
4483 . . .	287 „	NR
4484 . . .	287 „	NR
4485 . . .	288 „	
4486 . . .	288 „	NR
4487 . . .	334 „	NR
4488 . . .	334 „	NR
4489 . . .	334 „	NR
4490 . . .	335 „	NR
4491 . . .	335 „	
4492 . . .	335 „	NR
4493 . . .	336 „	
4494 . . .	336 „	NR
4495 . . .	336 „	NR
4496 . . .	336 „	
4497 . . .	336 „	NR
4498 . . .	336 „	NR
4499 . . .	382 „	524
4500 . . .	382 „	NR
4501 . . .	382 „	NR
4502 . . .	382 „	
4503 . . .	383 „	NR
4504 . . .	383 „	NR
4505 . . .	383 „	NR
4506 . . .	383 „	
4507 . . .	384 „	
4508 . . .	384 „	NR
4509 . . .	384 „	NR
4510 . . .	384 „	
4511 . . .	430 „	NR
4512 . . .	430 „	
4513 . . .	430 „	NR

*) Rectificare pag. 144.
**) Vezi erata pag. 576 Vol. XL.
***) Vezi erata pag. 576 Vol. XL.
****) Vezi erata pag. 384 Vol. XL.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4514 . . .	430 (XL)	NR
4515 . . .	430 „	NR
4516 . . .	431 „	NR
4517 . . .	431 „	NR
4517 . . .	431 „	NR
4518 . . .	431 „	NR
4519 . . .	432 „	
4520 . . .	432 „	
4521 . . .	432 „	
4522 . . .	432 „	NR
4523 . . .	478 „	NR
4524 . . .	478 „	NR
5525 . . .	478 „	NR
4526 . . .	478 „	NR
4527 . . .	479 „	NR
4528 . . .	479 „	NR
4529 . . .	479 „	NR
4530 . . .	480 „	NR
4531 . . .	480 „	NR
4532 . . .	480 „	NR
4533 . . .	480 „	NR
4534 . . .	480 „	NR
4535 . . .	526 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4536 . . .	526 (XL)	NR
4537 . . .	527 „	NR
4538 . . .	527 „	NR
4539 . . .	527 „	NR
4540 . . .	527 „	NR
4541 . . .	527 „	NR
4542 . . .	527 „	NR
4543 . . .	528 „	NR
4544 . . .	528 „	NR
4545 . . .	528 „	NR
4546 . . .	528 „	NR
4547 . . .	573 „	NR
4548 . . .	573 „	NR
4549 . . .	573 „	NR
4550 . . .	574 „	NR
4551 . . .	574 „	NR
4552 . . .	574 „	NR
4553 . . .	574 „	NR
4554 . . .	574 „	NR
4555 . . .	575 „	NR
4556 . . .	575 „	NR
4557 . . .	575 „	NR
4558 . . .	576 „	NR

H. EXERCIȚII *)

Aritmetica	6(91), 8(92), 14(142), 15(189), 16(189), 17(189), 22(283), 24(283), 28(380), 30(381), 32(428), 34(430), 35(430), 37(477), 38(525), 39(525).
Algebra	5(91), 7(92), 10(92), 13(94), 20(237), 29(381), 41(525), 42(572),
Geometria	1(45), 9(92), 11(93), 12(93), 18(237), 19(237), 23(283). 31(381), 33(429), 36(477).
Trigonometria	2(45), 3(45), 4(46), 21(238), 25(284), 27(334), 40(525), 43(572).
Analiza	26(284).

I. TABLOUL NUMELOR

Ioanei R., 263, 380.
Abason E., 6, 60, 64, 175, 433.
Abel, 410, 499.
Abramescu Adriana, 318.
Abramescu N., 5, 6, 75, 76, 167, 168, 169, 242, 286, 308, 310, 311.
Acikgheozian A. N., 318.
Adam I. M. 79, 271.
Adam R., 271.
Adamescu G., 453, 481, 482.
Adams R. C., 31.
Agnesi G. Maria, 20.
Agronomoff N., 181.
Ahrens W., 33.
Aigner Al. 117.
Airy, 31.
Alaci V., 5, 6, 64, 186, 271, 313, 315, 317, 357, 363, 462, 465, 505, 508, 558, 560.
Albert A. A. 124, 307.
Albert A. I., 263.
Alcuin, 411.
Aldea N. N., 34, 224, 230, 271, 368.
Alembert D'., 274, 293, 409, 411.
Alexandrescu T. I., 15.
Alexandrescu M. L., 263.
Alexandrescu G. P. 262.
Alexandrini O., 15, 310.
Alexandru I, Țar al Rusiei, 127.
Alexandru Ioan I, 77.

*) Numerile din paranteză indică pagina la care a fost propus exercițiul, iar cele din afara parantezei indică numărul pe care-l poartă exercițiul.

Alexe Marin, 534, 535, 536.
Alexe N., 271.
Alexiu I., 276.
Alkodjandi, 412.
Amărăşteanu M., 91, 93, 141, 185, 187, 189, 191, 263, 333, 375, 379, 426, 518, 523, 572.
Amăricâ I. Tibul, 138. 185, 282.
Ampère, 411.
Andreian T. I., 309
Andronescu Pl., 64.
Angelescu A., 6, 44, 465, 466.
Anghelescu A. E., 531.
Angheluţă Th., 5, 6, 64, 212, 242, 287, 326, 336, 362, 368, 472, 509.
Aninoşanu C., 212, 293.
Antonescu N. Filofteia, 379. 571.
Antoniu Corn., 6.
Antoniu Eleonora, 36, 82.
Antoniu S. I., 5, 6, 213, 243, 292, 433, 452, 524, 552, 570.
Antoniu M., 64.
Apostol G. N., 263.
Apostol V., 138, 185.
Apostol V. R., 263, 523, 524, 570, 751.
Appell, 161.
Appolonius, 36, 242, 394.
Arcadian P. N., 79.
Archimede, 98, 149, 177, 193, 194, 242, 394, 486, 553.
Arghiriade Em., 6.
Aristotel, 411.
Armeanca I., 64, 242.
Armengaud Gh., 33.
Arşavschi Al., 218, 276.
Arsene A., 271.
Artaki-Acik N., 230.
Artzt, 70.
Asachi Gh., 488, 489, 491, 533, 534, 536.
Atanasiu N. D., 263.
Augustin St., 411.
Aurian Blăjani J., 556.
Avram, 394.
Avram N. C., 86, 88, 135, 143. 184, 276, 420, 565.
Avramescu C., 6.

Babini J. 265.
Bacaloglu E., 310, 337.
Backer S. de, 450.
Bădescu E. A., 35, 36, 138, 184, 185, 374, 375, 418, 514, 565.
Bădescu Em., 255.
Bădescu A. L., 6, 242.
Bădescu R., 64, 498, 500.
Bagarre, Băgar sau Bagard 309.
Baidaff Ig. B. 6, 25, 26, 59, 174, 211, 266, 308, 362, 363, 450, 552.
Balaban Gh., 181.
Balaban V., 15, 244.
Bălăceanu Angela, 188, 213, 277, 427, 567.
Banciu I., 6, 213.
Barbilian D., 5, 6, 64, 67, 114, 126, 212, 243, 267, 307, 309, 310, 500.
Barbu A. A., 263.
Bărbulescu M. P., 263.
Barnard A. J. R., 308.
Bărnuţiu I., 337.
Barzin M, 177.
Bauer, 124.
Bazac I. A., 263.
Beckenbach P. E., 174.
Becquerel J., 310.
Beer, 56, 57.
Beiu-Paladi G. E., 375.
Bell T. E., 124, 449.
Belloiu N. C., 263.
Bercovici M., 315.
Berdan C., 317, 465.
Bernouilli I., 177.
Bernouilli J., 177, 411, 449.
Berra S. E. A., 499.
Bessel, 174.
Bézout, 533.
Beyer, 57.
Biernaschy C. E., 79.
Bilimowitch, 60.
Birkhoff D. G., 31, 124, 307.
Black A. 31.
Blănarul I., 263.
Blanchet, 531.
Blaschke W., 114, 212.
Bliss A. G., 124.
Blumenfeld M. D., 79.
Boas P. R., 449.
Boborodea I. I., 263.
Bock I. Gh., 271.
Bogdan G. I., 263, 333, 379, 380, 427, 523, 565, 571, 572.
Bogdan Ch. M., 271.
Bogza G. V. 379. 380, 523.
Boian D. E., 263.
Boian C. I., 35, 181, 271.
Boiangiu I. Gh., 187, 373. 374, 421, 571, 572.
Boitan P. N., 263, 380.
Boneff, 60.
Bonviciano V., 486.
Borel E., 64, 77, 175, 177, 308, 362, 499.
Borneanu G., 6, 247.
Boroş C. I., 263.
Bortolloti E., 177.
Borza A. N. 184, 324, 418.
Botea N., 5, 6, 47, 95, 143, 166, 184, 191, 208, 222, 230, 232, 233, 234, 240, 243, 272, 274, 279, 335, 372, 374, 378, 383, 417, 418, 431, 433, 443, 447, 479, 527, 565, 570, 572, 576.
Botez St. M., 363, 211, 284.
Botez St. N. (Botesu), 337, 363.
Bouligand G., 173.
Bourion, 451.
Bourlet C., 181.
Bouvaist R., 211.
Brahtz A. H. J., 31.
Bratu Gh., 6, 64, 242.
Brener M. A., 6.
Breţeanu C. C., 262.
Brianchon, 66.
Briggs, 57.
Briot Ch., 78.
Brocard, 104, 273, 274.
Brouver M., 177.
Brown B. A., 31, 177.
Bruckner V., 7, 254, 255.
Bruwier L., 175, 362.
Bucur N. V., 188, 263, 333, 379, 380, 524.
Bucurenciu V., 263.
Budeanu I. C., 7, 175, 243, 363, 459, 462.
Buicliu Gh., 5, 7, 27, 29, 42, 67, 78, 81, 84, 88, 90, 94, 106, 111, 119, 130, 132, 136, 144, 171, 187, 188, 211, 215, 238, 242, 243, 253, 258, 276, 277, 278, 285, 306, 356, 360, 367, 368, 384, 401, 418, 421, 426, 430, 433, 443, 445, 480, 492, 498, 521, 526, 562, 563, 573.

Buiculescu R., 263.
Bujoreanu N., 7, 243.
Bulat M., 263.
B nescu D. A., 5, 7, 243, 249, 256, 258, 433, 450.
Bungescu I., 7.
Bungeţianu Preduţa, 90, 138, 185, 282, 304, 372, 375.
Buontempo G., 308.
Buradescu Tr., 7.
Burdon H. J. 125.
Buricovici A. N,, 181.
Buşilă Ad., 7.
Buşilă B., 554.
Buşilă D. C., 7, 243.
Buşilă I., 5, 7, 25, 243, 258, 443.
Busman F., 416.
Buzescu V. A., 571.
Buzincu I. I., 263, 333, 379, 380, 427, 523.

Cajori, 307.
Călin I. A., 181.
Călin M. Gh., 181, 271, 315.
Călinescu I. A., 126, 271.
Călugăreanu G., 38, 64, 72, 242, 362, 363, 498, 500.
Cambureanu V. D., 7.
Cambureanu V., 7.
Cammeron H. R., 307.
Cantacuzino C., 452.
Cantacuzino Stolnicul C., 414, 415, 486.
Cantacuzino Şerban, 486.
Capri A., 263.
Capriel H., 23, 24, 166, 443.
Capriel I., 7, 255.
Capriş V. M., 262.
Caracudovici Margareta, 276, 280.
Caraiman A., 263.
Caraman E., 7.
Caraman D. N., 380.
Caraman D. V., 263.
Caravelli V., 362, 450.
Cardan G., 177.
Cardara Gh., 139.
Carey M. R., 125.
Cârstoiu D., 309.
Cârstoiu D. I., 224, 364, 500.
Cartan E. 386.
Casandra (Văduva lui A. Teodorescu), 453.
Casey, 103.
Câşneanu C., 185.
Cassian Gh., 7.
Cassini, 90.
Catalan E., 337, 338.
Caţichi E., 219.
Cătuneanu M. D., 263.
Cauchy, 410, 535.
Cavalieri, 177.
Cayley, 410.
Cazacu N. C., 7.
Ceauşescu V., 41, 86, 90, 135, 137, 141, 185, 187, 231, 234, 263, 272, 273, 276, 278, 282, 318, 333, 375, 376, 418, 421, 427, 434, 472, 523, 566, 570, 571.
Cecati V. O., 263.
Cehan G. A., 263, 380.
Cesare A. E. de, 266.
Cesaro, 445.
Ceulen L. von, 98.
Ceva, 65.
Chasles, 410, 411.
Chiriac C., 86, 185, 187, 234, 276, 324, 375, 379, 417, 421, 427, 523.
Chiriac I., 278.
Chiriacescu O., 255.
Chiricuţă A., 7.
Chirilă V. I., 180.
Chiriţă V. G., 263.
Chiriţă M., 86, 94, 135, 427, 479.
Chiţulescu I. I., 5, 7, 169, 243, 247, 433.
Cioc I. D., 263, 434.
Cioc M., 7, 243.
Cioc M. M., 35.
Ciorănescu I. C., 317.
Ciorănescu I. N., 5, 8, 48, 64, 76, 77, 96, 155, 173, 185, 186, 192, 203, 212, 230, 243, 266, 274, 276, 310, 319, 324, 335, 408, 409, 433, 500, 513, 514.
Ciucă I. I., 263.
Ciurea I. I., 64.
Claeys A., 450.
Clarkson A. J., 31.
Claudel, 136.
Clemow J., 211, 450.
Coandă I. V., 185, 188, 375.
Coble B. A., 499.
Cocea G. T., 208, 239, 421, 424, 425, 479, 527, 565, 574.
Codrescu T., 256.
Cohen-Nagel, 362.
Cohn L. A., 271.
Cojocaru P. P., 263, 333, 379, 427, 523, 571, 572.
Collins, 32.
Comănescu I. A., 380.
Comănescu A. T., 263.
Comberousse Ch. de, 58.
Combette E., 212.
Comte A., 266, 363, 409, 450.
Conrad G., 52.
Constantinescu C. C., 263.
Constantinescu D., 262.
Constantinescu Gh. Ing., 8.
Constantinescu Gh., 106.
Constantinescu Gh. Gh., 64, 133, 268, 363, 366, 552.
Constantinescu N. I., 271.
Constantinescu P. St., 263.
Constantinescu T., 8, 241, 244, 250, 253, 255.
Constantinescu C. V, 262.
Constantinescu Z., 5, 8.
Constantinescu-Buzău 36, 82, 84.
Conta V., 23, 114.
Cordova Gh., 185.
Cornăţeanu I. A., 263, 379, 571, 572.
Coşereanu I., 81.
Cosma V., 263.
Coşniţă C., 28, 32, 75, 181, 221, 223, 271.
Coşniţă V., 560.
Coşovliu St., 185, 375.
Costăchescu V. C., 181, 271, 317, 355.
Costescu C., 333.
Costinescu D., 8.
Coteanu V., 185.
Cotescu C., 379, 380, 523.
Cousinery E. B., 454, 500.
Couturat L., 408.
Cozma V., 185.
Craful I. A. d'Eune, 412.
Craiu N. I., 36.
Craiu G. P., 380.
Crăşucanu C., 282.
Crawford L., 450.
Crelle, 289.
Cremona, 124.
Cristescu I., 181, 271.
Cristescu V., 15, 24, 181, 242, 244, 251, 278, 310, 442, 443.

Cristiano al 5-lea, 53.
Crivăţ I. V., 35, 368.
Cruţescu T., 263.
Csecke W., 90, 184, 185, 188, 276, 277, 282, 373, 420, 516, 524.
Cuna St. St., 263.
Curchi I., 36, 86, 133, 273, 318, 417, 528.

Dan Marin 86, 282.
Danilo I. S., 79.
Darboux, 221, 222, 223, 443.
Dăscălescu V. C., 185, 33[illegible], 524.
Dassen C. C., 408.
Davidescu Em., 15, 444, 310.
Davis T. H., 499.
Deac I., 36, 82, 528, 575.
Deaux R., 32, 211.
Deceanu Gh. Gh., 263, 379, 434.
Delanges, 32.
Demetrescu Gh., 64, 498.
Demetriu N. P., 365.
Denjoy A., 174, 212, 362.
Desargues, 447.
Descartes, 177, 249, 365, 410, 411.
Deslandres H., 175.
Desportes E., 78.
Deweck M., 362.
Diamond H. A., 124.
Dickson E. L., 31, 174.
Dieudonné J., 197, 362.
Dieulefait E. C., 499.
Dilherri M. J., 193.
Dimitriu E. V., 263.
Dinulescu I. N., 181, 271.
Diophante 394.
Dirichlet, 77, 176, 211, 212, 3[illegible]2, 409.
Dix H. C., 449.
Dobrescu A., 119, 188, 282.
Dobrescu D. P., 138, 141, 184, 185, 187, 188, 263, 273, 277, 375, 411, 426, 523, 570.
Dobrin V. V. 263.
Dogaru S. D., 318.
Donciu Th. N., 35, 273, 375, 575.
Doob L. J., 124.
Dordea Tr., 15, 25.
Dorneanu S. V., 271.
Dostor, 145.
Drăghinici N., 499.
Drăghicescu D. I. C. V., 263.
Dragomir P. R., 379, 380.
Dragomirescu T. I., 263.
Drăgulănescu, 415.
Drăguţ Maria, 184, 282.
Drămbă N. C., 181.
Ducasse P., 213.
Ducloat V., 267.
Duclout J., 213.
Dufour L, 265.
Duhamel, 275, 276.
Dumas, 123.
Dumbrăvescu D., 379, 380.
Dumitraşcu R., 35, 224.
Dumitrescu P. Al., 263.
Dumitrescu A. G., 8, 243, 433.
Dumitrescu I. Gh., 5, 8.
Dumitrescu A. M., 263.
Dumitrescu V. M., 262, 450.
Dumitrescu C. P., 262.
Dumitru C. I., 379, 427, 523.
Dupuis, 465.
Dürer Albrecht, 98.
Dye A. L., 449.

Efstate S., 318.
Einstein A., 449.
Eisenhart, 31.
Elefterescu M. O. 86, 184.
Emanuel D., 241, 243, 244, 483.
Emilian G. C., 380.
Enache D. I., 263, 379, 380, 435, 523, 571, 572.
Enăşescu D. V., 263, 333, 374, 379, 380.
Eratostene, 394.
Erbiceanu C., 15, 364
Errera A., 177.
Estève R., 32, 176, 308.
Euclide, 32, 177, 394, 411, 415, 486, 531.
Euler L., 105, 177, 186, 208, 277, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 308, 337, 360, 410, 463, 478, 529, 530, 537, 538, 539, 540, 545, 561.
Evolceanu V., 15.
Evstratie, 266, 267.
E. H. M. 125.

Fabius Dorina, 135, 318, 473.
Farrel J. O., 307.
Faţe M., 36.
Fejer L., 31, 307.
Fekete M., 449.
Felix C., 8.
Ferand, 449.
Ferdinand I., 250.
Fermat 177, 410, 412, 413, 414, 563.
Feuerbach, 73, 145, 278, 279, 308, 435, 437, 442.
Fibonacci, 177, 450.
Filipescu Em. Gh., 8, 241, 243, 251, 252, 255, 258, 498.
Finţescu A., 271.
Fischer A. R. 211.
Fitz-Patrick, 360.
Fleck A., 413.
Floareş I. A., 263.
Floarea C. A., 271.
Florescu H., 185, 263, 523.
Florescu B. I., 334, 508.
Florescu D. G. R., 262.
Florescu M. U., 41, 181, 271, 315.
Florescu L. V., 262, 435, 524.
Focşăneanu I. M., 8, 96, 130, 133, 165, 179, 181, 215, 218, 221, 24[illegible], 336, 350, 432.
Forneiu I., 486.
Fourier, 31, 266, 452.
Fragă V. I., 379.
Francoeur B. L., 127.
Fredholm, 68, 175, 409, 498.
Fresnel 362.
Freundlich, 60.
Froda Al., 500.
Fundăţeanu C. I., 8.
F. G. M., 34, 181, 224, 423, 538, 572.

Gabrielescu R., 8.
Galan I. I., 263.
Gâlcă I. T., 8.
Galileo, 177, 410, 411.
Galois Ev., 125, 410.
Garver R., 174.
Gataianţu V. B., 79, 271.
Gaus, 177, 307, 410, 499.
Gavrilescu N. C., 138, 185, 263, 276, 277, 375, 379, 380, 421, 523, 524, 570.
Géhéniau J., 265.
Geier H. A., 90, 277, 373, 417.

Géneau E. C., 308.
Georgescu G. Al., 263.
Georgescu E. C., 317.
Georgescu I. C., 508.
Georgescu D., 164, 457.
Georgescu D. E., 271.
Georgescu E. Florica, 317.
Georgescu Gh., 263.
Georgescu I. I., 263.
Georgescu I. N., 8, 243.
Georgescu N. N., 8, 242.
Georgescu-Roegen N., 8, 64, 79, 80.
Gérardin A., 411.
Gétrénian J., 265.
Gheorghevici Chr. 375.
Gheorghiu C. Ad., 217, 219, 222, 223, 271, 367.
Gheorghiu I. Gh. 181.
Gheorghiu T. Gh., 5, 8, 48, 76, 96, 126, 136, 144, 177, 240, 243, 271, 309, 315, 336, 362, 363, 365, 376, 396, 402, 409, 417, 433, 470, 507, 558.
Gheorghiu S. I., 8.
Gheorghiu A. M., 8.
Gheorghiu A. Ş., 9, 190, 239.
Ghermănescu M., 5, 8, 40, 46, 64, 95, 119, 143, 175, 177, 212, 240, 243, 272, 280, 283, 287, 309, 310, 328, 336, 380, 381, 382, 430, 432, 433, 446, 451, 477, 480, 497, 500, 502, 504, 521, 522, 525, 528, 560, 565, 566, 574.
Ghermanos D. Archimandrit, 452.
Ghiban N., 185, 375.
Ghibu O., 536.
Ghica A., 64, 364.
Ghimicescu I. Gh., 271.
Ghimuş D. A., 9.
Ghiocel V. V., 45, 135, 417, 514.
Ghişoiu I. C., 380.
Ghişoiu I. P., 35, 82, 178, 181, 223, 271, 368, 381, 536.
Ghiţescu V., 9.
Ghiulea N., 243.
Ghiuţă Gh. 90.
Gibbins M. N., 211, 308.
Giorgi N. I., 263.
Giurcovici I., 176, 213, 240, 242, 414, 415, 452.
Giurcovici M., 452.
Giurumescu C., 271.
Glasenapp Serge, de, 175.
Glodeanu V., 375.
Göbl F., 246.
Godeau L., 212.
Godeanu I. V., 135, 421.
Goethe, 410.
Goldenberg M. E., 185, 380,
Goldner H., 248.
Goliad, 414.
Gonzales Gale J., 553.
Gonzales O., 75.
Gonzales O. M., 211.
Goormaghtigh R., 32, 71, 172, 176, 211, 240, 265, 362, 435, 450, 494, 496, 530, 562.
Goroneanu I. I., 33.
Grâce, 197, 199.
Graf S. C., 310.
Graur C., 554.
Green, 77.
Grigercsik G., 175.
Grigorescu C., 9.
Grigorescu N. C., 138.
Grigorescu Em., 315.
Grigorescu A. V., 86, 88, 138, 184, 185, 263, 277, 282, 333, 373, 374. 375, 418, 434. 476, 523, 566, 570.
Grigoriu C., 276.
Grigoriu I. V., 263.
Grinfeld R., 499.
Grossu I. M., 224.
Grünbaum M., 446, 447.
Grünberger Arch., 98.
Grünstein E., 181.
Gunther M. N., 77.
Gutzu Al., 175.
Gutzu V., 9.

Haarbleicher A., 426.
Hadamard J., 308.
Haimer C., 277.
Haimovici M., 64.
Halperin M., 31.
Hamilton, 308.
Hammond M., 125.
Hanganu D. M., 9, 243.
Hanson H. E., 174.
Harabuz Gh., 185.
Hardy, 308.
Haret I. C., 185.
Haret V. C., 138.
Haret C. Sp., 22, 435, 481, 482.
Harnaj D. N., 263.
Harnack, 127.
Hartnack, 55.
Hartrée R. D., 450.
Hatzidakis, 60.
Heins E. A. 449.
Hélie M., 78.
Herbay E, de, 524.
Herbert E, 310.
Hermite Ch., 399, 410.
Heyting A., 177.
Hilbert, 307.
Hilf A., 427, 571, 572.
Hille E., 307, 362.
Hirschvogel A., 98.
Hollcroft R. T., 449.
Holzmüller G., 267.
Hook, 205.
Höpfner, 174.
Hornstein H. S., 90.
Hostinsky B., 362.
Hotinul Amfilochie Archiereu, 487.
Houel J., 554.
Howard A. B., 125.
Humbert P., 362.
Huntingson E. V., 174.
Huntington V. E., 124.

Iacob Caius, 177, 211, 212, 498, 499, 500.
Iacob F., 243.
Ianculescu O., 271.
Ianculescu R., 9, 243.
Iarda St. R., 263.
Iconomul Constantin preot, 453.
Ignat D., 523.
Ignat G. de Metzburg, 416.
Iliescu B. D., 138, 185, 282.
Iliescu V. D., 263.
Iliescu E., 80.
Iliescu Gh., 5, 9, 25, 433.
Iliescu Iordachi, 443.
Iliescu Tr., 9.
Imdalcio Gil y R., 26.
Ingraham H. M. 31, 174.
Ioachimescu Gh. A. 9, 77, 242, 243, 244, 247, 248, 249, 253, 433, 455, 457, 482, 526, 555, 556.
Ioachimescu A. Gh., 9, 243.
Ioanin C. D., 263.
Ioanovici A., 9, 242, 243, 252, 254, 356, 433.

Ionescu Al., 243, 254.
Ionescu I. I. Brezuica, 271, 315.
Ionescu N. Gr., 310.
Ionescu V. D., 5, 9, 48, 64, 242, 408, 500.
Ionescu C. Em., 276, 514.
Ionescu P. H. 271.
Ionescu I., 5, 9, 18, 22, 25, 26, 27, 32, 33, 41, 42, 46, 57, 59, 64, 68, 76, 77, 78, 81, 95, 101, 115, 125, 126, 127, 142, 151. 169, 175, 176. 177, 182. 183, 188, 190, 196, 212, 213, 238, 241, 242, 243, 244, 253, 254, 255, 256, 257, 267, 285, 293, 308, 309, 310, 334, 338, 340, 364. 365, 379, 380, 382, 395, 400, 409, 410, 414, 415, 416, 428, 430, 433, 438, 444, 450, 451, 452, 453, 454, 475, 478, 491, 498, 499, 500, 524, 526, 536, 553, 554, 573.
Ionescu, G. I., 263.
Ionescu I. Paul, 317.
Ionescu Tib., 64.
Ionescu V., 263, 379.
Ionescu I. V., 36.
Ionescu-Biss P. H. 34, 35, 38, 135, 136, 224, 231, 277, 364, 368, 417.
Ionescu Bujor C., 5, 9, 47, 78, 95, 137. 140, 143, 192, 239, 243, 288, 304, 335, 382, 429, 431, 433, 447, 526, 572, 574.
Ionescu-Zane Gh, 9.
Ioniţă Ing., 488.
Iorga N. 486.
Iosif Mitropolit, 364.
Irimescu R., 243.
Irimia Arhiereul, 364.
Irwin O. J., 308.
Isac C. D., 379.
Istrati C. Dr., 62.
Iuga, 242.
Ivan S. M. A., 263.
Ivănceanu A., 64.
Ivănescu C., 41, 45, 46, 86, 90, 95, 125, 139, 184, 210, 240, 272, 273, 276, 277, 318, 368, 374, 375, 399, 409, 416, 418, 447, 522.
Ivănică M. R., 263.

Jackson, D., 174.
Jacobi, 161, 410.
Jacobi G. C., 33.
Jacobi H. M. 33.
James D. R., 124.
Jijie A., 9, 242.
Jipa C. A., 262, 379, 380.
Johnson P. S.,450.
Jordan, 67.
Julia G., 451.
Justrow, 206.
Juvet G., 409.

Kaltenborn S. H., 174.
Kassner E., 31.
Katz P., 79.
Kaufmann N., 9.
Kaufman S., 560.
Kempisty S., 362.
Kinbaum M., 244.
Kisselef, 414
Kline R. J., 31, 307, 362, 552.
Klinger D. O., 90.
Kohlman, 56, 57.
Koopman O. B., 124.
Korolkowa, 267.
Krames L. J., 362, 450.
Kuschke P. G. C. 174.
Kutta-Joukowski, 409.

La Hive, 133.
La Paz L., 307.
Lagrange, 105, 177, 308, 410.
Laguerre, 127, 130, 362, 408.
Lalescu Tr., 15, 167, 168, 169, 241, 247, 248, 250, 254, 255, 268, 310, 363, 400, 416, 489, 498, 553.
Lambert D. W., 174, 307.
Lane D. E., 450.
Langer E. R., 124.
Langford J. W., 125.
Laplace, 177, 410.
Latimer G. C., 31.
Lawrence E. B., 125.
Lazăr J. A., 263.
Lazăr G. D., 262.
Lazăr Gh., 64, 482, 489, 490, 491, 531, 532.
Lăzărescu Fl. Şt. 271.
Lazu C., 10, 243.
Leau L., 362.
Lebădă I. D., 185, 263, 277, 279, 373.
Leber M., 135.
Lebesgue, 31, 159.
Lebrun M., 454.
Lecat M., 399, 400, 410, 412, 413, 414.
Leemans J., 176, 211, 451, 552.
Lefevre A., 33.
Legendre, 408, 411, 454, 491, 531.
Lehmer L. D., 31.
Lehmer N. D., 307.
Leibnitz, 149, 177, 365, 410, 411.
Lenco I., 317, 514.
Leonida D., 52, 148, 193, 338, 392, 415, 416, 437.
Lepădatu G., 263.
Leray, 451.
Létang, 204.
Leuco I., 230.
Levine J., 174.
Lewis C. D., 31, 174, 449.
L'Hôpital, 177, 214, 275, 361.
Liapunoff, 77.
Libois P., 450.
Linsman, 176.
Linteş I., 5, 10, 22, 40, 41, 84, 114, 125, 132, 133, 140, 141, 173, 177, 178, 206, 207, 2 2, 213. 225, 227, 239, 243, 267, 286, 295, 333, 360, 361, 363, 376, 377, 383, 402, 408, 433, 442, 454, 472, 493, 499, 500, 574.
Liteanu I. Gh., 5, 10, 34, 36, 67, 181, 243, 318, 433.
Lob H., 450.
Lobatschewsky, 67.
Lossio L., 338, 415.
Locas E., 411.
Lugojanu M. D., 263.
Lupescu Gh. C., 36, 244.
Lupu A., 180.
Lupu Vasile, Domn, 266, 486.
Lurquin C., 552.
Lusin N., 362.
Lussan, 412.

MacColl A. L., 449.
Maeterlink, 413.
Măgală I. G., 263, 380.

Marenholz J., 450, 552.
Maillet Ed., 410.
Malcoci C., 10.
Malluson V. H., 450.
Maltezos K., 154.
Mănac M., 138, 184, 185, 187, 188, 263, 278, 282, 375, 523, 565.
Manafu V., 10.
Mănescu M., 37, 86, 90, 271, 318, 372, 375, 417, 421, 470, 503.
Manicatide Al., 41.
Mannheim A., 78.
Manoilescu M., 10, 241, 250, 255.
Manolescu M. Em., 271, 465.
Mărăcine B., 5, 10.
Marchand A., 362.
Marcus I. F., 79.
Mareş I. Em., 86, 135.
Mareş D. P. 263.
Mareş T., 10.
Margulis G., 188, 276, 278, 361.
Margulius M., 35, 36, 40, 41, 71, 8,2, 87, 90, 183, 188, 224 255, 230, 272, 273, 276, 277, 278, 279, 281, 318, 324, 372, 374, 375, 378, 418, 420, 426, 443, 564, 565.
Marian I., 271.
Marin Al., 491.
Marin D., 86, 138, 184, 185, 282, 523.
Marinescu D. G., 263.
Mărmureanu M. G., 263.
Martac V. R. N., 263.
Martecky E Maria, 276.
Marteş V. Gr.. 139, 185, 277, 375.
Martin H. M., 124, 307.
Mateescu Gr., 5, 10, 243, 453.
Matei Al., 186, 514.
Matei M. C., 380.
Măties V. I., 91, 271, 356, 518.
Mavrodin D. D., 35, 79, 86, 90, 135, 136, 138, 141, 166, 185, 186, 187, 188, 231, 271, 273, 276, 277, 282, 315, 318, 324, 326, 328, 375, 417, 420, 473, 514, 523 ,567, 570.
Mazilu C. P., 79, 86, 90, 92, 135, 141, 183, 184, 186, 187, 188, 189, 232, 273, 276, 277, 282, 319, 374, 375, 376, 379, 417, 421, 514, 571, 572.
McCrea H. W., 211.
McKinsey C. C. J., 31, 450.
Mcshane J, E., 124, 307.
McVittie C. G., 125.
Meade K. R., 78.
Medlero N., 339, 415.
Mehedinţi D. D., 90, 373. 374.
Meisner H., 148, 415.
Meissnern H., 148.
Melchisedec, episcop, 453.
Melder, 57.
Menelaus, 65, 222, 282, 374, 397.
Mercureanu I., 185, 263
Mereuţă Em. 36, 45, 86, 135, 355, 368, 375, 421.
Mereuţă V., 10.
Mersenne, 307, 411.
Metea S. V., 263, 379, 434.
Metius A. 98.
Metz M. D. 253.
Mihăescu D. C., 271.
Mihăilă N., 282.
Mihaileanu N. N., 34, 35, 73, 82, 93, 181, 184, 218, 219, 221, 222, 223, 224, 225, 235, 237, 271, 272, 274, 283, 325, 372, 374, 378, 400, 417, 442, 443, 509.
Mihăilescu A. C., 271.
Mihăilescu D. C., 263.
Mihăilescu Gh. 380, 571, 572.
Mihăilescu P. T., 10.
Mihalcea St. D., 333; 380, 523.
Mihalcea I. O., 90, 187, 277.
Mihalopol C., 10.
Mihoc Gh., 64, 364.
Milankowitch, 60.
Milea E., 224, 318.
Miller C. Pearl, d-na, 73.
Milu I. N., 185, 263, 523.
Mineur Ad. 73, 265, 362, 450, 485.
Minois S., 265.
Miorini Lt.-Col., 64.
Miquel, 65.
Mircea A., 234, 236.
Mircea M. E., 10
Mirea N. St. 15, 310.
Mirescu P., 191, 285, 432.
Mises von, 60.
Mitache I. A., 263.
Mitache M. 185.
Mitault H., 32, 176, 308.
Mitescu C., 10.
Mititelu C. C. 10, 243.
Mititelu C. J., 10, 243.
Mitre P. G., 263.
Moessner A , 266.
Moise C., 241 244, 250.
Moise Eliza, 184, 417.
Moisil Gr., 64, 340, 364.
Moivre, 137, 277.
Monge 1.7, 400.
Montel P., 213, 498, 500.
Montgomery D., 124.
Moore M. E , 124.
Moreno B. N., 308.
Morţun Em., 181, 499.
Moşoiu Tr., 250.
Mestechy E. Maria, 90.
Motaş C. 498.
Moţoc M., 36.
Moţoi I., 15.
Mourey V. C., 267.
Moursund F. A., 31, 449.
Muică I., 413.
Muir Th., 125.
Mulhall J., 499.
Munteanu V. L., 263.
Muraroiu I., 271, 354.
Muraru P. D., 262.
Muzeau E., 78.
Myer H., 211.
Myller A., 78, 126, 338, 451, 452, 453, 448.

Nagel, 174.
Naigeborn, 415.
Năstase M., 91, 187, 263, 374, 379, 421, 428, 434, 524, 552, 571, 572.
Năsturaş D., 15.
Neagu I. F., 263.
Neamţu P., 11, 243.
Nedelcu V. N., 263.
Nedelescu N., 263.
Negoiţă C. L., 185, 375, 421.
Negrea A. L. M , 35, 39, 42, 86, 138, 184, 187, 214, 274, 277, 279, 282, 324, 375, 379, 417, 421, 427,

428, 523, 524, 561, 562, 570.
Negretzu I., 11.
Negură Şt., 11.
Nelson E., 31.
Neppe J., 194.
Nepper, 55, 57, 177.
Neuberg J., 68, 70, 146, 359, 485, 538.
Neumann, 77, 211, 212, 409,
Nevanlinna, 31.
Neville H. E., 125, 308.
Newton, 76, 149, 177, 307, 328, 345, 410, 411, 464, 465.
Nichifor A. G., 11, 81, 243 248.
Nichifor Sc. M., 90, 185, 186, 277, 282, 375.
Nicoară D. C., 138, 185, 282.
Nicolae D. Tr., 262.
Nicolaevici G., 15.
Nicolau H. C., 11, 271, 315, 573.
Nicolau I. C. Dobridor, 181, 271.
Nicolau T. M., 11, 144.
Nicolescu M. 5, 11, 34, 47, 64, 114, 115, 127, 142, 176, 267, 271, 453, 500, 564, 566, 567.
Nicolescu N., 15, 244, 249.
Niculescu V. Al., 11, 180, 181, 401, 433, 527.
Niculescu Cr., 11.
Niculescu Gh. Lt-C-dor, 5, 11, 30, 36, 67, 78, 85, 88, 172, 240, 443.
Niculescu I. I., 175.
Niculescu R., 243.
Nistorescu V. D., 263.
Niţescu C. Gh., 282, 379, 571, 572.
Noica C.. 126.
Northrop P. E., 31.
Notescu, 415.
Novarro L., 410.

Oberg N. E., 450.
Obrechkof N., 60, 362.
Olds G. E., 450.
Olsacher J., 362.
Olteanu E. St., 36, 38, 95, 277, 230, 237, 272, 318, 568.
Onicescu O., 11, 60, 64, 68, 125, 174, 177, 500.
Opran I. C., 263, 380.
Oprescu Gh., 11.
Orănescu O., 5, 11, 243.
Orăşanu D. C., 5, 11, 243, 433.
Orăşanu Gr., 11.

Pădureţ A. V., 263.
Poerson, 499.
Paley C. A. E. R., 31, 266, 449, 452.
Pamula A., 80.
Panaite N. Th., 224, 271, 375.
Panaitescu Sc., 12, 23, 67.
Pănoiu E., 318.
Pantazi Al., 5, 12, 64, 67, 173, 213, 224, 225, 243, 362, 409, 410, 416, 433. 443, 500.
Panţu Z. I., 271, 315.
Papelier G., 282.
Pappus, 194, 266, 374, 394.
Paraschivescu T. M., 263.
Pardies G. I., 55.
Parepeanu C. I., 35, 87. 135, 224, 230, 271, 318,
Parisianu A. M., 263.
Parsons L. G., 450.
Parville H. de, 171.
Pârvu A., 5, 12.
Pârvulescu C., 64, 86.
Pasăre S. E., 262.
Pascal, 66, 177, 224, 306, 307, 411.
Paşcanu S., 12.
Pastor R. J., 451.
Patras, 291.
Patraulea I. C., 318.
Patraulea D. I., 224.
Patraulea N. N., 224.
Patriciu G. T., 12.
Păun M. Gh., 181.
Păunescu N. V., 262.
Paveneanu C. I., 421.
Peek L. R., 31.
Pelseneer J., 265.
Perieţeanu D., 127, 478, 529, 561.
Perron O., 413.
Petrescu Gh. 64.
Petrescu I. I., 135, 276, 368, 473, 566.
Petrescu C. O., 138, 185, 375.
Petrescu-Fierbinţi, 224.
Petroianu I. M., 79.
Peyovitch T., 362.
Philipide M., 12.
Picard, 177, 212.
Picken K., 450.
Pietreanu H., 64.
Piggot E. H., 125,
Pitagora, 58, 65, 98, 150, 177, 363, 394.
Plücker, 211.
Poenaru P., 491, 531, 532, 536.
Poincaré H., 31, 267, 410.
Poinsont, 411.
Pompeiu D., 64, 175, 362, 500.
Pompeiu Th., 64.
Poor C. V., 307.
Popa C. B., 263.
Popa I., 64, 76.
Popa Gh. I., 36, 79.
Popa I. I., 309.
Popescu N. Al., 263, 271.
Popescu Corn., 35.
Popescu V. C., 262.
Popescu D. Gh., 315, 465, 507.
Popescu Gh. Gh., 188.
Popescu I. Gh. G-ral, 33, 479, 545.
Popescu M. Gh., 263.
Popescu I., 12, 243.
Popescu Gh. IV, 263.
Popescu-Greaca Vlad, 138, 185.
Popescu-Stăneşti I. M., 318.
Popica E., 276.
Popovici C., 60, 61, 64, 68, 114, 365.
Popovici C. C., 271.
Popovici Th. I., 80, 271.
Popovici - Corodeanu N., 181.
Popoviciu Tib., 12, 47, 64, 78, 79, 80, 81, 125, 143, 160, 173, 242, 266, 288, 362, 384, 480, 500.
Popp I., 337.
Popp N., 12.
Popp Tr., 12, 243.
Portocală M., 12, 243.
Postelnicescu C. M., 184, 188, 263, 282, 380, 525, 571, 572.
Potopeanu Gh., 12.
Poussart A., 78.

Powers E. R., 307.
Prager E., 255.
Preda C. C., 90.
Predoescu I. M., 91, 135, 142, 187, 188, 274, 276, 277, 375, 473, 514.
Predoescu T. 135, 189, 421.
Preoteasa P. G., 263.
Presadă P., 185.
Procopiescu M., 42, 90.
Protopopescu Gr., 12.
Ptolomeu, 50, 65.
Putnam M. T., 124, 135, 189, 552.

Quade S. E., 449.
Quine V. W., 174.

Raabe, 275, 276.
Racliș R., 12, 48, 60, 64, 68, 115, 243, 498.
Racoțeanu G. C., 263.
Rada D., 185.
Radovici N., 260.
Radu F., 36.
Radu E. M., 12.
Radu P. P., 263.
Rădulescu Heliade I., 364, 453, 481, 491, 531.
Ralet D. I., 20, 247.
Râmniceanu D. C., 224.
Râmniceanu I. Gr. 181, 271.
Răşcanu I. R., 87.
Raudenbusch W. H., 174.
Râureanu M. I., 531.
Raventa N. O., 263.
Read M. E., 125.
Rechhomme, 291.
Reichmond, 291, 292.
Revici T., 13, 243.
Ricatti, 500.
Riechtenfels J. 412.
Riegels Cr., 52.
Rienignn, 307, 453.
Riley W. A., 125.
Ritt G., 310.
Rizescu T. I., 80.
Robin, 77.
Roco M., 15, 244.
Rogosinski M., 362.
Roibănescu C., 64.
Rolle, 77, 87, 308.
Roman I. N., 380.
Roman S. N., 263.
Romanujan M., 435.
Roșca St. G., 37, 38, 318.
Rosenblatt A., 177.
Rosintal J., 310.
Roșu Al., 15, 166, 356.
Roșu Al. Al., 5, 13, 144, 166, 191, 336, 356, 374, 430, 433.
Roșu V., 13, 243.
Rotaru D., 377, 514.
Rotaru G. G., 263.
Roth E. W., 31.
Rotman D., 276.
Rouché E., 58.
Runceanu N. C., 263.
Rusen Bey, 57.
Rusenstein, 57.
Russel, 31.
Russu I. E. D., 263.
Russu C. E, 271.
Russu G., 185.
Rutt E. N., 449.
Ruzienicz M., 362.

Șabac Gh. I., 87, 90, 184, 185, 263, 282, 371, 374, 375, 418, 435, 516, 523, 565.
Sager N. I., 37, 90, 135, 274, 276, 277, 282, 324, 333, 375, 378, 417, 418, 476, 509, 523. 565, 570, 581, 572.
Sacks, 174.
Sălăgeanu A., 13.
Sălceanu C., 173.
Saligny A., 15, 19, 24, 245, 250.
Saligny M., 13.
Salmon, 164, 538.
Săndulescu I. I., 262.
Sanielevici M., 64.
Săpunaru S. Gh., 13.
Sârbu F. V., 263, 378.
Sarganecks G., 392, 415.
Sarian M., 5, 13, 66, 243, 271.
Saulea N. Em., 181.
Săulescu, 213.
Savin C. I., 35, 92, 135, 136, 181, 231, 238, 271, 318, 371, 470.
Savovici G. F., 333, 524, 569.
Schileru C. I., 384.
Schvendt, 98.
Scobiola C., 263.
Sechel T. M., 263.
Segârceanu M. M., 263.
Senato di B., 415.
Serbănescu A. M., 263.
Șerbănescu Gh. V., 13.
Sergescu B., 13.
Sergescu P., 5, 13, 64, 68, 105, 111, 125, 174, 177, 211, 212, 213, 242, 308, 365, 453, 498, 499, 500.
Servais Cl., 33, 176, 363, 552.
Sewell E. W., 449.
Sfințescu I. C., 13, 310.
Sholat A. J., 449.
Shao-Lien-Chow, 263.
Siaru I. V., 380.
Sichitiu N. N., 263.
Sierpinsky W., 362.
Silaș G., 79, 140, 184, 185, 186, 188, 276, 282, 374, 375, 418, 421, 514.
Simionescu D. Gh., 5, 13, 192, 286, 335, 345, 383, 433.
Simmon H. R., 307.
Simonds F. E., 308.
Simonoff M., 450.
Simpson, 211.
Simson T., 165, 223, 308, 351, 538, 539, 540, 541, 544.
Sinkov A., 449.
Smântânescu A., 13, 242.
Smith H. A., 31.
Smith E. D., 307, 308.
Snell ns, 98.
Snyder V., 31, 174.
Socec V. I., 247.
Solacolu S., 175.
Solomon, 98.
Solovei V. A., 263.
Sondat P., 485.
Soula J., 362.
Souto B. J., 75, 363.
Șova C. I., 36, 82, 90, 276, 318.
Spathy R., 132.
Spierpinski W., 173.
Sprinceană C. Gh., 271.
Stamate, 414.
Stamatescu G. I. C., 263.
Stamatescu I. Gh., 13, 243, 433, 454.
Stamatescu I., 13.
Stamati I. Mitropolit, 487.
Stan I. A., 36, 82, 181, 218, 219, 223, 224, 225.
Stan C., 271.
Stan D., 13, 243, 254, 255.

Stănciulescu C. G. 263, 282.
Stănculescu I. Gh., 185, 276, 375, 380.
Stănculescu-Piteşti G., 282.
Stănescu M. E., 185, 263, 375.
Stănescu C. T., 263.
Stăneşti M., 92, 184, 374.
Ştefănescu Em., 80, 105, 317.
Ştefănescu D. N., 263, 379, 435, 570.
Ştefănescu P. N., 251.
Ştefănescu V., 243, 251, 254.
Steiner, 222, 289, 446, 447.
Stelford N., 307.
Stewart, 58, 59, 65, 176.
Stieltjes J. Ph., 399.
Stirbei Barbu, Domnitorul 291.
Ştirbu Gh., 137, 185.
Stoian S. I., 263, 435.
Stoian G. V., 262.
Stoica D. Al., 37, 41, 87, 90, 184, 263, 372, 421 427, 434, 476, 568.
Stoica V. D., 13, 496.
Stoica P. I., 263.
Stoicescu T., 138, 186, 187, 192, 277, 282, 374, 375, 384, 523.
Stoilov S., 60, 64, 453.
Stokes, 124.
Stourdza Gr. Prince, 500.
Stone, 307.
Streder I., 263, 571, 572.
Strohal R., 263.
Stupcanu Em., 185, 187.
Sucaciu A. T., 79, 80.
Şuşala I. Gh., 375.
Sylvester, 410.

Tamarkin D. I., 449.
Tănăsescu A., 13,
Tănăsescu A. Gh., 19, 24.
Tănăsescu A. T., 14, 79.
Tănăsiciuc V. C., 379, 523.
Ţarălungă Gh. D, 90, 263.
Tarasiuc I. S., 380.
Tardi, 307.
Tartaglia, 177.
Tarrière E., 365.
Tătarul V. N., 262, 434.
Tauber A., 79.
Taylor E. A., 101, 102, 103, 174, 197, 444.
Teodor D., 185.
Teodor D. I., 15, 247.
Teodoreanu V., 14, 248, 267.
Teodorescu Andrei, 364, 452, 453.
Teodorescu C. C., 14, 60. 61, 175, 242, 266, 363.
Teodorescu D., 175.
Teodorescu N., 130, 181, 271, 364.
Teodorescu V. N., 14, 241, 249, 250, 255.
Teodorescu I. S., 15, 22, 311.
Teodoru D. R., 14.
Teotochis Nichifor, 468.
Terpu A. T., 263.
Thales 176, 177, 394.
Thébault V., 17, 33, 46, 52, 70, 71, 75, 90, 95, 103, 104, 116, 125, 142, 147, 148, 169, 174, 176, 190, 211, 227, 238, 265, 266, 278, 279, 285 291, 305, 306, 325, 333, 334, 359, 362, 363, 382, 392, 421, 424, 430, 437, 450, 451, 478, 485, 516, 526, 529, 547, 553, 562, 573.
Thedoreanu V. M., 263.
Tielman P. H., 174.
Thierin H. G., 14.
Thiry B., 499, 552.
Thomas J. T., 174.
Thompson, 175.
Ţino O., 5, 14, 48, 73, 166, 243, 383, 431, 433, 443, 528, 575.
Ţintă E., 64.
Ţiţeica Gabriela, 14.
Ţiţeica Gh., 5, 14, 60, 61, 62, 64, 127, 242, 243, 248, 249, 253, 256, 309, 435, 451, 452, 498, 500,
Ţiţeica I. I., 90, 141, 187, 187, 277, 379, 380, 427, 523, 565, 570, 571, 572.
Tits L, 450.
Tomasini G., 260.
Tomescu R., 271.
Tomescu H. T., 263.
Tourriol B. J., 451.
Trăsnea, 415.
Trăsnitu N., 138, 185, 282.
Trew A., 193, 194, 415.
Trifoi Ch., 318.
Trofimov P., 478, 527.
Troitsky 387.
Trubridge P. F. G., 211.
Turner S. J. 362.
Turrière E., 365.
Tycho Brahe, 97.

Ulescu A., 14, 243.
Untea R. P., 514.
Unter B. d-ra, 379, 427.
Unterbärger L., 416, 438.
Uspensky V. Y., 307.

Vâlceanu I., 491.
Vâlcovici V., 64, 243, 309, 330, 332.
Valée Poussin, dela 451.
Valerian A., 138.
Van Scooten, 99.
Van Veck, 453.
Vandermonde, 151, 152, 154, 155, 196.
Vandiver S. H., 307.
Vardala I., 14.
Varlam M. P., 138, 271, 318, 514.
Vasilache I. G., 263, 379, 380, 571, 572.
Vasilachi I., 14.
Vasilescu Fl., 14.
Vasilescu A. G., 263.
Vasilescu Gr., 14, 243.
Vasilescu G. I., 14.
Vasilescu K. N., 243.
Vasilescu M., 185.
Vasilescu C. N., 138, 185.
Vasilescu N.-Jiu, 282.
Vasiliu A. C., 138, 185.
Vasiliu G. D., 5, 14.
Vasiliu Gh., 51, 14, 96, 144, 191, 243, 281, 282, 284, 287, 336, 431, 480, 515, 516.
Vasiliu C. I., 80, 181, 218, 222, 234, 271, 315, 327, 458.
Vasiliu M., 14, 33, 127, 400, 416.
Vasiliu I. M., 138, 185, 282.
Vasilovschi F., 380.
Vassu A. N., 263.
Vauban M., 53.
Vecten, 401, 424.
Velculescu I. C., 363.
Velea M., 36, 528.
Velescu I., 270.
Velicescu N.N., 35, 186, 368.

Velicescu G. T., 35.
Veniamin Costachi, 453.
Venton, 261.
Ver Eecke P., 362, 450.
Verenca S., 138, 282.
Verriest G., 125.
Vesca T., 32.
Vicol N., 364.
Viète, 177.
Vignaux C. J., 362, 499.
Villat H., 499.
Vioreanu, 415.
Visa E., 211.
Vissarion C. I. V., 87, 188, 276.
Vlacq, 57, 99.
Vlad, 486.
Vlad I. M., 91.
Vlădescu A., 79.
Vladimirescu T., 531.
Vogt Florica. 92.
Voss A., 213.
Vrânceann G., 64.
Vuibert H., 125, 174, 266, 289, 308, 362, 408, 450, 498.
Vusatiuc D. M., 263.

Wall S. H., 124.
Ward M., 174, 307.
Waring, 31, 174.
Watson N. G., 125.
Weddeburn M. H. J., 125.
Weigelus E., 54.
Weinstein I., 79.
Weiser I., 266.
Weisner L., 306, 449.
Weiss Isis, 175.
Weiss J. Marie, 31.
Weyl H., 124.
Whitehead 31, 124.
Whittaeker, 308.
Whyburn T., 449.
Wiener N., 266, 451, 452.
Wilcox R. L., 450.
Wilkosz W.. 498.
Wilgrod H., 212.
Williamson I., 449.
Wilson, 411.
Winants M., 32, 176.
Wintner A., 31, 449.
Wite S. H., 307.
Witossynski, 212.
Woinarosky R.,* 5, 14, 309, 433, 480, 514.
Wolf F. Ch. von, 394.
Wolfkehl, 412, 413.
Wong C. B., 31, 307, 449.
Wuik N., 213.

Xenopol D. A., 364.

Yarcu D., 531.
Young, 174.

Zaharescu E. I., 263, 276, 380.
Zaharia O. N., 31, 266, 363, 409, 450.
Zaidman I., 271.
Zamfirescu Gr., 15.
Zane N., 230.
Zapan Gh., 15, 499.
Zapan Gr., 5, 15, 126, 243, 432, 433, 575.
Zarda I., 224.
Zervos, 60.
Zgârcea T. G., 263.
Ziff S. M., 84, 87, 135, 184, 230.
Zlatcu St. C., 15.
Zottu I. G., 15, 244.

J. UVRAJE CITATE **)

Cărți

		Pag.
G. Adamescu	Istoria Seminarului „Veniamin"	453
Agnesi G. Maria	Instituzioni analitiche	20
Alexe Marin	Geometrie practică	534
Amfilochie Hotinul	Elemente aritmetice arătate fireşti	487
A. Angelescu	Lecţiuni de calcul diferenţial	44
Gh. Armengaud Jeune	Măiestrul mecanic sau Călăuza Mecanicei aplicate cu tabele şi calcule	33
Artzt	Zeitschrift für mathematischen Unterricht	70
G. Asachi	Elemente de matematică	533
C. Bourlet	Trigonométrie	181
T. Codrescu	Uricarul	266
G. Conrad	Martii Ingenieur	52, 53, 100, 101
Crelle	Oeuvres	289
Euclide	Elemente de geometrie	394
Euler	Opere complete	105
F. G. M.	Exercices de géométrie	224, 423, 538
F. G. M.	Exercices de Trigonométrie	181
F. G. M.	Mécanique	34
F. G. M.	Compléments de Trigonométrie	572

* A semnat şi Voinarosky R.

**) Sub acest titlu nu sunt trecute uvrajele citate la *Bibliografii* şi la *Biblioteca Gazeta Matematică.*

		Pag.
Fitz-Patrick	Exercices d'Arithmétique	360
Chr. Freyherr von Wolf	Elementa matheseos universal	394
I. Gil y Reflero	Limba spaniolă	26
M. Grünbaum	Contribuţii la geometria triunghiului	446
A. G. Ioachimescu	Culegere de probleme de Algebră	526
I. Ionescu	Istoricul Invăţământului Ingineriei în România	291
I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu, V. Cristescu	Culegere de probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie	131, 181, 184, 209, 222, 369, 374, 446, 447, 517, 565
Justrow	Theoretische Betrachtung über die Lebensdoner unserer Geschichte	206
Lagrange	Oeuvres complets	105
T. Lalescu	Geometrie analitică	169, 400
G. Lazăr	Aritmetica Matematicească	489
Gh. Lazăr	Trigonometria cea dreaptă	489
Legendre	Elemente de Geometrie	531
L. Lossio	Arithmetices	338
Al. Manicatide	Curs de Algebră elementară	41
N. Medlero	Rudimenta arithmeticae practicae	339
H. Meissnern	Sternuund Kern	148, 415
J. Neuberg	Bibliographie des triangles spéciaux	70
G. Papelier	Exercices de géométrie moderne	282
E. Rouché & Ch. de Comberousse	Traité de Géométrie	58
G. Sarganeck	Die geometrie in Tabellen	392
P. Sergescu	Les sciences mathématiques	176
A. Teodorescu	Aritmetica	364, 452, 453
M. A. Trew	Directorium mathematicum	193, 415
Troitsky	L'echiquier	387
I. Vâlceanu	Otarnicul şi cotitorul român	491
D. Yarcu	Bibliografia Chronologică română	531
***	Biblia	98
***	Invăţătura pentru măsurarea buţiilor cu cotul	487
***	Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitisimal	133
***	Scena Mundi oder Abrisis der Welt	194
***	Tabulae geographicae	195

Reviste

Archiv . . . 337
Boletin Matematico . . . 25
Boletin Matematico elemental . . . 26
Buletinul Societăţii române de Matematice . . . 514
Bulletin de la Société Mathématique de France . . . 197
Bulletin de la Société Mathématique de Grèce . . . 154
Bulletin of the American Mathematical Society . . . 73
Compte rendu (Vol. 96) . . . 161
Curierul Matematic . . . 78
Foaia Matematică . . . 346
Gazeta Matematică . . . 5, 8, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 41, 45, 52, 59, 65, 67, 71, 73, 81, 90, 91, 94, 104, 105, 111, 131, 136, 141, 146, 148, 149, 161, 164, 166, 167, 169, 172, 177, 181, 207, 223, 233, 241, 242, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 262, 264, 272, 276, 278, 279, 286, 288, 291, 304, 305, 306, 338,

Pag.

344, 354, 355, 357, 361, 381, 392, 399, 400, 410, 413, 417, 426, 433, 437, 440, 442, 444, 445, 447, 466, 478, 481, 482, 489, 434, 435, 507, 518, 521, 523, 529, 536, 548, 566, 576
Intermédiaire des Mathématiciens 410, 485
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker 117
Journal de Vuibert 289
Journal matematic 78
Mathesis . . 68, 71, 73, 102, 103, 104, 146, 147, 169, 264, 305, 359, 424, 437, 485, 494, 545, 546
Memoriale de l'Artillerie 204
Nouvelles analles 1916 103
Nouvelles analles de Mathématiques 291, 386
Recreații Științifice 25, 78, 127
Rendinconti del Seminario Matematico della R. Universita di Padova . . 177
Revista de Matematicas y fisicas elementales 25
Revista Matematică din Timișoara . . 26, 90, 106, 108, 136, 186, 188, 277, 340, 355, 357, 365, 435, 502, 504
Suplemento informativo 26
The Mathematics Student 435
The Tohoku Mathematical Journal 435
Zeitschrift der Matematik 337
Zentralblatt für Mathematik 154

K. ERATA

Pagina sau problema de îndreptat	*Pagina la care se indică îndreptarea ce trebue făcută*
Problema 4395	48
pag. 276 Vol. XXXIX.	96
„ 430 „ „	96
„ 448 „ „	96
„ 517 și 519 Vol. XXXIX	96
Problema 4418	144
pag. 130 Vol. XL.	240
„ 176 „ „	240
Problema 3808	288
pag. 127 Vol. XL.	384
Problema 4478	384
„ 2535	478
pag. 576 Vol. XL.	576
Problema 4425	576
„ 3209	576
„ 4467	576

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu Marcel (4462, 544, 45); *Antonescu N. Filofteia* (4536); *Apostol V. Radu* (4408, 524, 25, 36, 38); *Arno Hilf* (4462, 96, 519, 27); *Bogdan Gr. Ion* (4388); *Bogza G. Vasile* (4388); *Boian I.* (4379); *Buzincu I. Ion* (4279, 388); *Cardara Gh.* (4381, 496, 519); *Cercelaru D.* (4524, 45); *Cojocaru P.* (4279, 388); *Constantin F. Constanța* (4536); *Cseke Wilhelm* (4415, 18, 22, 24, 33, 41); *Enăşescu D. Victor* (4375, 493, 520); *Grumăzescu Mircea* (4459, 501, 12, 18, 19, 24); *Ianculescu O.* (4433, 60, 85, 95, 507, 09, 20, 24, 25, 39, 42, 44, 45); *Mavrodin D.* (4471, 505); *Mihalache St. Dumitru* (4388); *Neagu V. N.* (4520, 42); *Negrea Mircea* (2318, 56, 4388, 449, 500, 07, 39, 41, 43, 44, 45); *Petrescu I. Ion* (4436); *Petrescu P. Anastasie* (4471, 508, 20); *Savin C. Ion* (N); *Stoica D. Al.* (4383, 86, 410, 69, 518, 19, 38, 41); *Ştefănescu D. N.* (4354); *Tarasiuc Sergiu* (4425, 37, 72, 541, 42); *Țițeica I. Ilie* (4354, 469, 520, 24, 26, 41, 44, 45).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor şi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Folle vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia V* (sub presă).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“
Casa Gazeta Matematică
Calea Griviţei No. 158
Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceiaş adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN (Telefon 4-3929).**

C. 39.344